ACTA

SOCIETATIS SCIENTIARUM

FENNICÆ.

TOMUS XXI.

HELSINGFORSIÆ.
Ex officina typographica Societatis litterariae fennicae.
MDCCCXCVI.

TABLE

DES

ARTICLES CONTENUS DANS CE TOME.

ETAT DU PERSONNEL

DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE FINLANDE

AU 1 NOVEMBRE 1896.

MEMBRES HONORAIRES.

M. OTTO BÖTHLING, Conseiller d'état actuel, Membre de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg.

M. le Baron NICOLAS-ADOLPHE-ERIC NORDENSKIÖLD, D:r en phil., Professeur de minéralogie à l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.

M. CHARLES WEIERSTRASS, Professeur à l'Université et Membre de l'Académie Royale des Sciences de Berlin.

M. CHARLES HERMITE, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.

M. JEAN-AUGUSTE-HUGO GYLDÉN, D:r en phil., Professeur à l'Académie Royale des Sciences de Stockholm.

M. JEAN-DANIEL-CHARLES LIEBLEIN, Professeur à l'Université de Christiania.

M. CHARLES-HERMANN-AMANDUS SCHWARZ, Professeur à l'Université et Membre de l'Académie Royale des Sciences de Berlin.

M. JOSEPH-L.-FRANÇOIS BERTRAND, Membre et Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.

M. HENRI WILD, Conseiller d'état actuel, Ci-devant Directeur de l'Observatoire physique central de St.-Pétersbourg.

M. GUSTAVE WIEDEMANN, Professeur de chimie physique à l'Université de Leipzic.

M. JEAN VISLICENUS, Professeur de chimie à l'Université de Leipzic.

M. LORD KELVIN, Professeur de physique à l'Université de Glasgow. (Élu le 13 Avril 1896).

M. GASTON DARBOUX, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Académie des Sciences de l'Institut de France. (Élu le 13 Avril 1896).

M. Oscar Backlund, Conseiller d'état actuel, Directeur de l'Observatoire de Poulkova. (Élu le 13 Avril 1896).

M. Guillaume Nylander, Docteur en médecine, Ancien professeur de botanique à l'Université Alexandre. (Élu le 13 Avril 1896).

MEMBRES ORDINARES.

I. Section des sciences mathématiques et physiques.

M. Laurent-Léonard Lindelöf, D:r ès-sciences, Conseiller d'état actuel, Directeur général de l'Administration centrale des écoles, ancien professeur de mathématiques à l'Université Alexandre. (Secrétaire perpétuel de la Société).

M. Frédéric-Jean Wiik, D:r en phil., Professeur de minéralogie à l'Université Alexandre.

M. Gustave Mittag-Leffler, D:r en phil., Professeur de mathématiques à l'Université de Stockholm.

M. Charles-Sélim Lemström, D:r en phil., Professeur de physique à l'Université Alexandre.

M. Auguste-Frédéric Sundell, D:r en phil., Professeur extraordinarie de physique à l'Université Alexandre.

M. Edouard-Immanuel Hjelt, Professeur de chimie à l'Université Alexandre.

M. Edouard-Rodolphe Neovius, D:r en phil., Professeur de mathématiques à l'Université Alexandre. (Président de la Société 1895—1896).

M. André-Sévérin Donner, D:r en phil., Professeur d'astronomie à l'Université Alexandre.

M. le Baron Auguste-Benjamin af Schultén, D:r en phil., Professeur agrégé de chimie à l'Université Alexandre.

M. Victor-Théodore Homén, D:r en phil., Professeur agrégé de physique à l'Université Alexandre.

M. Adolphe-Ossian Aschan, D:r en phil., Professeur agrégé de chimie à l'Université. Alexandre.

M. Erançois-Charles-Otto-Auguste-Ernest Biese, Directeur de l'Institut météorologique central.

II. Section d'histoire naturelle.

M. Evert-Jules Bonsdorff, D:r en méd., Conseiller d'état, Professeur émérite.

M. Otto Edouard-Auguste Hjelt, D:r en méd., Archiâtre, ancien professeur d'anatomie pathologique à l'Université Alexandre.

M. André-Jean Malgmren, D:r en phil., Gouverneur du département d'Ouleâborg.

M. Odo-Morannal Reuter, D:r en phil., Professeur extraordinarie de zoologie à l'Université Alexandre.

M. Pierre-Adolphe Karsten, D:r ès-sciences, Professeur de botanique à l'Institut d'agriculture de Mustiala.

M. Conrad-Gabriel Hällstén, D:r en méd., Professeur de physiologie à l'Université Alexandre.

M. le baron Jean-Axel Palmén, D:r en phil., Professeur de zoologie à l'Université Alexandre.

M. Jean-Pierre Norrlin, D:r en phil., Professeur e. o. de botanique à l'Université Alexandre.

M. Ernest-Alexandre Homén, D:r en med., Professeur d'anatomie patologique à l'Université Alexandre.

M. Jean-Rénauld Sahlberg, D:r en phil., Professeur e. o. d'entomologie à l'Université Alexandre.

M. Frédéric-Emil-Wolmar Elfving, D:r en phil., Professeur de botanique à l'Université Alexandre. (Président actuel de la Société).

M. Alfred-Osvald Kihlman, D:r en phil., Professeur agrégé de botanique à l'Université Alexandre.

M. Jean-Guillaume Runeberg, D:r en méd., Professeur de médecine à l'Université Alexandre.

III. Section d'histoire et de philologie.

M. Jean Jaques-Guillaume Lagus, D:r en phil., Conseiller d'état, Ancien professeur de littérature grecque à l'Université Alexandre.

M. George-Zacharie Yrjö-Koskinen, D:r en phil., Sénateur, ancien professeur d'histoire à l'Université Alexandre.

M. Charles-Gustave Estlandfr, D:r ès-lettres, Conseiller de chancellerie, Professeur d'esthétique et de littérature moderne à l'Université Alexandre.

M. Jean Gustave Frosterus, D:r ès-lettres, Professeur, Inspecteur général à l'Administration centrale des écoles.

M. Sven-Gabriel Elmgren, D:r ès-lettres, Professeur extraordinaire.

M. Otto Donner, D:r en phil., Professeur extraordinaire de sanscrit et de linguistique comparée à l'Université Alexandre.

M. Axel-Olof Freudenthal, D:r en phil., Professeur extraordinaire de langue et littérature suédoises à l'Université Alexandre.

M. Charles-Emile-Ferdinand Ignatius, D:r en phil., Sénateur.

M. Jean-Rénaud Aspelin, D:r en phil., Professeur extraordinaire d'Archéologie à l'Université Alexandre.

M. Charles Synnerberg, D:r en phil., Conseiller de chancellerie, Inspecteur général à l'Administration centrale des écoles.

M. Charles-Constantin Tigerstedt, D:r en phil., ancien professeur d'histoire au lycée d'Âbo.

M. Jean-Richard Danielson, D:r en phil., Professeur d'histoire universelle à l'Université Alexandre.

M. Arvid-Oscar-Gustave Genetz, D:r en phil., Professeur de langue et litterature finnoises à l'Université Alexandre.

M. Magnus-Gottfrid Schybergson, D:r en phil., Professeur e. o. d'histoire à l'Université Alexandre.

DÉCÉDÉS DEPUIS LE 1 MAI 1895.

Membre honoraire:

M. Charles-Nicolas-Adalbert Krueger, † le 21 Avril 1896.

LISTE

des

Corps savants et des Établissements scientifiques en Russie et à l'étranger auxquels sont distribuées les publications de la Société des Sciences de Finlande.

RUSSIE.

Dorpat. { Société des Naturalistes.
Société scientifique Este.

Iékaterinenbourg. Société Ouralienne d'amateurs des sciences naturelles.

Kasan. Société physico-mathématique à l'Université.

Kiew. Société des Naturalistes.

Moscou. { Société Impériale des Naturalistes.
Société mathématique.
Société Impériale d'amateurs des sciences naturelles, d'anthropologie et d'ethnographie.

St.-Pétersbourg. { Académie Impériale des Sciences.
Observatoire astronomique central de Poulkova.
Observatoire physique central.
Société minéralogique.
Société Impériale de géographie.
Bibliothèque publique Impériale.
Jardin Impérial de botanique.
Comité géologique.
Institut Impérial de médicine expérimentale.

Tiflis. Observatoire météorologique.

Les Universités Impériales de Charkow, Dorpat, Kasan, Kiew, Moscou, Odessa, St.-Pétersbourg et de Varsovie.

SUÈDE et NORVÈGE.

Bergen. Bergens museum.
Christiania. Université Royale.
Gotenbourg. Société Royale des sciences et des lettres.
Lund. Université Royale.
Stockholm.
- Académie Royale des sciences.
- Académie Royale Suédoise.
- Académie Royale des belles-lettres, de l'histoire et des antiquités de Suède.
- Bibliothèque Royale.
- Bureau des recherches géologiques de la Suède.
- Bureau Nautique Météorologique.
- Université (Stockholms Högskola).

Tromsö. Tromsö Museum.
Trondhjem. Société Royale des sciences.
Upsal.
- Université Royale.
- Société Royale des sciences.

DANEMARK.

Copenhague.
- Université Royale.
- Société Royale des sciences.

ALLEMAGNE et AUTRICHE.

Agram.
- Société archéologique Croate.
- Société d'histoire naturelle Croate.

Augsburg. Historischer Verein für Schwaben und Neuburg.
Bamberg. Naturforschender Verein.
Berlin.
- Königliche Akademie der Wissenschaften.
- Hydrographisches Amt der Kaiserlichen Marine.
- Königlich-Preussisches Meteorologisches Institut.

Bistritz. Gewerbeschule.
Bonn. Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westfalens.
Braunschweig. Verein für Naturwissenschaft.
Bremen. Naturwissenschaftlicher Verein.
Brünn. Naturforschender Verein.

Budapest. Ungarische Akademie.
Cassel. Verein für Naturkunde.
Charlottenburg. Physikalisch-Technische Reichsanstalt.
Chemnitz. Verein für Chemnitzer Geschichte.
Dürkheim. Pollichia, ein Naturwissenschaftlicher Verein der Rheinpfalz.
Dresden. { Kaiserl. Leopoldino-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.
Königliche Oeffentliche Bibliothek.
Elberfeld. Naturhistorischer Verein.
Erlangen. Physikalisch-medicinische Societät.
Freiberg. Alterthums Verein.
Görlitz. Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.
Göttingen. Königliche Gesellschaft der Wissenchaften.
Giessen. Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
Graz. Historischer Verein für Steiermark.
Greifswald. Naturwissenschaftlicher Verein von Neuvorpommern und Rügen.
Halle. Naturforschende Gesellschaft.
Hamburg. { Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung.
Deutsche Seewarte.
Jena. Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.
Kiel. Kongl. Christian-Albrechts-Universitetet.
Klagenfurt. Naturhistorisches Landesmuseum von Kärnthen.
Königsberg. Königl. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft.
Leipzig. { Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.
Fürstlich-Jablonowskische Gesellschaft.
Astronomische Gesellschaft.
Verein für Erdkunde.
München. Königl. Bayerische Akademie der Wissenschaften.
Nürnberg. Germanisches Museum.
Offenbach. Verein für Naturkunde.
Potsdam. Observatoire astrophysique.
Prag. { Königl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
Académie tchèque des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts.
Presburg. Verein für Naturkunde.
Regensburg. Zoologisch-mineralogischer Verein.
Sarajevo. Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum.
Strassburg. L'Université.
Triest. { Società Adriatica di scienze naturali.
K. K. Handels- und Nautische Akademie.

Ulm. Verein für Kunst und Alterhümer in Ulm und Oberschwaben.

Wien.
- Kaiserl. Akademie der Wisserschaften.
- K. K. geologische Reichsanstalt.
- K. K. geographische Gesellschaft.
- K. K. Zoologisch-botanische Gesellschaft.
- Anthropologische Gesellschaft.
- Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.
- K. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus.
- Naturhistorisches Hofmuseum.

Wiesbaden. Verein für Naturkunde.

Würzburg. Physikalisch-medicinische Gesellschaft.

SUISSE.

Bern. Die Schweizerische Entomologische Gesellschaft.

Genève. Société de physique et d'histoire naturelle.

Zürich.
- Naturforschende Gesellchaft.
- Die Schweizerische Meteorologische Commission.

PAYS-BAS et BELGIQUE.

Amsterdam.
- Académie Royale des sciences.
- Kon. Zoologisch Genootshap „Natura artis magistra".

Bruxelles.
- Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
- Société malacologique de Belgique.
- Société entomologique de Belgique.
- Observatoire Royal.
- Institut international de Bibliographie.

Delft. L'école Polytechnique.

Harlem. Fondation de P. Teyler van der Hulst.

Liége.
- Société Royale des sciences.
- Société géologique de Belgique.

Utrecht. L'institut Royal météorologique des Pays-Bas.

FRANCE.

Bordeaux. Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. Société Linnéenne de Normandie.

Cherbourg. Société des sciences naturelles.
Lille. l'Université.
Lyon. { Académie des sciences, belles-lettres et arts.
Société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles.
Société Linnéenne.
Marseille. Faculté des Sciences.
Montpellier. Académie des sciences et lettres.
Nancy. Société des sciences naturelles.
Paris. { Académie des sciences de l'Institut de France.
Société mathématique de France.
École Polytechnique.
Musée Guimet.
Société de géographie.
Museum d'histoire naturelle.

ITALIE.

Palermo. Circolo matematico.
Pisa. École normale supérieure.
Rome. { Reale Accademia dei Lincei.
Specula Vaticana.
Turin. Académie Royale des sciences.

GRANDE-BRETAGNE et IRLANDE.

Cambridge. Philosophical Society.
Dublin. { Royal Irish Academy.
Royal Society of Dublin.
Edinburg. Royal Society of Edinburg.
Liverpool. Litterary and philosophical Society.
London. { Royal Society of London.
Royal astronomical Society of London.
Zoological Society.
Meteorological Office.
Geographical Society.
The Patent Office Library.
Manchester. Litterary and philosophical Society.
Oxford. Bodleian Library.

ÉTATS UNIS DE L'AMÉRIQUE DU NORD.

Albany. New York State Library.
Austin. Texas Academy of Science.
Baltimore. Johns Hopkins University.
Boston. { American Academy of Arts and Sciences.
Society of Naturalhistory.
Cambridge, Mass. Museum of Comparative Zoology at Harvard College.
Madison. Wisconsin agricultural Society.
New-Haven. Connecticut Academy of Arts and Sciences.
New-York. American Museum of Natural History.
New-Orleans. Academy of Natural Sciences.
Philadelphia. Academy of Natural Sciences.
St.-Francisco. California Academy of Natural Sciences.
Topeka. Kansas Academy of Science.
Washington. { Smithsonian Institution.
U. S. Department of Agriculture.
The Office U. S. Geological Survey of the Territories.
U. S. Naval Observatory.
Anthropological Society.
Bureau of Education.
Bureau of Ethnology.

CANADA.

Halifax. Nova Scotian Institute of Natural Science.
Montreal. Geological and Natural History Survey.
Toronto. Canadian Institute.

LA RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Córdova. Academia Nacional de ciencias de la Republica Argentina.

CHILI.

Santiago. Société scientifique du Chili.

INDES ORIENTALES.

Calcutta. The Asiatic Society of Bengal.
Madras. Madras Litterary Society.
Singapore. The Straits Branch of the Royal Asiatic Society.

JAPON.

Tokio. College of Science. Imperial University.
Yokohama. The Asiastic Society of Japan.

AUSTRALIE.

Sidney. { Royal Society of New South Wales.
Linnean Society of New South Wales.
Wellington. Colonial Museum of New Zealand.

Helsingfors, Imprimerie de la Société de Littérature Finnoise, 1896.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXI. № 1.

ÜBER DIE FUNDAMENTALE WICHTIGKEIT DES SATZES VON CAUCHY FÜR DIE THEORIEN DER GAMMA- UND DER HYPERGEOMETRISCHEN FUNCTIONEN

VON

HJ. MELLIN.

Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Functionen.

Es scheint allgemeiner nicht bekannt zu sein, mit welchem Erfolg der Cauchysche Satz[1]) in den Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Functionen angewendet werden kann. Durch zweckmässige Benutzung desselben können zunächst aus Gammafunctionen gebildete Producte und Quotienten als Summen von neuen Functionen dargestellt werden, welche fast ebenso einfache Functionalgleichungen befriedigen, wie diejenigen, denen die erst genannten Ausdrücke Genüge leisten. Die neuen Functionen ergeben sich zunächst in der Form von bestimmten, über Gammafunctionen ausgedehnten Integralen, worin die unabhängige Variable als Parameter enthalten ist. Einige derselben lassen sich aber auch in der Form von Partialbruchreihen, andere in der Form beständig convergirender Potenzreihen darstellen. Ferner giebt es auch sehr einfache Reihen einer dritten Gestalt, wodurch mehrere der fraglichen Functionen ausgedrückt werden können.

Diese durch Anwendung des Cauchyschen Satzes sich ergebenden Functionen bieten aber auch eine Gelegenheit dar, die Theorie der hypergeometrischen Functionen (beliebiger Ordnungen) an die Theorie der Gammafunctionen in ungezwungener Weise anzuschliessen. Der Zusammenhang der beiden Theorien erweist sich dabei als ein so inniger, dass von zwei getrennten Theorien gar nicht mehr die Rede sein kann. Die hypergeometrischen Functionen erscheinen hierbei in der bemerkenswerthen Form von bestimmten, über Gammafunc-

---

[1]) Wonach das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,dz$ — erstreckt in positiver Richtung über die Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Gebietes, wo die monogene Function $F(z)$ eindeutig ist und keine andere Singularitäten als Unendlichkeitsstellen zur endlichen Anzahl besitzt — gleich ist der Summe der zu den genannten Stellen gehörigen Residuen der Function. Hier genügt es, den Satz in dieser besonderen Form zu benutzen.

tionen gebildeten Integralen, in denen die unabhängige Variable in sehr einfacher Weise als Parameter enthalten ist. Bei der Erörterung dieser Integrale kann der CAUCHYsche Satz fortwährend mit gutem Erfolg angewendet werden. Die Differentialgleichungen und die Reihenentwickelungen derselben ergeben sich beispielsweise sehr einfach durch zweckmässige Benutzung des betreffenden Satzes.

Als Hauptergebnisse der oben angedeuteten, weiterhin ausführlich darzustellenden Theorie können bezeichnet werden: die Zurückführung einer überaus grossen Menge bestimmter, über hypergeometrische Functionen ausgedehnter Integrale auf die *Gammafunction* und die Darstellung hypergeometrischer Functionen mit Hülfe *derselben Function* in der Form von bestimmten einfachen Integralen, worin die unabhängige Variable als Parameter enthalten ist. Als Aufgabe dieser Arbeit betrachten wir überdies den Nachweis des Satzes, *dass alle hypergeometrishen Differentialgleichungen mit Hülfe der Gammafunction im angeführten Sinne vollständig integrirt werden können* [1]) — ein Satz, der wohl als neu betrachtet werden kann, und welcher sehr eigenthümlich lautet, wenn man bedenkt, dass die Gammafunction selbst bekanntlich keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann.

Die vorliegende Arbeit hängt mit früheren, die Gammafunctionen betreffenden Untersuchungen [2]) des Verfassers nahe zusammen, geht aber zugleich über dieselben bedeutend hinaus. Der Abschnitt I enthält zunächst die vollständige Erledigung einer wohlbegrenzten functionentheoretischen Aufgabe, welche zugleich für die Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichungen eine besondere Bedeutung hat. Für die darauf folgenden Abschnitte aber ist die consequente Benutzung des CAUCHYschen Satzes charakteristisch.

---

[1]) Was in der gegenwärtigen Arbeit für Gamma- und hypergeometrische Functionen *einer* Variable dargethan wird, kann, wie ich gelegentlich nachzuweisen gedenke, in analoger Weise auch für entsprechende Functionen *mehrerer* Veränderlichen geleistet werden, wobei die betreffenden Functionen in der Form von vielfachen, über Gammafunctionen ausgedehnten bestimmten Integralen auftreten werden, worin die unabhängigen Veränderlichen als Parameter enthalten sind. Die Anzahl der Integralzeichen wird gleich der Anzahl der Veränderlichen, und somit von den Ordnungszahlen der Functionen unabhängig.

[2]) Welche in den folgenden Arbeiten publicirt worden sind: *Om en ny klass af transcendenta funktioner, hvilka äro beslägtade med Gammafunktionen.* I & II (Acta Soc. Sc. Fenn. Tom. XIV & XV). *Zur Theorie der Gammafunction.* (Acta Math. Bd. 8.) *Über einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential- und Differenzengleichungen.* (Ebenda Bd. 9). *Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung* (Ebenda Bd. 15). *Om definita integraler, hvilka för obegränsadt växande värden af vissa heltaliga parametrar hafva till gränser hypergeometriska funktioner af särskilda ordningar.* (Acta Soc. Sc. Fenn. Tom. XX).

I.

Erledigung einer functionentheoretischen Aufgabe, welche für die Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichungen eine besondere Bedeutung hat.

1.

In diesem Abschnitte wollen wir diejenigen Gammafunctionen charakterisiren, welche in der vorliegenden Arbeit sodann vorzugsweise benutzt werden sollen.

In der Theorie der Gammafunctionen handelt es sich oft um das Verhalten der Functionen in einem Bereiche, welcher in der die complexe Veränderliche $z = \zeta + i\,\zeta'$ darstellenden Ebene von zwei unbegrenzten, zur imaginären Axe parallelen Geraden $\zeta = \alpha$ und $\zeta = \beta$ begrenzt wird. Ein solcher Parallelstreifen kann, falls $\alpha < \beta$ ist, durch $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ bezeichnet werden.

In § 13 meiner Arbeit *Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung* (Acta Math. Bd. 15) sind nun allgemeine Ausdrücke ermittelt worden, durch welche sämmtliche, einer Functionalgleichung der Form

$$F(z+1) = a\frac{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_m)}{(z-\sigma_1)\cdots(z-\sigma_n)}F(z) = a\,R(z)\,F(z)$$

genügende, monogene Functionen dargestellt werden können, für die es überhaupt einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite *Eins* $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha+1)$ giebt, wo sie sich überall[1]) regulär verhalten und wo sie überdies, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, dem absoluten Betrage nach nicht über jede endliche Grenze wachsen können[2]).

---

[1]) D. h. in der Umgebung jeder *endlichen* Stelle im Innern und auf der Begrenzung des Streifens.

[2]) Eine allgemeinere Aufgabe als die obige entsteht, wenn man nach denjenigen, die Gleichung $f(z+1) = a\,R(z)\,f(z)$ befriedigenden Functionen fragt, die in einem gewissen (und daher auch in jedem) zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite Eins keine andere Singularitäten,

Man setze zur Abkürzung

$$\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)=\mathfrak{G}(z),$$

und es seien $c_1, \cdots, c_p$ beliebige Constanten, unter denen doch keine zwei sich finden, deren Differenz gleich der Null oder einer ganzen Zahl wäre, und deren Anzahl p der einzigen Bedingung unterworfen ist, dass $2p$ nicht kleiner ist als $m+n$. Dann lässt sich jede Function mit den oben genannten Eigenschaften bei passender Bestimmung von $A_0, A_1, \cdots, A_p$ — je nachdem $n+p$ eine gerade oder ungerade Zahl ist — durch den *ersteren* oder *letzteren* der folgenden Ausdrücke darstellen

$$(1)\quad \begin{cases} a^z\,\mathfrak{G}(z)\sin\pi(z-c_1)\cdots\sin\pi(z-c_p)\;[A_0+A_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1)+\cdots+A_p\operatorname{cotg}\pi(z-c_p)], \\ a^z\,\mathfrak{G}(z)\sin\pi(z-c_1)\cdots\sin\pi(z-c_p)\left[\dfrac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\cdots+\dfrac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right], \end{cases}$$

$$2p\geqq m+n.$$

Nimmt man von einer Function $F(z)$ an, dass sie, statt der Gleichung $F(z+1)=aR(z)F(z)$, der Gleichung $F(z+1)=-aR(z)F(z)$ genüge und sich in einem gewissen Parallelstreifen $(\alpha\leqq\zeta\leqq\alpha+1)$ auf die im vorigen Falle angegebene Weise verhalte, so gelangt man durch dieselben Schlüsse, wie sie in dem citirten § benutzt wurden, ebenfalls zu den Ausdrücken (1). Jetzt wird aber $F(z)$ durch den *letzteren* oder *ersteren* von ihnen dargestellt, je nachdem $n+p$ gerade oder ungerade ist. Die obigen Ausdrücke (1) haben also auch die allgemeinere Bedeutung, dass sie sämmtliche Functionen umfassen, welche die eine oder die andere der beiden Functionalgleichungen $F(z+1)=\pm aR(z)F(z)$ befriedigen, und für die es ausserdem irgendwo in der z-Ebene einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite *Eins* giebt, wo sie sich auf die angegebene Weise verhalten.

Der letztere Ausdruck (1) kann auf eine Form gebracht werden, worin er sich vom ersteren nur dadurch unterscheidet, dass statt p die Zahl $p-1$ vorkommt. Dies geschieht durch die Transformation

---

als Unendlichkeitsstellen zur endlichen Anzahl, besitzen und, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, sich daselbst der Grenze Null nähern, wofern z sich von der reellen Axe ins Unendliche entfernt. Diese Aufgabe — wo es sich offenbar um die Bestimmung sämmtlicher, die Gleichung $f(z+1)=aR(z)f(z)$ befriedigender Functionen handelt, die sich in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite ebenso verhalten, wie die rationalen Functionen von z in der ganzen z-Ebene — kann auf die obige speciellere Aufgabe dadurch zurückgeführt werden, dass man $F(z)=r(z)f(z)$ setzt, wobei $r(z)$ eine passend gewählte, ganze rationale Function bezeichnet.

$$(2)\qquad \sin\pi(z-c_p)\left[\frac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\cdots+\frac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right]=$$
$$B_0+B_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1)+\cdots+B_{p-1}\operatorname{cotg}\pi(z-c_{p-1}),$$

welche in dieser Arbeit auch bei anderen Gelegenheiten benutzt wird. Diese Gleichung findet statt, wenn die B so bestimmt werden, dass die Differenz der beiden Seiten an keiner der Stellen $c_1, \cdots, c_{p-1}$ unendlich werden kann. Denn bei einer solchen Bestimmung, die ja stets möglich ist, ergiebt sich leicht, dass die genannte Differenz den Charakter einer ganzen Function besitzt, die mit wachsendem $|z|$ ihrem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze bleibt und sich somit auf eine Constante reduciren muss. Hiermit ist die Richtigkeit der Behauptung erwiesen.

Die obigen Ausdrücke (1) wurden a. a. O. keiner besonderen Discussion unterzogen. Bei dieser Gelegenheit sollen sie aber eingehend erörtert werden. Es wird sich ergeben, dass man die Untersuchungen unbeschadet der Allgemeinheit auf solche Functionen beschränken kann, in deren Ausdrücke $a=1$ ist. *Dagegen ist es angemessen, die beiden Gleichungen $F(z+1)=\pm R(z)F(z)$, resp. die ihnen genügenden Functionen, gleichzeitig neben einander in Betracht zu ziehen.*

Der Kürze halber werden in dieser Arbeit die nachstehenden Bezeichnungen benutzt und ihre Bedeutungen stets als bekannt vorausgezetzt:

$$(3)\qquad R(z)=\frac{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_m)}{(z-\sigma_1)\cdots(z-\sigma_n)},$$

$$(4)\qquad \varkappa=\sigma_1+\cdots+\sigma_n-\varrho_1-\cdots-\varrho_m,$$

$$(5)\qquad \mathbf{G}(z)=\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z),$$

$$(6)\quad \varphi(z,\lambda)=\sin\pi(z-c_1)\cdots\sin\pi(z-c_\lambda)\,[A_0+A_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1)+\cdots+A_\lambda\operatorname{cotg}\pi(z-c_\lambda)].$$

Die Function $\mathbf{G}(z)$ hat offenbar die Eigenschaft $\mathbf{G}(z+1)=(-1)^n R(z)\,\mathbf{G}(z)$. Sie kann als eine Grundform betrachtet werden, aus der die übrigen weiterhin in Betracht zu nehmenden Functionen durch Multiplication mit Ausdrücken der Form $\varphi(z,\lambda)$ entstehen. Die in $\varphi(z,\lambda)$ enthaltenen Constanten $c_1,\cdots,c_\lambda$ hat man als bestimmte, von vorneherein angenommene Grössen zu betrachten, wogegen die A als unbestimmte oder zu bestimmende Grössen anzusehen sind. Offenbar ist $\varphi(z+1,\lambda)=(-1)^\lambda\varphi(z,\lambda)$.

Unsere Ausdrücke (1), worin nach dem Gesagten $a=1$ zu setzen ist, und wovon der erstere alsdann die Form $\mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p)$ schon hat, der letztere auf die Form $\mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p-1)$ stets gebracht werden kann, gestalten sich am ein-

fachsten, wenn wir p gleich der kleinsten ganzen Zahl annehmen, deren doppelter Werth nicht kleiner ist als $m+n$. *Bei den weiteren Erörterungen soll daher die ganze Zahl p stets durch die Ungleichheiten*

$$(7) \qquad p \geqq \frac{m+n}{2} > p-1$$

in eindeutiger Weise definirt sein.

Jede monogene, die Gleichung $F(z+1)=+R(z)F(z)$ oder $F(z+1)=-R(z)F(z)$ befriedigende Function, für die es einen Parallelstreifen ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha+1$) giebt, wo sie sich auf die früher angegebene Weise verhält, ist nun in den Ausdrücken enthalten:

$$(8) \quad \begin{cases} \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z,p) = \mathfrak{G}(z)\,\varphi(z,p), \\ \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\ldots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z,p-1) = \mathfrak{G}(z)\,\varphi(z,p-1), \end{cases}$$

und zwar in dem ersteren oder letzteren, je nachdem sie die Gleichung $F(z+1)=(-1)^{n+p}R(z)F(z)$ oder $F(z+1)=(-1)^{n+p-1}R(z)F(z)$ befriedigt. Man darf natürlich nicht umgekehrt behaupten, dass diese Ausdrücke, obschon sie die genannten Gleichungen befriedigen, stets auch die übrigen in Frage stehenden Eigenschaften besitzen. Es wird vielmehr unsere Aufgabe in diesem Abschnitte sein, solche Bedingungen zu ermitteln, unter denen sie auch die übrigen Eigenschaften bekommen. Zu bemerken ist auch, dass diese Ausdrücke sich a. a. O. ergaben, ohne dass es nöthig war, die Lage des vorausgesetzten Parallelstreifens ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha+1$) näher anzugeben. Von der Zahl α sind sie in der That auch ganz unabhängig.

In der Aufgabe, welche zu den Ausdrücken (8) geführt hat, wird ein zur imaginären Axe paralleler Streifen von der Breite Eins verlangt, wo die gewünschten Functionen sowohl sich überall regulär verhalten, wie auch, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze bleiben sollen. Die letzte Forderung bezieht sich offenbar auf das Verhalten der Functionen für unendlich grosse, dem Parallelstreifen angehörige Werthe von z und ist der Bedingung vollständig äquivalent, dass die betreffenden Functionen nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z sich gleichmässig der *Null* nähern sollen, wofern sich z in dem fraglichen Streifen ins Unendliche entfernt; was so bezeichnet werden kann: $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty} z^{-k}F(z)=0,\ \alpha \leqq \zeta \leqq \alpha+1$. Beachtet man nun, dass eine die Gleichung $F(z+1)=\pm R(z)F(z)$ befriedigende Function, welche in einem gewissen, zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite *Eins* bei passender Bestim-

mung von k die Bedingung $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty} z^{-k}F(z)=0$ erfüllt, dieselbe Eigenschaft auch in jedem anderen solchen Streifen besitzt; so leuchtet ein, das sämmtliche Functionen mit den in unserer Aufgabe verlangten Eigenschaften dadurch erhalten werden können, dass man von der Menge der in (8) enthaltenen Functionen zunächst diejenigen absondert, die in jedem beliebigen Streifen $(\alpha\leq\zeta\leq\beta)$ bei passender Bestimmung von k die Eigenschaft $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty} z^{-k}F(z)=0$ besitzen, und sodann unter den abgesonderten Functionen diejenigen ermittelt und behält, für die es überhaupt einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite *Eins* giebt, wo sie sich überall regulär verhalten. In dieser Reihenfolge sollen nun die Untersuchungen dieses Abschnittes geführt werden.

Es fragt sich also zunächst, wie sich die Ausdrücke (8) für unendlich grosse, einem Parallelstreifen $(\alpha\leq\zeta\leq\beta)$ angehörige Werthe von z verhalten.

2.

Um diese Frage beantworten zu können, muss ich mich auf zwei in den §§ 3 und 4 der oben citirten Arbeit ermittelte Formeln stützen, die das Verhalten zweier Gammaquotienten in einem beliebigen, zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha\leq\zeta\leq\beta)$ für den Fall charakterisiren, dass die Veränderliche $z=\zeta+i\zeta'$ sich von der reellen Axe ins Unendliche entfernt, und die so lauten [1])

$$\frac{\Gamma(z-a)}{\Gamma(z-b)}=z^{b-a}(1+\varepsilon)\,, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(-z)}\right|=|z^{2\zeta}|\,.\,|1+\varepsilon|\,, \tag{10}$$

wo ε mit wachsendem $|\zeta'|$ gegen die Null *gleichmässig* convergirende Grössen bezeichnet. Die in diesen Gleichungen enthaltenen mehrdeutigen Ausdrücke sind durch $z^{b-a}=e^{(b-a)\log z}$, $z^{2\zeta}=e^{2\zeta\log z}$ in der Weise zu definiren, dass unter $\log z$ stets der Hauptzweig des Logarithmus naturalis verstanden wird. Wird (10) mit der Formel $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}=\frac{2\pi i}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}$ zusammengestellt, so ergiebt sich die wichtige Gleichung

$$|\Gamma(z)|=|z^{\zeta-\frac{1}{2}}|\,.\,e^{-\frac{\pi}{2}|\zeta'|}\,.\,|\sqrt{2\pi}+\varepsilon|\,, \tag{11}$$

welche angiebt, wie sich die Gammafunction selbst verhält, wenn der imaginäre Theil der Variable $z=\zeta+i\zeta'$ dem absoluten Betrage nach ohne Ende wächst,

[1]) Man bemerke die Verschiedenheit der beiden Gleichungen in der Hinsicht, dass die letztere nur das Verhalten des absoluten Betrages des Quotienten der linken Seite angiebt.

während ihr reeller Theil auf ein beliebiges, aber endliches Intervall $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ beschränkt ist. Auch hier bezeichnet ε eine mit wachsendem $|\zeta'|$ gegen die Null gleichmässig convergirende Grösse, wofern ζ auf die angegebene Weise beschränkt ist.

Das Verhalten der Sinusfunction für ohne Ende wachsende Werthe des imaginären Theiles von z kann offenbar durch

$$(12) \qquad |\sin \pi (z-a)| = e^{\pi |\zeta'|} \cdot \left| \frac{e^{\pm \pi i a}}{2} + \varepsilon \right|$$

angegeben werden, falls ε wieder eine mit wachsendem $|\zeta'|$ gegen die Null convergirende Grösse bezeichnet. In $e^{\pm \pi i a}$ ist das Plus- oder Minuszeichen zu nehmen, je nachdem ζ' durch positive oder negative Werthe wächst.

Vermöge der aus (9) zu entnehmenden Gleichung $\Gamma(z-a) = \Gamma(z) z^{-a} (1+\varepsilon)$ lässt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(z) &= \Gamma(z-\varrho_1) \cdots \Gamma(z-\varrho_m)\, \Gamma(1+\sigma_1-z) \cdots \Gamma(1+\sigma_n-z) \\ &= \frac{\Gamma(z-\varrho_1) \cdots \Gamma(z-\varrho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1) \cdots \Gamma(z-\sigma_n)} \cdot \frac{\pi^n}{\sin \pi (z-\sigma_1) \cdots \sin \pi (z-\sigma_n)} \end{aligned}$$

für undendlich grosse, einem Parallelstreifen $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ angehörige Werthe von z auf die Form bringen:

$$(13) \qquad \mathrm{G}(z) = z^{\varkappa} [\Gamma(z)]^{m-n} \frac{\pi^n}{\sin \pi (z-\sigma_1) \cdots \sin \pi (z-\sigma_n)} (1+\varepsilon),$$

wo ε eine unendlich kleine Grösse bezeichnet und $\varkappa$ durch (4) definirt ist. Fügt man auf beiden Seiten den Ausdruck $\sin \pi (z-c_1) \cdots \sin \pi (z-c_\lambda)$ als Factor hinzu und benutzt die Gleichungen (11) und (12), so folgt

$$(14) \quad |\mathrm{G}(z) \sin \pi (z-c_1) \cdots \sin \pi (z-c_\lambda)| = |z^{\varkappa + (m-n)(\zeta - \frac{1}{2})}| \cdot e^{-\pi \left(\frac{m+n}{2} - \lambda\right) |\zeta'|} \cdot \chi(\zeta, \zeta'),$$

wo $\chi(\zeta, \zeta')$ eine positive Variable bezeichnet, welche mit wachsendem $|\zeta'|$ gegen eine endliche, von Null verschiedene und von ζ unabhängige Grenze gleichmässig convergirt, wofern ζ auf ein beliebiges, aber endliches Intervall $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ beschränkt wird. Der leicht einleuchtende Umstand, dass $\lim\limits_{\zeta'=+\infty} \chi(\zeta, \zeta')$ und $\lim\limits_{\zeta'=-\infty} \chi(\zeta, \zeta')$ im Allgemeinen von einander verschieden sind, ist für alle folgenden Untersuchungen ohne Belang.

Mit Benutzung der Gleichung (14) kann das Verhalten der Ausdrücke (8) für unendlich grosse, einem beliebigen Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ angehörige Werthe von z nunmehr erörtert werden. Bevor wir aber in den §§ 4 und 5 hierzu

übergehen, wollen wir im nächstfolgenden § ein Paar Hülfsätze über trigonometrische Ausdrücke der Form (6) entwickeln, von denen wir gleichfalls Gebrauch machen werden.

3.

Dieser § soll also einer Erörterung von Ausdrücken der mit $\varphi(z, \lambda)$ bezeichneten Form gewidmet werden. Es wird stets vorausgesetzt, dass unter den in φ enthaltenen Constanten $c_1, \cdots, c_\lambda$ weder zwei gleiche sich finden, noch zwei, deren Differenz gleich einer ganzen Zahl wäre. Offenbar hat φ den Charakter einer ganzen Function.

Soll ein Ausdruck der Form $\varphi(z, \lambda)$ — man siehe (6) — an irgend einer der Stellen $c_1, \cdots, c_\lambda$, z. B. für $z = c_\lambda$ verschwinden, so ist hierfür offenbar nothwendig und hinreichend, dass die zugehörige Constante A_λ gleich der Null ist. Alsdann wird aber $\varphi(z, \lambda) = \sin\pi(z - c_\lambda)\,\varphi(z, \lambda - 1)$. Dies gilt auch für den Fall, wo man annimmt, $\varphi(z, \lambda)$ verschwinde an einer Stelle, die von c_λ um eine ganze Zahl verschieden ist. — Jetzt werde angenommen, $\varphi(z, \lambda)$ verschwinde an einer Stelle $z = a$, die von keiner der Grössen $c_1, \cdots, c_\lambda$ um eine ganze Zahl verschieden ist. Hierfür ist nothwendig und hinreichend, dass der in φ vorkommende Klammerausdruck für $z = a$ gleich der Null ist. Es ergiebt sich somit eine Gleichung, durch welche A_0 homogen und linear in $A_1, \cdots, A_\lambda$ ausgedrückt wird. Setzt man für A_0 diesen Ausdruck in $\varphi(z, \lambda)$ ein, so nimmt $\varphi(z, \lambda)$ nach einer einfachen Rechnung die Form an

$$\sin\pi(z-a)\sin\pi(z-c_1)\cdots\sin\pi(z-c_\lambda)\left[\frac{B_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\cdots+\frac{B_\lambda}{\sin\pi(z-c_\lambda)}\right].$$

Dieser Ausdruck kann vermöge der Gleichung (2) weiter auf die Form $\sin\pi(z-a)\,\varphi(z, \lambda-1)$ gebracht werden. Es gilt also unbedingt der Sats, *dass ein Ausdruck der Form* $\varphi(z, \lambda)$, *welcher für* $z = a$ *verschwindet, auf die Form* $\sin\pi(z-a)\,\varphi(z, \lambda-1)$ *gebracht werden kann.* Aus dem Obigen geht zugleich hervor, dass man bei unbestimmten Werthen der $\lambda + 1$ Constanten A stets über dieselben so verfügen kann, dass $\varphi(z, \lambda)$ gleich $\sin\pi(z-a)\,\varphi(z, \lambda-1)$ wird, wobei a eine beliebig gewählte Grösse bezeichnen darf. In $\varphi(z, \lambda-1)$ bleiben noch λ unbestimmte Constanten übrig.

Durch wiederholte Anwendung des obigen Satzes, der an eine bekannte Eigenschaft der ganzen rationalen Functionen erinnert, leitet man den folgenden ab, der das Analogon zu der Zerlegung eines Polynoms in Linearfactoren bildet: Verschwindet eine Function $\varphi(z, \lambda)$ an den verschiedenen Stellen $z = a_1, \cdots, a_\mu$, unter denen vorläufig keine zwei sich finden mögen, deren Dif-

ferenz gleich einer ganzen Zahl wäre, so ist $\varphi(z,\lambda)$ gleich $\sin\pi(z-a_1)\cdots\sin\pi(z-a_\mu)\,\varphi(z,\lambda-\mu)$ falls $\mu<\lambda$ ist, gleich $C\sin\pi(z-a_1)\cdots\sin\pi(z-a_\mu)$ falls $\mu=\lambda$ ist, und schliesslich identisch gleich der Null, falls $\mu>\lambda$ ist. Offenbar gestaltet sich der Satz einfacher, wenn wir das Zeichen $\varphi(z,\lambda)$ für $\lambda=0$ und auch für negative Werthe von λ in der Weise erklären, *dass* $\varphi(z,\lambda)$ *für* $\lambda=0$ *eine unbestimmte Constante und für alle negativen Werthe von* λ *die Null bezeichnen soll.* Alsdann hat auch der folgende, etwas allgemeinere Satz unbedingte Gültigkeit, wobei mit Rücksicht auf die Eigenschaft $\varphi(z+1)=(-1)^\lambda\varphi(z)$ zwei Werthe von z, deren Differenz eine ganze Zahl ist, als von einander nicht wesentlich verschieden oder als äquivalent anzusehen sind: *Soll ein Ausdruck der Form* $\varphi(z,\lambda)$ *an den Stellen des Systems* $a_1,\cdots,a_\mu$ *verschwinden — wobei jede darin etwa vorkommende Gruppe gleicher oder äquivalenter Grössen den Sinn haben soll, dass* φ *an jeder Stelle der Gruppe von derselben Ordnung verschwinde, wie die Zahl der Grössen der Gruppe besagt — so ist hierfür nothwendig und hinreichend, dass derselbe sich auf die Form bringen lässt:*

$$\varphi(z,\lambda)=\sin\pi(z-a_1)\cdots\sin\pi(z-a_\mu)\,\varphi(z,\lambda-\mu)\,. \tag{15}$$

Zu beachten ist auch, dass man nach dem oben Dargelegten bei unbestimmten Werthen der $\lambda+1$ Constanten A über dieselben wirklich so verfügen kann, dass $\varphi(z,\lambda)$ gleich der rechten Seite von (15) wird, wo $a_1,\cdots,a_\mu$ beliebige Werthe haben können. Dabei bleiben in $\varphi(z,\lambda-\mu)$, falls $\mu\leq\lambda$ ist, noch $\lambda-\mu+1$ unbestimmte Constanten übrig.

In gewissen Fällen wird es nöthig sein, über die Constanten A so zu verfügen, dass der in φ vorkommende Klammerausdruck sich der Null nähert, falls $z=\zeta+i\zeta'$ sich von der reellen Axe ins Unendliche entfernt. Es werde also angenommen, dass der Klammerausdruck die beiden Bedingungen erfüllt:

$$\lim_{\zeta'=\pm\infty}\left[A_0+A_1\operatorname{cotg}\pi(z-c_1)+\cdots+A_\lambda\operatorname{cotg}\pi(z-c_\lambda)\right]=0\,. \tag{16}$$

Mit Benutzung der Formeln $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty}\operatorname{cotg}\pi(z-c)=\mp i$ folgt aus (16): $A_0-iA_1-\cdots-iA_\lambda=0$ und $A_0+iA_1+\cdots+iA_\lambda=0$; d. h. $A_0=0$ und $A_\lambda=-A_1-\cdots-A_{\lambda-1}$. Setzt man diese Werthe in den Ausdruck $\varphi(z,\lambda)$ ein, so nimmt derselbe nach einer einfachen Rechnung die Form an:

$$\sin\pi(z-c_1)\cdots\sin\pi(z-c_{\lambda-1})\left[\frac{B_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\cdots+\frac{B_{\lambda-1}}{\sin\pi(z-c_{\lambda-1})}\right].$$

Vermöge der Gleichung (2) lässt sich dieser Ausdruck weiter auf die Form $\varphi(z, \lambda-2)$ bringen. *Wenn also der in $\varphi(z, \lambda)$ als Factor enthaltene Klammerausdruck die beiden Bedingungen* (16) *erfüllt, so lässt sich $\varphi(z, \lambda)$ auf die Form $\varphi(z, \lambda-2)$ bringen, wo noch $\lambda-1$ unbestimmte Constanten übrig bleiben.* Zugleich ergiebt sich, dass die sämmtlichen Ausdrücke $\varphi(z, \lambda-2)$, $\varphi(z, \lambda-4), \cdots$ als specielle Fälle in dem allgemeineren Ausdrucke $\varphi(z, \lambda)$ enthalten sind, aus dem sie durch Specialisirung der Constanten entstehen.

4.

Nach den vorbereitenden Erörterungen der beiden letzten §§ wollen wir die am Schluss des § 1 bezeichnete Untersuchung aufnehmen, und zwar sollen in diesem und in dem nächstfolgenden § die beiden Ausdrücke (8) für unendlich grosse, einem beliebigen, zur imaginären Axe parallelen Streifen angehörige Werthe von $z = \zeta + i\zeta'$ erörtert werden.

In diesem § erörtern wir den *letzteren* Ausdruck (8), d. h. den Ausdruck $\mathfrak{G}(z)\varphi(z, p-1)$. Weil der darin als Factor enthaltene Klammerausdruck mit wachsendem $|\zeta'|$ endlich bleibt, so betrachte man den anderen, diesen Ausdruck multiplicirenden Factor von $\mathfrak{G}(z)\varphi(z, p-1)$, d. h. den Ausdruck $\mathfrak{G}(z) \sin\pi(z-c_1) \cdots \sin\pi(z-c_{p-1})$, dessen Verhalten für unendlich grosse, einem beliebigen Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ angehörige Werthe von z die Gleichung (14) angiebt, wenn darin $\lambda = p-1$ angenommen wird. Vermöge der Bedingung $p > \frac{m+n}{2} > p-1$ bekommt die Differenz $\frac{m+n}{2} - \lambda = \frac{m+n}{2} - (p-1)$ den Werth 1 oder den Werth $\frac{1}{2}$, je nachdem $m+n$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die rechte Seite von (14) enthält im ersteren Falle den Factor $e^{-\pi|\zeta'|}$, im letzteren Falle den Factor $e^{-\frac{\pi}{2}|\zeta'|}$, woraus sich ergiebt, dass $\mathfrak{G}(z)\varphi(z, p-1)$ in beiden Fällen sogar die Eigenschaft besitzt, dass $z^k \mathfrak{G}(z)\varphi(z, p-1)$, wie gross man auch k annehmen möge, mit wachsendem $|\zeta'|$ gleichmässig gegen die Null convergirt, wofern ζ auf ein beliebiges, aber endliches Intervall beschränkt wird. — In jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen, wo $\mathfrak{G}(z)\varphi(z, p-1)$ sich überall regulär verhält, kann somit der absolute Betrag desselben nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen.

5.

In diesem § erörtern wir den *ersteren* der Ausdrücke (8), d. h. den Ausdruck $\mathfrak{G}(z)\varphi(z, p)$. Auch jetzt sehen wir vorläufig von dem darin enthaltenen Klammerausdruck ab und betrachten den diesem vorangehenden Factor

$\mathbf{G}(z)\sin\pi(z-c_1)\cdots\sin\pi(z-c_p)$, dessen Verhalten für unendlich grosse, einem beliebigen Streifen $(\alpha\leqq\zeta\leqq\beta)$ angehörige Werthe von z die Gleichung (14) angiebt, wenn darin $\lambda=p$ gesetzt wird. Vermöge der Bedingung $p\geqq\frac{m+n}{2}>p-1$ bekommt die Differenz $\frac{m+n}{2}-\lambda=\frac{m+n}{2}-p$ den Werth 0 oder den Werth $-\frac{1}{2}$, je nachdem $m+n$ gerade oder ungerade ist. Die auf der rechten Seite von (14) stehende Exponentialfunction reducirt sich im *ersteren* Falle auf 1, im *letzteren* wird sie gleich $e^{\frac{\pi}{2}|\zeta'|}$.

Da der Klammerausdruck mit wachsendem $|\zeta'|$ dem absoluten Betrage nach nicht ohne Ende wächst, so kann offenbar im ersteren Falle, d. h. falls $m+n$ *gerade* ist, eine Zahl k stets so angenommen werden, dass $z^{-k}\mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p)$ mit wachsendem $|\zeta'|$ sich der Grenze Null nähert, wofern ζ auf ein beliebiges, aber endliches Intervall beschränkt wird.

Im letzteren Falle, d. h. wenn $m+n$ *ungerade* ist, wird dies aber bei unbestimmten Werthen der Constanten A des Klammerausdrucks nicht möglich sein. Denn da der absolute Betrag des oben besprochenen vorangehenden Ausdrucks den Factor $e^{\frac{\pi}{2}|\zeta'|}$ enthält, so wird im Gegentheil $|z^{-k}\mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p)|$, wie gross auch k sei, bei unbestimmten Werthen von $A_0,\cdots,A_p$ mit wachsendem $|\zeta'|$ unendlich gross, wofern ζ auf ein endliches Intervall beschränkt ist. Wünschen wir also zu solchen Functionen zu gelangen, welche bei passender Bestimmung von k die Bedingung $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty} z^{-k}F(z)=0$, $(\alpha\leqq\zeta\leqq\beta)$ erfüllen, so ist es im gegenwärtigen Falle jedenfalls nothwendig, die Constanten A solchen Einschränkungen zu unterwerfen, dass der Klammerausdruck sowohl für $\zeta'=+\infty$ als auch für $\zeta'=-\infty$ verschwindet. Dadurch geht aber nach § 3 $\varphi(z,p)$ in $\varphi(z,p-2)$ über, und somit $\mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p)$ in $\mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p-2)$ über. Die $p-1$ unbestimmten Constanten des letzten Ausdrucks brauchen keinen weiteren Einschränkungen unterworfen zu werden. Derselbe besitzt ohnedies nicht nur die gewünschte, sondern sogar die bemerkenswerthere Eigenschaft, dass $z^k\mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p-2)$, wie gross auch k sei, mit wachsendem $|\zeta'|$ gleichmässig gegen die Null convergirt, falls ζ auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird. Denn da der darin vorkommende Klammerausdruck mit wachsendem $|\zeta'|$ nicht ohne Ende wachsen kann, so genügt es, den diesem vorangehenden Ausdruck $\mathbf{G}(z)\sin\pi(z-c_1)\cdots\sin\pi(z-c_{p-2})$ zu betrachten, indem man die Gleichung (14) benutzt, wobei $\lambda=p-2$ zu setzen ist. Die auf der rechten Seite stehende Exponentialfunction wird in der That gleich $e^{-2\pi|\zeta'|}$ oder $e^{-\frac{3\pi}{2}|\zeta'|}$, je nachdem $m+n$ gerade oder ungerade ist; woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt. (Im vorliegenden Falle war nach Voraussetzung $m+n$ eine ungerade Zahl).

6.

In den zwei letzten §§ ist der erste Theil der am Schluss des § 1 bezeichneten Untersuchung durchgeführt, indem sämmtliche in (8) enthaltene Functionen nunmehr ermittelt worden sind, welche in jedem zur imaginären Axe parallelen Streifen ($\alpha \leq \zeta \leq \beta$) bei passender Bestimmung von k die Bedingung $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty} z^{-k} F(z) = 0$ erfüllen. Diese Eigenschaft besitzen alle in dem letzteren und, falls $m+n$ eine gerade Zahl ist, auch alle in dem ersteren Ausdrucke (8) enthaltenen Functionen. Ist aber $m+n$ eine ungerade Zahl, so müssen die Constanten A des ersteren Ausdrucks, damit er die fragliche Eigenschaft bekomme, solchen Einschränkungen (16) unterworfen werden, dass er sich in den specielleren Ausdruck $\mathfrak{G}(z)\,\varphi(z, p-2)$ verwandelt. Diese Ergebnisse wollen wir so zusammenstellen:

$$m + n = 2k: \qquad\qquad m + n = 2k + 1:$$

$$(17) \qquad \begin{cases} \mathfrak{G}(z)\,\varphi(z, p), \\ \mathfrak{G}(z)\,\varphi(z, p-1). \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{G}(z)\,\varphi(z, p-2), \\ \mathfrak{G}(z)\,\varphi(z, p-1). \end{cases}$$

Der zweite Theil der am Schluss des § 1 besprochenen Untersuchung würde nun darin bestehen, dass man unter den so bestimmten Functionen diejenigen ermittelte, für die es überhaupt einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite *Eins* giebt, wo sie sich überall regulär verhalten. Alsdann wäre die Aufgabe vollständig gelöst, welche zu den obigen Ausdrücken geführt hat.

Nimmt man einen bestimmten Streifen ($\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1$) in Betracht und fragt nach solchen in einem Ausdrucke der Form $\mathfrak{G}(z)\,\varphi(z, \lambda)$ enthaltenen Functionen, welche in diesem Streifen sich überall regulär verhalten, so hat man vor Allem zu beachten, welche Unendlichkeitsstellen der Function $\mathfrak{G}(z)$ in dem fraglichen Streifen liegen, wenn solche darin überhaupt enthalten sind. Denn an jeder solchen Stelle wird $\mathfrak{G}(z)\,\varphi(z, \lambda)$ unendlich, wenn nicht über die Constanten des trigonometrischen Ausdrucks φ so verfügt wird, dass derselbe an der betreffenden Stelle von wenigstens ebenso hoher Ordnung verschwindet, wie $\mathfrak{G}(z)$ unendlich wird. Die Unendlichkeitsstellen von $\mathfrak{G}(z)$ ordnen sich zu $m+n$ arithmetischen Reihen, von denen die m Reihen

$$(18) \qquad \varrho_\mu, \varrho_\mu - 1, \cdots, \varrho_\mu - \nu, \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots m)$$

mit der Differenz -1, und die n Reihen

$$(19) \qquad \sigma_\mu + 1, \sigma_\mu + 2, \cdots, \sigma_\mu + \nu, \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots n)$$

mit der Differenz $+1$ ins Unendliche fortschreiten. Haben zwei oder mehrere dieser Reihen ein gemeinsames Glied, so ist dasselbe für $\mathfrak{G}(z)$ eine Unendlichkeitsstelle zweiter oder höherer Ordnung. Da $\varphi(z, \lambda)$ den Charakter einer ganzen Function hat, so sind in den Reihen (18) und (19) die sämmtlichen Unendlichkeitsstellen von $\mathfrak{G}(z)\,\varphi(z, \lambda)$ enthalten.

Ist nun α kleiner als der reelle Theil von ϱ_μ, so enthält der Parallelstreifen ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$) stets ein Glied der Reihe (18). Ist α grösser als der reelle Theil von σ_μ, so enthält der Streifen stets ein Glied der Reihe (19), d. h. in jedem dieser Fälle eine Unendlichheitsstelle von $\mathfrak{G}(z)$. Nur ausnahmsweise wird es sich also ereignen, dass unsere Ausdrücke (17) in dem in Betracht gezogenen Streifen schon bei unbestimmten Werthen der Constanten A sich überall regulär verhalten. Damit dieser bemerkenswerthe Fall überhaupt eintreten könne, müssen vor Allem die Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ die Bedingung erfüllen, dass die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ sämmtlich algebraisch kleiner sind, als die entsprechenden Theile von $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$. Nimmt man alsdann die reelle Zahl α so an, dass sie einerseits algebraisch grösser ist als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ und andererseits kleiner als die entsprechenden Theile von $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$, was ja auf mannigfaltige Weise geschehen kann, so liegen die Unendlichkeitsstellen von $\mathfrak{G}(z)$ ausserhalb des Streifens ($\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$), und zwar liegen die Stellen (19) in positiver, die Stellen (18) in negativer Richtung von demselben. Unsere Ausdrücke (17) verhalten sich mithin regulär in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Inneren und auf der Begrenzung des genannten Streifens. — Wegen seiner Wichtigkeit wird dieser Fall in dem nachstehenden Satze hervorgehoben und in den folgenden zwei §§ unter besonderen Voraussetzungen noch weiter besprochen.

Stellen wir die in den §§ 4 und 5 erhaltenen und am Anfang dieses § zusammengestellten Resultate mit dem soeben Gesagten zusammen, so hat sich Folgendes ergeben:

Nimmt man von einer monogenen Function an:

I. dass sie eine Functionalgleichung

$$F(z+1) = \pm \frac{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_m)}{(z-\sigma_1)\cdots(z-\sigma_n)} F(z) = \pm R(z)\, F(z)$$

befriedigt, deren Constanten ϱ und σ die Bedingung erfüllen, dass die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ algebraisch kleiner, die reellen Theile von $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ aber grösser sind als eine gewisse reelle Zahl α;

II. dass sie sich in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung des Parallelstreifens ($\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1$) regulär verhält, wobei α die unter I erwähnte Zahl bezeichnet;

III. dass sie, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, dem absoluten Betrage nach nicht über jedes Mass wachsen kann, wofern z auf den unter II erwähnten Streifen beschränkt wird;

so kann sie bei passender Bestimmung der in φ enthaltenen Constanten A, falls $m+n$ eine gerade Zahl ist, durch einen der Ausdrücke

$$\mathfrak{G}(z)\,\varphi(z,p)\,, \quad \mathfrak{G}(z)\,\varphi(z,p-1)\,, \tag{20}$$

falls $m+n$ aber eine ungerade Zahl ist, durch einen der Ausdrücke

$$\mathfrak{G}(z)\,\varphi(z,p-2)\,, \quad \mathfrak{G}(z)\,\varphi(z,p-1) \tag{21}$$

dargestellt werden, und zwar durch den jedesmaligen ersteren oder letzteren Ausdruck, je nachdem sie die Gleichung $F(z+1) = (-1)^{n+p} R(z) F(z)$ oder $F(z+1) = (-1)^{n+p-1} R(z) F(z)$ befriedigt; hierbei dürfen unter den in φ enthaltenen Grössen $c_1, c_2, \cdots$ keine zwei sich finden, deren Differenz gleich einer ganzen Zahl wäre. Umgekehrt besitzen auch die so definirten Ausdrücke die unter I, II, III angegebenen Eigenschaften, wenn die hinsichtlich der Constanten ϱ und σ gemachte Voraussetzung erfüllt ist.

Es ist zu bemerken, dass eine Function $\mathfrak{G}(z)$, deren Constanten ϱ und σ die obige Bedingung nicht erfüllen, stets durch Multiplication mit einer passenden ganzen rationalen Function in eine Function verwandelt werden kann, deren entsprechende Constanten die betreffende Bedingung erfüllen. Multiplicirt man nämlich mit $z - \varrho_1$, so geht der Factor $\Gamma(z-\varrho_1)$ über in $\Gamma(z-\varrho_1+1)$; also wird der Parameter ϱ_1 um Eins kleiner. Multiplicirt man mit $1+\sigma_1 - z$, so geht der Factor $\Gamma(1+\sigma_1-z)$ über in $\Gamma(2+\sigma_1-z)$; mithin wird der Parameter σ_1 um Eins grösser. Hieraus geht die Richtigkeit der Behauptung leicht hervor.

7.

Der Satz des vorigen § gestaltet sich noch einfacher, wenn man die unter III angegebene Forderung steigert.

Nach den §§ 4 und 5 besitzen die beiden Ausdrücke (21), sie mögen $F(z)$ heissen, nicht nur die unter III angegebene Eigenschaft, sondern sogar die bemerkenswerthere, dass $z^k F(z)$, wie gross auch k sei, mit wachsendem $|\zeta'|$ sich der Null nähert, wenn ζ auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird. Das Verhalten des ersteren Ausdrucks (20) ist aber bei unbestimmten

Werthen von $A_0, \cdots, A_p$ ein ganz anderes. Nach den §§ 5 und 2 kann der absolute Betrag desselben, weil $m+n$ gerade ist, auf die Form gebracht werden

$$(22) \qquad | z^{\varkappa+(m-n)(\zeta-\frac{1}{2})} | \cdot | A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi (z-c_1) + \cdots | \cdot \chi(\zeta, \zeta'),$$

wo $\varkappa = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n - \varrho_1 - \cdots - \varrho_m$ ist und $\chi(\zeta, \zeta')$ denselben Sinn hat wie in der Gleichung (14). Bei unbestimmten Werthen von $A_0, \cdots, A_p$ hängt es also von dem reellen Theile des Exponenten $\varkappa + (m-n)(\zeta - \frac{1}{2})$ ab, wie sich der erstere Ausdruck (20) für unendliche grosse, einem gewissen, zur imaginären Axe parallelen Streifen angehörige Werthe von z verhält. Jetzt wollen wir z auf den im vorangehenden Satze erwähnten Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ oder noch zweckmässiger auf den breiteren Streifen $(\alpha - \varepsilon \leq \zeta \leq \alpha + 1 + \varepsilon)$ beschränken, wobei ε positiv und so klein anzunehmen ist, dass $\alpha - \varepsilon$ algebraisch grösser ist als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ und $\alpha + \varepsilon$ algebraisch kleiner als die entsprechenden Theile von $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$; was ja vermöge der über α geltenden Voraussetzung möglich ist.

Aus den Ungleichheiten $\zeta \geq \alpha - \varepsilon > \varrho_\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots, m)$, wo das Ungleichheitszeichen sich auf die reellen Theile der betreffenden Grössen bezieht, folgt $m\zeta > \varrho_1 + \cdots + \varrho_m$ für $\zeta \geq \alpha - \varepsilon$, und es ist somit

$$(23) \qquad m(\zeta - \tfrac{1}{2}) > \varrho_1 + \cdots + \varrho_m \text{ für } \zeta \geq \alpha + \tfrac{1}{2} - \varepsilon.$$

Aus den analogen Ungleichheiten $\zeta \leq \alpha + 1 + \varepsilon < \sigma_\mu + 1$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ folgt $n(\zeta - 1) < \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$ für $\zeta \leq \alpha + 1 + \varepsilon$, und es ist somit

$$(24) \qquad n(\zeta - \tfrac{1}{2}) < \sigma_1 + \cdots + \sigma_n \text{ für } \zeta \leq \alpha + \tfrac{1}{2} + \varepsilon$$

Nun ist offenbar das von $\zeta = \alpha + \frac{1}{2} - \varepsilon$ bis $\zeta = \alpha + \frac{1}{2} + \varepsilon$ reichende Intervall ein gemeinsamer Gültigkeitsbereich für die beiden Ungleichheiten (23) und (24), aus denen also folgt

$$(25) \qquad \varkappa + (m-n)(\zeta - \tfrac{1}{2}) > 0 \text{ für } \alpha + \tfrac{1}{2} - \varepsilon \leq \zeta \leq \alpha + \tfrac{1}{2} + \varepsilon.$$

In dem durch $(\alpha + \frac{1}{2} - \varepsilon \leq \zeta \leq \alpha + \frac{1}{2} + \varepsilon)$ definirten Parallelstreifen wird also (22) vermöge der Ungleichheit (25) bei unbestimmten Werthen von $A_0, \cdots, A_p$ mit wachsendem $|z|$ unendlich gross. Da dieser Streifen den Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ vollständig oder wenigstens theilweise deckt, je nachdem $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ oder $< \frac{1}{2}$ ist, so folgt in jedem Falle, dass der absolute Betrag des ersteren Ausdrucks (20) bei unbestimmten Werthen von $A_0, \cdots, A_p$ über jedes Mass wachsen kann, falls sich z auf passende Weise in dem Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ ins Unendliche ent-

fernt. Wünschen wir also, dass der absolute Betrag des betreffenden Ausdrucks in dem genannten Streifen unter einer endlichen Grenze bleiben soll, so ist es jedenfalls nothwendig, die Constanten A solchen Einschränkungen zu unterwerfen, dass der Klammerausdruck die beiden Bedingungen (16) erfüllt. Alsdann geht aber der erstere Ausdruck (20), wie schon in § 5 gezeigt worden, in den ersteren Ausdruck (21) über.

Wenn also die im vorangehenden Satze unter III angegebene Forderung dahin gesteigert wird, dass die betreffende Function, auch wenn man sie nicht mit einer Potenz multiplicirt, die fragliche Eigenschaft besitzen soll, so geht der Satz in den folgenden über:

Nimmt man von einer monogenen Function an;

I. dass sie eine Functionalgleichung

$$F(z+1) = \pm \frac{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_m)}{(z-\sigma_1)\cdots(z-\sigma_n)} F(z) = \pm R(z)\, F(z)$$

befriedigt, deren Constanten ϱ *und* σ *die Bedingung erfüllen, dass die reellen Theile von* $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ *algebraisch kleiner, die reellen Theile von* $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ *aber grösser sind als eine gewisse reelle Zahl* α;

II. dass sie sich in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung des Parallelstreifens $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ *regulär verhält, wobei* α *die unter I erwähnte Zahl bezeichnet;*

III. dass sie dem absoluten Betrage nach nicht über jedes Mass wachsen kann, wofern z *auf den unter II erwähnten Streifen beschränkt wird;*

so kann sie bei passender Bestimmung der Constanten A *durch den ersteren oder letzteren der Ausdrücke*

$$(26) \qquad \begin{cases} \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z, p-2) \\ \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z, p-1) \end{cases}$$

dargestellt werden, je nachdem sie die Gleichung $F(z) = (-1)^{n+p} R(z)\, F(z)$ *oder* $F(z+1) = (-1)^{n+p-1} R(z)\, F(z)$ *befriedigt; wobei unter den in* φ *vorkommenden Grössen* $c_1, c_2, \cdots$ *keine zwei sich finden dürfen, deren Differenz eine ganze Zahl wäre. Umgekehrt besitzen auch die Ausdrücke* (26) *alle obigen Eigenschaften, wenn die über die Constanten* ϱ *und* σ *gemachte Voraussetzung erfüllt ist.*

Nach den Erörterungen der §§ 4 und 5 besitzen die beiden Ausdrücke (26), wo p durch die Ungleichheiten (7), $p \geqq \frac{m+n}{2} > p-1$, definirt ist, sogar noch die Eigenschaft, dass sie, mit einer beliebig hohen Potenz von $z = \zeta + i\zeta'$ multiplicirt, mit wachsendem $|\zeta'|$ gleichmässig gegen die Null convergiren, wofern ζ auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird:

(27) $$\lim_{\zeta = \pm\infty} z^k F(z) = 0, \quad (\alpha \leqq \zeta \leqq \beta).$$

8.

Zu dem bemerkenswerthesten Falle des obigen Satzes kommt man durch die Annahme, dass die Zahlen m und n einander gleich sind. Da die durch den so entstehenden Satz charakterisirten Functionen für die hypergeometrischen Differentialgleichungen von besonderer Wichtigkeit sind, so mag der betreffende Satz hier umständlich ausgesprochen werden.

Nimmt man von einer monogenen Function an:

I. dass sie eine Functionalgleichung

$$F(z+1) = \pm \frac{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_n)}{(z-\sigma_1)\cdots(z-\sigma_n)} F(z) = \pm R(z) F(z)$$

befriedigt, deren Constanten ϱ *und* σ *die Bedingung erfüllen, dass die reellen Theile von* $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ *algebraisch kleiner, die reellen Theile von* $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ *aber grösser sind als eine gewisse reelle Zahl* α*;*

II. dass sie sich in der Umgebung jeder endlichen Stelle im Innern und auf der Begrenzung des Parallelstreifens $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ *regulär verhält, wobei* α *die unter I erwähnte Zahl bezeichnet;*

III. dass sie dem absoluten Betrage nach nicht über jedes Mass wachsen kann, wofern z *auf den unter II erwähnten Streifen beschränkt wird;*

so kann sie durch den ersteren oder letzteren der Ausdrücke

(28) $$\begin{cases} \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_n)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z, n-2) \\ \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_n)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z, n-1) \end{cases}$$

dargestellt werden, je nachdem sie die Gleichung $F(z+1) = R(z)\,F(z)$ *oder* $F(z+1) = -R(z)\,F(z)$ *befriedigt; wobei unter den in* φ *vorkommenden Grössen* $c_1, c_2, \cdots$ *keine zwei sich finden dürfen, deren Differenz eine ganze Zahl wäre. Umgekehrt besitzen auch die Ausdrücke* (28) *alle obigen Eigenschaften, wenn die hinsichtlich der Constanten* ϱ *und* σ *gemachte Voraussetzung erfüllt ist.*

Natürlich besitzen auch die Ausdrücke (28) die durch (27) angegebene Eigenschaft. In dem ersteren dieser Ausdrücke kommen $n-1$, im letzteren n unbestimmte Constanten A vor.

9.

Jetzt kehren wir wieder zu den am Anfang des § 6 zusammengestellten allgemeinen Ausdrücken

$$(29)\qquad \begin{array}{ll} m+n=2k: & m+n=2k+1: \\ \begin{cases} \mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p), \\ \mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p-1). \end{cases} & \begin{cases} \mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p-2), \\ \mathbf{G}(z)\,\varphi(z,p-1). \end{cases} \end{array}$$

zurück, deren Constanten $\varrho_1, \cdots, \varrho_m, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ also keinen Bedingungen unterliegen. Wir nehmen die Frage wieder auf, ob es dennoch nicht; wenigstens für gewisse, unter den durch diese Ausdrücke dargestellten Functionen, einen Parallelstreifen von der Breite *Eins* giebt, wo sie sich überall regulär verhalten und somit auch alle die Eigenschaften besitzen, welche in der an der Spitze dieses Abschnittes stehenden Aufgabe verlangt werden.

Die Beantwortung dieser Frage lässt sich mit Benutzung des in § 3 auch für negative Werthe von λ erklärten Zeichens $\varphi(z, \lambda)$ in kurzer und allgemeingültiger Form geben.

Nehmen wir einen gewissen Parallelstreifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ in Betracht, so wird derselbe, wie in § 6 gezeigt wurde, im Allgemeinen eine oder mehrere der Unendlichkeitsstellen

$$(30)\qquad \varrho_\nu, \varrho_\nu - 1, \cdots, \varrho_\nu - k, \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m)$$

$$(31)\qquad \sigma_\nu + 1, \sigma_\nu + 2, \cdots, \sigma_\nu + k, \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

von $\mathbf{G}(z)$ enthalten. Soll sich dennoch ein Ausdruck der Form $\mathbf{G}(z)\,\varphi(z, \lambda)$ in dem fraglichen Streifen überall regulär verhalten, so muss über die Constanten des trigonometrischen Factors φ so verfügt werden, dass derselbe an jeder der im Streifen enthaltenen Unendlichkeitsstellen von wenigstens ebenso hoher Ordnung verschwindet, wie $\mathbf{G}(z)$ unendlich wird.

Es seien nun $a_1, \cdots, a_\mu$ die sämmtlichen, in dem Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ liegenden Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{G}(z)$, und es werde jede solche Stelle in die Reihe $a_1, \cdots, a_\mu$ ebenso oft aufgenommen, als ihre Ordnungszahl angiebt. Soll sich nun $\mathbf{G}(z)\,\varphi(z, \lambda)$ in dem Streifen überall regulär verhalten, so ist es nach dem soeben Gesagten in Verbindung mit einem in § 3 bewiesenen Satze nothwendig und hinreichend, über die Constanten des Ausdrucks $\varphi(z, \lambda)$ so zu verfügen, dass derselbe in

$$\varphi(z, \lambda) = \sin \pi (z - a_1) \cdots \sin \pi (z - a_\mu)\, \varphi(z, \lambda - \mu)$$

übergeht, was nach demselben § auch als unbedingt möglich zu betrachten ist, wenn man die daselbst gegebene erweiterte Definition von $\varphi(z, \lambda)$ acceptirt. Hieraus ergiebt sich nun, dass alle in den Ausdrücken (29) enthaltenen Functionen, welche in dem in Betracht genommenen Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ sich überall regulär verhalten, folgenderweise zusammengestellt werden können:

$m + n = 2k$:

$$(32)\quad \begin{cases} \mathbf{G}(z)\,\varphi(z, p-\mu)\sin\pi(z-a_1)\cdots\sin\pi(z-a_\mu), \\ \mathbf{G}(z)\,\varphi(z, p-\mu-1)\sin\pi(z-a_1)\cdots\sin\pi(z-a_\mu). \end{cases}$$

$m + n = 2k + 1$:

$$(33)\quad \begin{cases} \mathbf{G}(z)\,\varphi(z, p-\mu-2)\sin\pi(z-a_1)\cdots\sin\pi(z-a_\mu), \\ \mathbf{G}(z)\,\varphi(z, p-\mu-1)\sin\pi(z-a_1)\cdots\sin\pi(z-a_\mu). \end{cases}$$

Nach der in § 3 erweiterten Definition von $\varphi(z, \lambda)$ bezeichnet φ für ein negatives λ die *Null.* Das Auftreten eines φ mit negativem Index in irgend einem der obigen Ausdrücke hat somit den Sinn, dass die entsprechenden Functionen alle identisch gleich Null sind, oder dass, *von der Null abgesehen*, überhaupt keine monogene Function mit den verlangten Eigenschaften existirt.

Die Aufgabe, welche an der Spitze dieses Abschnittes steht, kann hiermit als in allgemeinen Zügen gelöst betrachtet werden. Denn nach dem am Anfang des § 6 Dargelegten sind in den Ausdrücken (29) sämmtliche, eine Functionalgleichung $F(z+1) = \pm R(z)\,F(z)$ befriedigende monogene Functionen enthalten, für die es überhaupt einen Parallelstreifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ giebt, wo sie sich überall regulär verhalten und, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, dem absoluten Betrage nach nicht über jede endliche Grenze wachsen können. Soeben ist nun auch eine einfache Methode angegeben worden, durch welche in jedem vorkommenden Falle diese Functionen von anderen, in denselben Ausdrücken enthaltenen abgesondert werden können.

10.

Die Erörterungen des vorigen § wollen wir noch unter besonderen Voraussetzungen über die Lage des in Betracht kommenden Parallelstreifens fortsetzen.

Zu dem Ende bemerken wir Folgendes. Wenn eine beliebige, die Gleichung $F(z+1) = R(z)$ oder $F(z+1) = -R(z)\,F(z)$ befriedigende Function $F(z)$ sich überall in einem gewissen Parallelstreifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ regulär verhält, so verhält sie sich offenbar in derselben Weise in dem angrenzenden und nachfolgenden Streifen $(\alpha + 1 \leq \zeta \leq \alpha + 2)$, wenn *jener* keine von den Grössen $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ enthält. Ist also α grösser als die reellen Theile von $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$, so wird sich $F(z)$ in der ganzen durch die Ungleichheit $\zeta \geq \alpha$ definirten Halbebene regulär verhalten, falls sie sich im Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ regulär verhält. — Ebenso ergiebt sich leicht, dass sich $F(z)$, wenn sie sich überall im

Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ regulär verhält, auch in dem angrenzenden und vorangehenden Streifen $(\alpha - 1 < \zeta \leqq \alpha)$ in derselben Weise verhält, falls in *diesem* keine der Stellen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ liegt. Ist also insbesondere α kleiner als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$, so wird sich $F(z)$ in der ganzen durch die Ungleichheit $\zeta \leqq \alpha + 1$ definirten Halbebene regulär verhalten, falls sie sich im Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ regulär verhält.

Auf Grund dieser Bemerkungen hat es ein besonderes Interesse, die Erörterungen des vorigen § unter solchen Voraussetzungen über die Lage des in Betracht kommenden Parallelstreifens wieder aufzunehmen, dass man dadurch zu Functionen gelangt, die sich sogar in einer Halbebene überall regulär verhalten.

Nehmen wir die Zahl α zunächst grösser an als die reellen Theile der sämmtlichen Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$, so enthält der Parallelstreifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ ein Glied von jeder der Reihen (31), aber kein zu den Reihen (30) gehöriges. Soll sich nun ein Ausdruck $\mathbf{G}(z)\, \varphi(z, \lambda)$ überall in diesem Streifen, und somit auch überall in der durch die Ungleichheit $\zeta > \alpha$ definirten Halbebene regulär verhalten, so ist es vermöge des schon im vorigen § berufenen Satzes des § 3 nothwendig und hinreichend, die unbestimmten Constanten des Ausdrucks φ solchen Einschränkungen zu unterwerfen, dass er in den Ausdruck $\sin \pi (z - \sigma_1) \cdots \sin \pi (z - \sigma_n)\, \varphi(z, \lambda - n)$ übergeht. An Stelle der Ausdrücke (32), (33), die sich im vorigen § ergaben, erhalten wir also in dem gegenwärtigen Falle die mehr speciellen:

$$m + n = 2k:$$

$$\begin{cases} \mathbf{G}(z)\, \varphi(z, p - n) \sin \pi (z - \sigma_1) \cdots \sin \pi (z - \sigma_n), \\ \mathbf{G}(z)\, \varphi(z, p - n - 1) \sin \pi (z - \sigma_1) \cdots \sin \pi (z - \sigma_n). \end{cases}$$

$$m + n = 2k + 1:$$

$$\begin{cases} \mathbf{G}(z)\, \varphi(z, p - n - 2) \sin \pi (z - \sigma_1) \cdots \sin \pi (z - \sigma_n), \\ \mathbf{G}(z)\, \varphi(z. p - n - 1) \sin \pi (z - \sigma_1) \cdots \sin \pi (z - \sigma_n). \end{cases}$$

An die Stelle der durch die Bedingung $p \geqq \frac{m+}{2} > p - 1$ definirten ganzen Zahl p wollen wir eine durch die Bedingung $q \geqq \frac{m-n}{2} > q - 1$ in eindeutiger Weise definirte (positive oder negative) ganze Zahl q einführen. Aus $p \geqq \frac{m+n}{2} > p - 1$ ergiebt sich $p - n \geqq \frac{m-n}{2} > p - n - 1$. Somit ist $q = p - n$. Werden $\sin \pi (z - \sigma_1)$, $\cdots$, $\sin \pi (z - \sigma_n)$ und $\mathbf{G}(z)$ durch die Gammafunction ausgedrückt und statt p die Zahl q in die obigen Ausdrücke eingeführt, so bekommt man die Zusammenstellung:

$m+n=2k$:

(34)
$$\begin{cases} \dfrac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}\varphi(z,q), \\ \dfrac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}\varphi(z,q-1). \end{cases}$$

$$\left(q \geqq \tfrac{m-n}{2} > q-1\right).$$

$m+n=2k+1$:

(35)
$$\begin{cases} \dfrac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}\varphi(z,q-2), \\ \dfrac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}\varphi(z,q-1). \end{cases}$$

Erinnern wir uns des Sinnes und der Eigenschaften der in (29) zusammengestellten Ausdrücke und bedenken wir, vermöge welcher hinzugefügten Bedingungen dieselben in die Ausdrücke (34), (35) übergegangen sind, so haben wir den Satz:

Weiss man von einer monogenen Function:

I. dass sie eine von den Functionalgleichungen befriedigt:

$$F(z+1) = \pm\frac{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_m)}{(z-\sigma_1)\cdots(z-\sigma_n)}F(z) = \pm R(z)F(z);$$

II. dass sie — unter α die im algebraischen Sinne grösste, unter den reellen Theilen von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ zu findende Zahl verstanden — im Innern der durch die Bedingung $\zeta \geqq \alpha$ definirten Halbebene sich überall regulär verhält;

III. dass sie — wofern $z = \zeta + i\zeta'$ auf einen beliebigen, innerhalb der genannten Halbebene gelegenen, zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite beschränkt wird — nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z dem absoluten Betrage nach nicht über jede endliche Grenze wachsen kann;

so lässt sie sich, falls $m+n$ und somit auch $m-n$ eine gerade Zahl ist, durch einen der Ausdrücke (34), falls $m+n$ aber ungerade ist, durch einen der Ausdrücke (35) darstellen, und zwar durch den jedesmaligen ersteren oder letzteren, je nachdem sie die Gleichung $F(z+1) = (-1)^q R(z)F(z)$ oder $F(z+1) = (-1)^{q-1}R(z)F(z)$ befriedigt. Umgekehrt besitzen auch die so definirten Ausdrücke (34), (35) die unter I, II, III erwähnten Eigenschaften.

Ist $m < n$, so werden die Indices der Symbole φ stets negativ, was den Sinn hat, dass es, von der Null abgesehen, überhaupt keine Functionen giebt, welche die sämmtlichen Eigenschaften I, II, III besässen.

Ist $m=n$, so sind die Formeln (34) in Betracht zu nehmen. Da $q=0$ ist, so ist $\varphi(z,q)$ eine unbestimmte Constante und $\varphi(z,q-1)\equiv 0$. *Es ist also*

$$(36)\qquad \frac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_n)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}$$

bis auf einen constanten Factor die einzige, die Gleichung

$$F(z+1)=\frac{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_n)}{(z-\sigma_1)\cdots(z-\sigma_n)}F(z)=R(z)\,F(z)$$

befriedigende Function, welche ausserdem die Eigenschaften II und III besitzt; und es giebt, von der Null abgesehen, keine der Gleichung $F(z+1)=-R(z)F(z)$ genügende Function, welche überdies die Eigenschaften II und III besässe. Das Verhalten des Ausdrucks (36) für unendlich grosse, einem zur imaginären Axe parallelen Streifen angehörige Werthe von z wird durch die aus (9) folgende Gleichung angegeben:

$$\frac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_n)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}=z^{\varkappa}(1+\varepsilon),$$

wo $\varkappa=\sigma_1+\cdots+\sigma_n-\varrho_1-\cdots-\varrho_n$ ist und ε eine unendlich kleine Grösse bezeichnet.

Für den Fall, dass $m>n$ ist, wollen wir den Satz im folgenden § noch weiter erörtern.

Fragt man nun auch nach solchen, eine Gleichung $F(z+1)=\pm R(z)F(z)$ befriedigenden Functionen, die sich in einer die unendlich grossen negativen Zahlen enthaltenden Halbebene ebenso verhalten, wie die durch den vorangehenden Satz charakterisirten Functionen in einer die unendlich grossen positiven Zahlen enthaltenden, so erhält man für dieselben offenbar die Ausdrücke:

$m+n=2k$:

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)}{\Gamma(1+\varrho_1-z)\cdots\Gamma(1+\varrho_m-z)}\,\varphi(z,s), \\[2ex] \dfrac{\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)}{\Gamma(1+\varrho_1-z)\cdots\Gamma(1+\varrho_m-z)}\,\varphi(z,s-1). \end{cases}$$

$m+n=2k+1$:

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)}{\Gamma(1+\varrho_1-z)\cdots\Gamma(1+\varrho_m-z)}\,\varphi(z,s-2), \\[2ex] \dfrac{\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)}{\Gamma(1+\varrho_1-z)\cdots\Gamma(1+\varrho_m-z)}\,\varphi(z,s-1). \end{cases}$$

wo die ganze Zahl s durch die Bedingung $s \geqq \frac{n-m}{2} > s-1$ eindeutig definirt ist.

Diese Ausdrücke wollen wir indess keiner besonderen Discussion unterziehen, da sie offenbar durch die Substitution $(-z, z)$ in solche Functionen übergehen, welche durch den früheren Satz schon charakterisirt worden sind.

11.

Wie aus dem Satze des § 6 der Satz des § 7 dadurch hervorging, dass eine von den Voraussetzungen jenes Satzes gesteigert wurde, so gestaltet sich auch der Satz des vorangehenden § einfacher, wenn wir die Voraussetzung III dahin schärfen, dass die betreffende Function — auch wenn man sie nicht mit einer Potenz multiplicirt — dem absoluten Betrage nach unter einer endlichen Grenze bleiben soll, wofern z auf einen beliebigen, in der unter II erwähnten Halbebene befindlichen, zur imaginären Axe parallelen Streifen beschränkt wird.

Aus den schon am Anfang des § 6 zusammengestellten Ausdrücken (17) sind die Ausdrücke (34), (35) dadurch hervorgegangen, dass die unbestimmten Constanten jener Ausdrücke gewissen Einschränkungen unterworfen worden sind. Von den Ausdrücken (34), (35) gilt daher Alles, was am Anfang des § 7 über die Ausdrücke (17) gesagt wurde. Somit haben, falls $m+n$ ungerade ist, die beiden Ausdrücke (35) und, falls $m+n$ gerade ist, der letztere von (34) die Eigenschaft, dass sie, sogar nach Multiplication mit einer beliebig hohen Potenz von z, sich der Null nähern, wofern z in einem zur imaginären Axe parallelen Streifen endlicher Breite sich ins Unendliche entfernt. Der absolute Betrag des ersteren Ausdrucks (34) lässt sich aber für solche Werthe von z auf die Form (22) bringen, woraus sich ergiebt, dass derselbe, wenn $m>n$ ist, für hinreichend grosse Werthe von ζ und bei unbestimmten Werthen von $A_0, \cdots, A_q$ mit wachsendem $|\zeta'|$ unendlich wird. Wünschen wir also, dass der absolute Betrag des betreffenden Ausdrucks in *jedem* Parallelstreifen, der die am Anfang dieses § angegebene Lage hat, unter einer endlichen Grenze bleiben soll, so müssen die unbestimmten Constanten von $\varphi(z, q)$ solchen Einschränkungen unterworfen werden, dass $\varphi(z, q)$ in $\varphi(z, q-2)$ übergeht, was sich auch leicht als eine hinreichende Bedingung erweist. Hierdurch geht also der Satz des vorigen § in den folgenden über:

Weiss man von einer monogenen Function:

I. dass sie eine von den Functionalgleichungen befriedigt:

$$F(z+1) = \pm \frac{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_m)}{(z-\sigma_1)\cdots(z-\sigma_n)} F(z) = \pm R(z)\, F(z); \qquad (m>n),$$

II. dass sie — unter α die im algebraischen Sinne grösste unter den reellen Theilen von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ zu findende Zahl verstanden — im Innern der durch die Bedingung $\zeta > \alpha$ definirten Halbebene sich überall regulär verhält.

III. dass sie dem absoluten Betrage nach nicht über jede endliche Grenze wachsen kann, wofern z auf einen beliebigen, innerhalb der genannten Halbebene gelegenen, zur imaginären Axe parallelen Streifen von endlicher Breite beschränkt wird;

so lässt sie sich durch den ersteren oder letzteren der Ausdrücke

$$(39)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}\,\varphi(z, q-2) \\ \dfrac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}\,\varphi(z, q-1) \end{cases} \qquad \left(q \geqq \frac{m-n}{2} > q-1\right)$$

darstellen, je nachdem sie die Gleichung $F(z+1) = (-1)^q R(z) F(z)$ oder $F(z+1)(-1)^{q-1} R(z) F(z)$ befriedigt. Umgekehrt besitzen auch die obigen Ausdrücke die unter I, II, III erwähnten Eigenschaften.

Die obigen Ausdrücke besitzen aber, wie aus dem Obigen nicht schwer zu finden ist, noch die Eigenschaft, dass sie, mit einer beliebig hohen Potenz von $z = \zeta + i\zeta'$ multiplicirt, mit wachsendem $|\zeta'|$ gleichmässig gegen die Null convergiren, wofern ζ auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt ist:

$$\lim_{\zeta'=\pm\infty} z^k F(z) = 0, \quad (\alpha \leqq \zeta \leqq \beta).$$

Wenn die Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$, welche in diesem Satze keinen Beschränkungen unterliegen, in besonderen Fällen die Bedingung erfüllen, dass die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ algebraisch kleiner, die reellen Theile von $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ aber grösser sind, als eine gewisse reelle Zahl α, so sind offenbar die durch den obigen Satz charakterisirten Functionen unter denen enthalten, die durch den Satz des § 7 schon charakterisirt worden sind.

Ähnliches gilt von dem Ausdrucke (36) mit Rücksicht auf den Satz des § 6.

II.

Über bestimmte Integrale, die längs geraden Linien über Gammafunctionen ausgedehnt sind.

12.

Im vorhergehenden Abschnitte haben wir eine Menge die Gleichungen $F(z+1) = \pm R(z) F(z)$ befriedigende Functionen kennen gelernt, für die es ausserdem einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite *Eins* giebt, wo sie sich überall regulär verhalten und, nach Multiplication mit einer passenden Potenz von z, dem absoluten Betrage nach nicht über jede endliche Grenze wachsen können. Unter diesen Functionen sind am bemerkenswerthesten diejenigen, welche die letztgenannte Eigenschaft besitzen, ohne dass sie mit einer solchen Potenz multiplicirt zu werden brauchen. Hierzu gehören zunächst alle durch die Sätze der §§ 7, 8 und 11 charakterisirten Functionen. Bei Gelegenheit jedes dieser Sätze wurde hervorgehoben, dass die betreffenden Functionen überdies noch die Eigenschaft besitzen, dass sie, sogar nach Multiplication mit einer beliebig hohen Potenz von $z = \zeta + i\zeta'$, mit wachsendem $|\zeta'|$ *gleichmässig* gegen die Null convergiren, wofern ζ auf ein beliebiges endliches Intervall beschränkt wird; was so bezeichnet werden soll:

$$(40) \qquad \lim_{\zeta' = \pm\infty} z^k F(z) = 0, \quad (\alpha \leq \zeta \leq \beta).$$

Durch die genannten Sätze sind aber alle Functionen des vorigen Abschnittes noch nicht erschöpft, welche in irgend einem Parallelstreifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ sich überall regulär verhalten und ausserdem die Eigenschaft (40) besitzen Functionen dieser Art sind offenbar auch, falls $m+n$ ungerade ist, die in § 9 vorkommenden allgemeinen Ausdrücke (33). Hierzu gehört ferner, falls $m+n$ gerade ist, der letztere Ausdruck (32) und ebenfalls der erstere für den Fall,

dass $\varphi(z, p-\mu)$ durch Einschränkung der unbestimmten Constanten in $\varphi(z, p-\mu-2)$ übergeführt wird. Ähnliches gilt von den Ausdrücken (34), (35), da sie als specielle Fälle von den resp. Ausdrücken (32), (33) betrachtet werden können. Dass alle erwähnten Ausdrücke in der That die Eigenschaft (40) besitzen, folgt aus dem, was in den §§ 4 und 5 über die Ausdrücke (17) dargestellt worden ist, wovon alle oben genannten Ausdrücke nur specielle Fälle sind.

Von besonderer Wichtigkeit für die Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichungen werden sich nun gerade die oben hervorgehobenen Gammafunctionen erweisen, welche in irgend einem Parallelstreifen $(\alpha \leq \zeta < \alpha + 1)$ sich überall regulär verhalten und überdies noch die durch (40) bezeichnete Eigenschaft besitzen. Wie aus dem oben Gesagten und den citirten §§ zu finden ist, sind sie alle in den allgemeinen Ausdrücken

(41) $\mathbf{G}(z)\,\varphi(z, p-2) = \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z, p-2)$

(42) $\mathbf{G}(z)\,\varphi(z, p-1) = \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z, p-1)$

enthalten, wo die ganze Zahl p die Bedingung $p \geq \frac{m+n}{2} > p-1$ erfüllt und φ durch (6) erklärt ist. Umgekehrt geht aus den §§ 4 und 5 hervor, dass diese Ausdrücke, welche die resp. Gleichungen

$$F(z+1) = (-1)^{n+p} R(z)\,F(z), \quad F(z+1) = (-1)^{n+p-1} R(z)\,F(z)$$

befriedigen, stets auch die Eigenschaft (40) besitzen. Damit es aber noch einen Parallelstreifen von der Breite *Eins* gebe, wo sie sich überall regulär verhalten, ist es *im Allgemeinen* nötig, die unbestimmten Constanten von φ gewissen, im vorigen Abschnitte ausführlich erörterten Einschränkungen zu unterwerfen.

Genauer, als es durch (40) geschieht, kann das Verhalten der Ausdrücke (41), (42) für unendlich grosse, einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen angehörige Werthe von z durch die folgende mit Hülfe der Formel (14) sich ergebende Gleichung charakterisirt werden

(43) $$|\mathbf{G}(z)\,\varphi(z, \lambda)| =$$

$$|z^{\varkappa + (m-n)(\zeta - \frac{1}{2})}| \,.\, e^{-\pi\left(\frac{m+n}{2} - \lambda\right)|\zeta'|} \,.\, |A_0 + A_1 \operatorname{cotg} \pi(z - c_1) + \cdots| \,.\, \chi(\zeta, \zeta'),$$

wo $\lambda = p-2$ oder $\lambda = p-1$ zu setzen ist, je nachdem es sich um den ersteren oder letzteren der Ausdrücke (41), (42) handelt. Wie in der Formel (14), bezeichnet auch hier $\chi(\zeta, \zeta')$ eine positive Variable, welche mit wachsendem $|\zeta'|$ gegen eine endliche, von Null verschiedene und von ζ unabhängige Grenze

gleichmässig convergirt, wofern ζ auf ein beliebiges aber endliches Intervall $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ beschränkt wird. Der Umstand, dass $\lim\limits_{\zeta'=+\infty} \chi(\zeta, \zeta')$ und $\lim\limits_{\zeta'=-\infty} \chi(\zeta, \zeta')$ im Allgemeinen von einander verschieden sind, ist für alle folgenden Untersuchungen ohne Belang. Ist $m+n$ eine *gerade* Zahl, was beispielsweise für $m=n$ der Fall ist, und setzen wir λ successive $=p-2$ und $p-1$, so wird die auf der rechten Seite stehende Exponentialfunction infolge $p \geq \frac{m+n}{2} > p-1$ resp. gleich $e^{-2\pi|\zeta'|}$ und $e^{-\pi|\zeta'|}$. Ist $m+n$ aber eine *ungerade* Zahl, so wird die Exponentialfunction resp. gleich $e^{-\frac{3\pi}{2}|\zeta'|}$ und $e^{-\frac{\pi}{2}|\zeta'|}$.

Bei den folgenden Untersuchungen ist es der Kürze halber angemessen, das Ungleichheitszeichen in einem erweiterten (übrigens nicht neuen) Sinne zu gebrauchen, und zwar in dem Sinne, dass die Ungleichheit $A<B$ nur ausdrücken soll, der reelle Theil von A sei algebraisch kleiner als der entsprechende Theil von B. Ist A eine Constante und w eine Veränderliche, z. B. eine Integrationsvariable, so bedeutet die Ungleichheit $A<w$ oder $w>A$, dass w nur solche Werthe annimmt oder annehmen soll, deren reelle Theile algebraisch grösser sind als der reelle Theil von A.

13.

Es bezeichne jetzt $F(z)$ eine in der Form (41) *oder in der Form* (42) *darstellbare Function, für welche es zugleich einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite Eins $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha+1)$ giebt, wo sie sich überall regulär verhält.*

In diesem Streifen denke man sich nun ein Rechteck mit den Eckpunkten $a \pm i\omega$, $b \pm i\omega$, dessen Seiten also zu den Coordinatenaxen parallel sind. Bezeichnet z eine beliebige Stelle innerhalb des Rechtecks und wird das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(w)}{w-z}\,dw$$

längs der Begrenzung des Rechtecks in positiver Richtung erstreckt, so ist dessen Werth nach dem Satze von Cauchy gleich $F(z)$. Es ist somit, falls $a<b$ ist:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{a+i\omega}^{a-i\omega}\frac{F(w)}{w-z}\,dw+\int\limits_{a-i\omega}^{b-i\omega}\frac{F(w)}{w-z}\,dw+\int\limits_{b-i\omega}^{b+i\omega}\frac{F(w)}{w-z}\,dw+\int\limits_{b+i\omega}^{a+i\omega}\frac{F(w)}{w-z}\,dw\right).$$

Nunmehr stellen wir uns vor, dass ω ohne Ende wächst, wobei die zur reellen Axe parallelen Seiten sich ins Unendliche entfernen. Infolge der durch (40)

ausgedrückten Eigenschaft unserer Function $F(w)$ nähern sich dabei das zweite und vierte Integral, d. h. die längs den zur reellen Axe parallelen Seiten erstreckten Integrale, beide der Grenze Null, während die beiden anderen ebenfalls gegen gewisse endliche Grenzwerthe convergiren. Auf diese Weise wird $F(z)$, nachdem noch die Grenzen des ersten Integrals gegen einander vertauscht worden, dargestellt in der Form

$$(44) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(w)}{z-w}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(w)}{w-z}\,dw\,,$$

$$\alpha \leq a < z < b \leq \alpha + 1\,,$$

wobei das Ungleichheitszeichen in dem erweiterten Sinne gebraucht wird. Im ersten Integrale ist also bei der Integration $z - w > 0$, im zweiten aber $w - z > 0$.

Der Gültigkeitsbereich der Gleichung (44) ist zunächst ein sehr beschränkter. Betrachten wir aber die Integrale

$$(45) \qquad P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(w)}{z-w}\,dw\,, \quad z > a\,,$$

$$(\alpha \leq a < b \leq \alpha + 1)$$

$$(46) \qquad Q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(w)}{w-z}\,dw\,, \quad z < b\,,$$

jedes einzeln für sich, so ergiebt sich, dass das erste Integral in der ganzen durch die Ungleichheit $z > a$ definirten Hälfte der z-Ebene nicht nur einen bestimmten Sinn hat, sondern auch eine gewisse monogene, daselbst regulär sich verhaltende Function von z darstellt. In ähnlicher Weise verhält sich das zweite Integral in der durch die Ungleichheit $z < b$ charakterisirten Halbebene. Die Richtigkeit dieser Behauptungen folgert man in bekannter Weise aus der durch (40) ausgedrückten Eigenschaft von $F(w)$.

Es soll nun gezeigt werden, dass $P(z)$ und $Q(z)$ sehr einfache Functionalgleichungen befriedigen, mit deren Hülfe sie ausserhalb ihrer ursprünglichen Gültigkeitsbereiche analytisch fortgesetzt werden können.

Wir betrachten zunächst das Integral $P(z)$, dessen Gültigkeitsbereich, geometrisch gesprochen, mit der durch die Ungleichheit $z > a$ charakterisirten Hälfte der z-Ebene zusammenfällt. Vorausgesetzt, dass z die Ungleichheit $z > \alpha + 1$ befriedigt, d. h. dass z einen im Gültigkeitsbereiche des Integrals, aber ausserhalb des Parallelstreifens $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ liegenden Werth besitzt,

so ändert das Integral seinen Werth nicht, wenn der Integrationsweg in dem genannten Streifen beliebig verschoben wird; insbesondere soll sein

$$(47)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w)}{z-w}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha+1-i\infty}^{\alpha+1+i\infty}\frac{F(w)}{z-w}\,dw\,,\qquad z>\alpha+1\,.$$

Erstreckt man nämlich das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(w)}{z-w}\,dw \qquad\qquad z>\alpha+1$$

zunächst längs der Begrenzung eines Rechtecks mit den Eckpunkten $\alpha\pm i\omega$, $\alpha+1\pm i\omega$, so ist dessen Werth gleich Null. Lässt man hierauf ω ohne Ende wachsen, so nähern sich die längs den zur reellen Axe parallelen Seiten erstreckten Integrale der Grenze Null, so dass die Gleichung (47) sich in der That ergiebt. Der Integrationsweg der rechten Seite von (47) kann durch die Substitution $w=v+1$ in den der linken Seite transformirt werden. Zugleich wollen wir statt v wieder w als Zeichen für die Integrationsvariable herstellen und bekommen auf diese Weise

$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w)}{z-w}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w+1)}{z-(w+1)}\,dw\,,\quad z>\alpha+1\,.$$

Hieraus ergiebt sich nun mit Benutzung der Functionalgleichung $F(w+1)=\pm R(w)\,F(w)$:

$$(48)\qquad P(z+1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w+1)}{z-w}\,dw=\frac{\pm 1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w)}{z-w}R(w)\,dw$$

$$=\frac{\pm R(z)}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w)}{z-w}\,dw+\frac{\pm 1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w)}{z-w}[R(w)-R(z)]\,dw\,.$$

Es wird sich nun leicht ergeben, dass das zweite Integral der rechten Seite eine rationale Function von z ist. Der Bequemlichkeit halber sei die Gradzahl des Zählers von $R(z)$ nicht grösser als die des Nenners $(m\leq n)$. Alsdann hat man, je nachdem $m=n$ oder $m<n$ ist:

$$(49)\qquad R(z)=1+\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{R_\lambda}{z-\upsilon_\lambda}\quad\text{oder}\quad R(z)=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{R_\lambda}{z-\sigma}\,,$$

vorausgesetzt zugleich, dass unter den Grössen $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ keine zwei gleiche sich finden, was ebenfalls zunächst angenommen werden soll. Aus (49) ergiebt sich

$$R(w) - R(z) = -(z-w)\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{R_\lambda}{(z-\sigma_\lambda)(\sigma_\lambda - w)}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (48) ein, so nimmt das zweite Glied der rechten Seite die Form an

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{F(w)}{z-w}[R(w)-R(z)]\,dw = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{R_\lambda}{z-\sigma_\lambda}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w)}{\sigma_\lambda - w}\,dw,$$

was eine durch Partialbrüche dargestellte rationale Function von z ist. Die Gleichung (48) erhält somit die Gestalt

$$(50)\qquad P(z+1) = \pm R(z)\,P(z) \mp \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{R_\lambda}{z-\sigma_\lambda}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w)}{\sigma_\lambda - w}\,dw.$$

Die in der Form von bestimmten Integralen auftretenden Constanten dieser Functionalgleichung sind offenbar specielle Werthe der Functionen $P(z)$ und $Q(z)$, und zwar ist

$$(51)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w)}{\sigma_\lambda - w}\,dw = \begin{cases} +P(\sigma_\lambda), & \sigma_\lambda > \alpha, \\ -Q(\sigma_\lambda), & \sigma_\lambda < \alpha, \end{cases}$$

je nachdem der reelle Theil von σ_λ grösser oder kleiner als α ist. Da $F(z)$ nach unserer Voraussetzung in der Umgebung jeder endlichen Stelle nicht nur im Innern sondern auch auf der Begrenzung des Streifens $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ sich regulär verhält, so können wir, falls eine oder mehrere der Grössen $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ auf der Begrenzung liegen würden, durch eine hinreichend kleine Verschiebung des Streifens von vorneherein bewirken, dass keine von ihnen mehr auf der Begrenzung liegt, während das Verhalten von $F(z)$ im Innern und an der Grenze des Streifens dasselbe bleibt wie früher.

In dem allgemeineren Falle, wo unter $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ auch gleiche Grössen sich finden, hat man, falls $m \leqq n$ ist:

$$R(z) = 1 + \sum_{(\sigma,\mu)}\frac{R_\sigma^{(\mu)}}{(z-\sigma)^\mu} \quad \text{oder} \quad R(z) = \sum_{(\sigma,\mu)}\frac{R_\sigma^{(\mu)}}{(z-\sigma)^\mu},$$

je nachdem $m = n$ oder $m < n$ ist. Hieraus ergiebt sich

$$R(w) - R(z) = \sum_{(\sigma,\mu)} R_\sigma^{(\mu)} \left[\frac{1}{(w-\sigma)^\mu} - \frac{1}{(z-\sigma)^\mu} \right] =$$

$$-(z-w) \sum_{(\sigma,\mu)} R_\sigma^{(\mu)} \left[\frac{1}{(z-\sigma)^\mu (\sigma - w)} - \frac{1}{(z-\sigma)^{\mu-1}(\sigma-w)^2} + \cdots + \frac{(-1)^{\mu-1}}{(z-\sigma)(\sigma-w)^\mu} \right].$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (48) ein, so nimmt das zweite Glied der rechten Seite die Form an

$$(52) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{F(w)}{z-w} [R(w) - R(z)]\, dw =$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{(\sigma,\mu)} R_\sigma^{(\mu)} \left[\frac{1}{(z-\sigma)^\mu} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{F(w)}{\sigma - w} dw + \cdots + \frac{(-1)^{\mu-1}}{z-\sigma} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{F(w)}{(\sigma - w)^\mu} dw \right],$$

was ebenfalls eine durch Partialbrüche dargestellte rationale Function von z ist. Die in der Form von bestimmten Integralen auftretenden Constanten dieses Ausdrucks sind offenbar specielle Werthe der Functionen $P(z)$, $Q(z)$ und ihrer Ableitungen, und zwar ist

$$(53) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{F(w)}{(\sigma - w)^k} dw = \begin{cases} (-1)^{k-1} \dfrac{\overset{(k-1)}{P(\sigma)}}{\underline{|k-1}}, & \sigma > \alpha, \\ (-1)^k \dfrac{\overset{(k-1)}{Q(\sigma)}}{\underline{|k-1}}. & \sigma < \alpha, \end{cases}$$

je nachdem der reelle Theil von σ grösser oder kleiner als α ist. Aus (48) und (52) ergiebt sich nun die Functionalgleichung

$$(54) \qquad P(z+1) = \pm R(z)\, P(z) \mp r(z),$$

wo $r(z)$ eine rationale Function bezeichnet, die offenbar auf die Form

$$r(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}}{(z-\sigma_1) \cdots (z - \sigma_n)}$$

gebracht werden kann.

Die obigen Erörterungen fangen damit an, dass der Integrationsweg des Integrals $P(z)$ von der Lage $a = \alpha + 1$ mittelst der Substitution $w = v + 1$ in die Lage $a = \alpha$ übergeführt wurde, wobei sich zugleich der Factor $\pm R(w)$ unter dem Integralzeichen aus $F(w)$ absonderte. Die Herleitung der Functio-

nalgleichung von $P(z)$ gestaltet sich in etwas anderer Weise, wenn wir den Integrationsweg von der Lage $a = \alpha$ in die Lage $a = \alpha + 1$ durch die Substitution $w = v - 1$ überführen, wobei sich der Factor $\frac{\pm 1}{R(w-1)}$ aus $F(w)$ unter dem Integralzeichen absondert. Alsdann wird

$$(55) \qquad P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{F(w)}{z-w}\,dw = \frac{\pm 1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha+1-i\infty}^{\alpha+1+i\infty}\frac{F(w)}{z+1-w}\cdot\frac{dw}{R(w-1)}$$

$$= \frac{\pm 1}{R(z)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha+1-i\infty}^{\alpha+1+i\infty}\frac{F(w)}{z+1-w} + \frac{\pm 1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha+1-i\infty}^{\alpha+1+i\infty}\frac{F(w)}{z+1-w}\left[\frac{1}{R(w-1)} - \frac{1}{R(z)}\right]dw.$$

Der Einfachheit halber sei die Gradzahl des Zählers von $R(z)$ nicht kleiner als die des Nenners ($m \geq n$). Je nachdem nun $m = n$ oder $m > n$ ist, hat man

$$\frac{1}{R(z)} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{m}\frac{S_\lambda}{z-\varrho_\lambda} \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{R(z)} = \sum_{\lambda=1}^{m}\frac{S_\lambda}{z-\varrho_\lambda},$$

vorausgesetzt zugleich, dass unter den Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ keine zwei gleiche sich finden. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{1}{R(w-1)} - \frac{1}{R(z)} = (z+1-w)\sum_{\lambda=1}^{m}\frac{S_\lambda}{(z-\varrho_\lambda)(w-\varrho_\lambda-1)}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (55) ein, so bekommt man die Functionalgleichung

$$(56) \qquad P(z) = \pm\frac{P(z+1)}{R(z)} \pm \sum_{\lambda=1}^{m}\frac{S_\lambda}{z-\varrho_\lambda}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha+1-i\infty}^{\alpha+1+i\infty}\frac{F(w)}{w-\varrho_\lambda-1}\,dw.$$

Die in der Form von bestimmten Integralen auftretenden Constanten sind wieder specielle Werthe der Functionen $P(z)$ und $Q(z)$, und zwar ist

$$(57) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha+1-i\infty}^{\alpha+1+i\infty}\frac{F(w)}{w-\varrho_\lambda-1}\,dw = \begin{cases} + Q(\varrho_\lambda+1), & \varrho_\lambda < \alpha, \\ - P(\varrho_\lambda+1), & \varrho_\lambda > \alpha, \end{cases}$$

je nachdem der reelle Theil von ϱ_λ kleiner oder grösser als α ist. Offenbar gelangt man auch in dem allgemeineren Falle, wo unter $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ gleiche Grössen sich finden, zu einer Functionalgleichung der Form

(58) $$P(z) = \pm \frac{P(z+1)}{R(z)} \pm s(z),$$

wo $s(z)$ eine rationale Function bezeichnet, welche auf die Form gebracht werden kann:

$$s(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{m-1} z^{m-1}}{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_m)}.$$

Aus den Gleichungen (54) und (58), von denen die erstere der Einfachheit halber unter der Voraussetzung $m \leq n$, die letztere unter der Voraussetzung $m \geq n$ hergeleitet worden ist, findet man, dass $P(z)$ jedenfalls eine Functionalgleichung der Form

(59) $$P(z+1) = \pm R(z)\, P(z) \mp r(z)$$

befriedigt, wo $r(z)$ eine mit $R(z)$ gleichnamige rationale Function bezeichnet, deren Zählers Gradzahl kleiner ist als diejenige der Zahlen m und n, die nicht kleiner ist als die andere

Wir wissen schon, dass die Function $P(z)$ in der durch die Ungleichheit $z > a$ $(\alpha \leq a \leq \alpha + 1)$ definirten Halbebene sich überall regulär verhält. Vermöge der obigen Functionalgleichung ergiebt sich nun leicht, dass $P(z)$ auch in der durch die Ungleichheit $z < a$ charakterisirten Halbebene den Character einer rationalen Function besitzt, indem sie höchstens an den Stellen

$$\varrho_\mu, \varrho_\mu - 1, \cdots, \varrho_\mu - k, \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

unendlich werden kann.

Stellt man die Gleichung (59) mit den Gleichungen $F(z+1) = \pm R(z) F(z)$, $F(z) = P(z) + Q(z)$ zusammen, so folgt, dass $Q(z)$ der Gleichung

(60) $$Q(z+1) = \pm R(z)\, Q(z) \pm r(z)$$

Genüge leistet und höchstens an den Stellen

$$\sigma_\mu + 1, \sigma_\mu + 2, \cdots, \sigma_\mu + k, \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n)$$

unendlich werden kann.

Das Schlussergebniss dieses § ist, dass jede beliebige in der Form (41) oder in der Form (42) darstellbare Function $F(z)$, für die es zugleich einen zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ giebt, wo sie sich überall regulär verhält, als Summe zweier neuen Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ dargestellt werden kann, welche die resp. Functionalgleichungen (59) und (60) be-

friedigen, wo $r(z)$ eine rationale Function der oben angegebenen Beschaffenheit bezeichnet.

In den §§ 16, 17, 18 werden wir die Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ unter besonderen Voraussetzungen sowohl über die Zahlen m und n wie über die Lage des Parallelstreifens $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$ eingehender erörtern. Ohne aber noch die Allgemeinheit der Untersuchungen zu beschränken, wollen wir eine eben hier sich darbietende Gelegenheit ergreifen, um von den Gammafunctionen in ungezwungener Weise zu den hypergeometrischen Functionen zu gelangen.

14.

Zu dem Ende betrachten wir die Gleichung (44):

$$(61) \qquad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(w)}{z-w}\, dw + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(w)}{w-z}\, dw\,,$$

$$\alpha \leq a < z < b \leq \alpha + 1\,,$$

deren Gültigkeitsbereich durch die obigen Ungleichheiten charakterisirt ist, wobei das Ungleichheitszeichen in dem, in § 12 festgesetzten, erweiterten Sinne gebraucht wird. Im ersten Gliede der rechten Seite ist während des Laufes der Integration $z - w > 0$, im zweiten aber $w - z > 0$. Je nachdem nun aber $z - w > 0$ oder $w - z > 0$ ist, kann man setzen

$$\frac{1}{z-w} = \int\limits_0^1 x^{z-w-1}\, dx\,, \quad \frac{1}{w-z} = \int\limits_1^\infty x^{z-w-1}\, dx\,.$$

Führt man diese Integrale in (61) ein, so bekommt man

$$(62) \qquad F(z) = \int\limits_0^1 x^{z-1} \frac{dx}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw + \int\limits_1^\infty x^{z-1} \frac{dx}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw\,,$$

vorausgesetzt, dass die Umkehrung der Integrationsordnung erlaubt ist, was sich in der That nachweisen lässt. Überdies lässt sich aber noch zeigen, dass

$$\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw = \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw\,.$$

Aus (62) folgt dann weiter

$$(63)\qquad F(z)=\int_0^\infty x^{z-1}\frac{dx}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(w)\,x^{-w}\,dw=\int_0^\infty \Phi(x;a)\,x^{z-1}\,dx\,,$$

so dass wir zur Untersuchung des von z unabhängigen Integrals

$$(64)\qquad \Phi(x;a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(w)\,x^{-w}\,dw$$

in ungezwungener Weise veranlasst werden.

Der Gültigkeitsbereich des Integrals (64), als Function von x betrachtet, soll zunächst ermittelt werden.

Da $F(z)$ unserer Festsetzung gemäss entweder eine in der Form (41) oder eine in der Form (42) darstellbare Function bezeichnet, so gilt von ihr Alles, was bei Gelegenheit der Gleichung (43) gesagt worden ist. Setzen wir nun $x=\varrho\,e^{i\theta}$, wobei ϱ den absoluten Betrag und θ das Argument von x bezeichnet, sowie in der Gleichung (43) für $z=\zeta+i\,\zeta'$ die Veränderliche $w=u+iv$, so erhalten wir

$$(65)\qquad |F(w)\,x^{-w}|=|\mathbf{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}|=$$

$$|x|^{-u}\cdot|w^{\varkappa+(m-n)(u-\frac{1}{2})}|\cdot e^{\theta v-\pi\left(\frac{m+n}{2}-\lambda\right)|v|}\cdot|A_0+A_1\operatorname{cotg}\pi(w-c_1)+\cdots|\cdot\chi(u,v)\,,$$

wo χ dieselbe Bedeutung hat wie in (43), und λ gleich $p-2$ oder $p-1$ ist. Liegt nun θ zunächst ausserhalb des von $\theta=-\pi\left(\frac{m+n}{2}-\lambda\right)$ bis $\theta=+\pi\left(\frac{m+n}{2}-\lambda\right)$ reichenden Intervalls, so kann der Exponent $\theta v-\pi\left(\frac{m+n}{2}-\lambda\right)|v|$, wenn v alle reellen Werthe durchläuft, unendlich grosse positive Werthe erhalten. Alsdann verliert aber das Integral (64), wenigstens bei unbestimmten Werthen von $A_0, A_1,\cdots$, offenbar jeden bestimmten Sinn. Verstehen wir aber unter δ eine bestimmte, beliebig kleine positive Zahl, die kleiner ist als die positive Grösse $\pi\left(\frac{m+n}{2}-\lambda\right)$, und beschränken das Argument θ auf das Intervall

$$(66)\qquad -\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)+\delta\leqq\theta\leqq+\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)-\delta\,,$$

so wird

$$\theta v-\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)|v|\leqq\left[\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)-\delta\right]|v|-\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)|v|=-\delta|v|\,,$$

und somit die in (65) vorkommende Exponentialfunction niemals grösser als $e^{-\delta|v|}$. Von den Factoren der rechten Seite der Gleichung (65) sind nur der erste und dritte von x abhängig. Bezeichnet man durch $\psi(u,v)$ das Product der übrigen von x unabhängigen Factoren, so ist ψ eine positive Variable, die

für $v = \pm \infty$, $\alpha \leq u \leq \beta$, höchstens wie eine Potenz von v (resp. w) unendlich wird. Nach dem Obigen hat man nun

$$(67) \qquad |F(w)\, x^{-w}| \leq |x|^{-u}\, e^{-\delta|v|}\, \psi(u, v).$$

In der Reihe

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \int_{c+i\lambda}^{c+i(\lambda+1)} F(w)\, x^{-w}\, dw = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw$$

sind daher die absoluten Beträge der einzelnen Glieder beziehungsweise nicht grösser als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$|x|^{-c} \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \int_{\lambda}^{\lambda+1} e^{-\delta|v|}\, \psi(c, v)\, dv = |x|^{-c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta|v|}\, \psi(c, v)\, dv,$$

die offenbar einen endlichen und, bis auf den Factor $|x|^{-c}$, von x unabhängigen Werth hat. Die erstere Reihe ist somit für jeden endlichen, durch (66) charakterisirten Bereich von x gleichmässig convergent. Da die Glieder derselben offenbar monogene Functionen darstellen, so ist hiermit gezeigt, *dass das Integral*

$$(68) \qquad \Phi(x; c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw,$$

falls der Integrationsweg durch keine Unendlichkeitsstelle von $F(w)$ hindurchgeht, in dem durch (66) *charakterisirten Bereiche von x — die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ ausgeschlossen — nicht nur einen bestimmten Sinn hat, sondern auch eine gewisse monogene, daselbst regulär sich verhaltende Function von x darstellt.*

Aus dem Obigen geht auch die folgende bemerkenswerthe Ungleichheit hervor:

$$(69) \qquad |\Phi(x; c)| \leq \frac{|x|^{-c}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta|v|}\, \psi(c, v)\, dv,$$

die später (§ 26) zu interessanten Folgerungen führen wird. Da das Integral auf der rechten Seite von x unabhängig ist, so ergiebt sich daraus schon hier, *dass $x^k\, \Phi(x; c)$ bei Annäherung von x an die Stelle $x = 0$ gegen die Null convergirt, falls k algebraisch grösser als c angenommen wird, sowie bei Annäherung von x an die Stelle $x = \infty$ ebenfalls gegen die Null, falls k dieses Mal algebraisch kleiner als c angenommen wird;* wobei selbstverständlich voraus-

gesetzt werden muss, dass diese Annäherungen in dem durch die Bedingung (66) charakterisirten Bereiche von x geschehen.

Das Integral (68) ist nicht nur von x sondern auch von der Lage seines Integrationsweges $u = c$ abhängig. Die letztere Abhängigkeit soll jetzt genauer festgestellt werden. Zu dem Ende denken wir uns wieder ein Rechteck mit den Eckpunkten $c \pm i\,\omega$, $d \pm i\,\omega$, dessen Seiten aber durch keine Unendlichkeitsstelle von $F(w)$ hindurchgehen. Wird das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int F(w)\, x^{-w}\, dw$$

längs der Begrenzung dieses Rechtecks in positiver Richtung erstreckt, so ist dessen Werth gleich der Summe derjenigen Residuen des Ausdrucks $F(w)\, x^{-w}$, welche zu den innerhalb des Rechtecks gelegenen Unendlichkeitsstellen desselben Ausdrucks gehören. Lässt man nun weiter ω ohne Ende wachsen, wobei die zur reellen Axe parallelen Seiten sich ins Unendliche entfernen, so nähern sich die längs diesen Seiten erstreckten Integrale vermöge (67) beide der Grenze Null, während die beiden anderen in die Integrale $\pm\, \Phi(x; c)$, $\mp\, \Phi(x; d)$ übergehen. *Somit ist, falls* $c < d$ *ist:*

$$\Phi(x; d) - \Phi(x; c) = \sum_{\lambda} R^{(\lambda)}, \tag{70}$$

wo die Summation sich nur auf diejenigen Residuen des Ausdrucks $F(w)\, x^{-w}$ *bezieht, welche zu den zwischen den Parallelen* $u = c$ *und* $u = d$ *liegenden Unendlichkeitsstellen desselben Ausdrucks gehören.* Die genauere Form dieser Residuen kann leicht und soll auch gelegentlich ermittelt werden. — Als specieller Fall dieses Satzes kann der betrachtet werden, *dass die beiden obigen Integrale* $\Phi(x; c)$ *und* $\Phi(x; d)$ *einander gleich sind, falls keine Unendlichkeitsstelle von* $F(w)$ *zwischen ihren Integrationswegen gelegen ist.*

Verbindet man den letzteren Satz mit dem aus der Ungleichheit (69) gefolgerten, so ergiebt sich der Satz: *Gehört der Integrationsweg* $u = c$ *des Integrals* $\Phi(x; c)$ *dem Streifen* $(\alpha \leq u \leq \beta)$ *an, wo* $F(w)$ *sich überall regulär verhalte, so convergirt das Product* $x^k\, \Phi(x; c)$, *sowohl bei Annäherung von* x *an die Stelle* $x = 0$ *wie auch bei Annäherung von* x *an die Stelle* $x = \infty$, *gegen die Null, falls* k *eine beliebige, die Bedingung* $\alpha < k < \beta$ *erfüllende Zahl bezeichnet.*

Da das Integral (68), auf die oben angeführte Reihenform gebracht, gleichmässig convergirt, so darf jene Reihe nach x gliedweise differentiirt werden. Was nun die Differentiation der einzelnen Glieder betrifft, so kann sie offenbar

vermöge der Beschaffenheit der Glieder unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, wodurch sich ergiebt

$$\frac{d}{dx}\Phi(x;c) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} - \int_{c+i\lambda}^{c+i(\lambda+1)} F(w)\, w x^{-w-1}\, dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)\, w x^{-w-1}\, dw\,.$$

Hiermit ist auf die wohl auch sonst übliche Weise dargethan, dass die Differentiation des Integrals (68) unter dem Integralzeichen ausgeführt werden darf.

Dass die unbestimmte Integration gemäss der Gleichung

(71) $$\int \Phi(x;c)\, x^{z-1}\, dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)\frac{x^{z-w}}{z-w}\, dw + C \qquad (z \lesseqgtr c)$$

ausgeführt werden kann, ergiebt sich durch Differentiation der beiden Seiten, wobei der vorangehende Satz offenbar zur Anwendung gebracht werden darf.

Der am Anfang dieses § bewerkstelligte Übergang von der Function $F(z)$ zu dem Integrale (63) kann nunmehr streng begründet werden. Wir wollen ihn aber jetzt in umgekehrter Reihenfolge vornehmen. Hierbei ist es keineswegs nöthig, einen Parallelstreifen von der Breite *Eins* vorauszusetzen, wo $F(z)$ sich überall regulär verhielte. *Es sei vielmehr* $(\alpha \leqq \zeta \leqq \beta)$ *ein ganz beliebiger, in der Ebene der Veränderlichen* $z = \zeta + i\,\zeta'$ *gelegener, zur imaginären Axe paralleler Streifen, wo* $F(z)$ *sich überall regulär verhält. Dann lässt sich zeigen, dass das Integral*

(72) $$\int_0^\infty \Phi(x;c)\, x^{z-1}\, dx = \int_0^\infty x^{z-1}\frac{dx}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw\,,$$

falls z *einen Werth innerhalb des Streifens bezeichnet und* $\alpha \leqq c \leqq \beta$ *ist, nicht nur einen bestimmten Sinn hat sondern auch gleich* $F(z)$ *ist.* — Vermöge des bei Gelegenheit der Ungleichheit (69) hervorgehobenen Satzes und wegen $z > \alpha$ wird der Ausdruck $x^{z-1}\,\Phi(x;c) = x^{z-1}\,\Phi(x;\alpha)$, falls er bei Annäherung von x an die Stelle $x = 0$ nicht endlich bleibt, jedenfalls von niedrigerer Ordnung als der ersten unendlich gross. Somit ist die in (72) bei $x = 0$ beginnende Integration erlaubt. Vermöge desselben Satzes und wegen $z < \beta$ wird $x^{z-1}\,\Phi(x;c) = x^{z-1}\,\Phi(x;\beta)$ bei Annäherung von x an die Stelle $x = \infty$ von höherer Ordnung als der ersten unendlich klein. Somit ist die in (72) bei $x = \infty$ endigende Integration erlaubt. Da $x^{z-1}\,\Phi(x;c)$ an den übrigen Stellen des Integrationsweges sich regulär verhält, so ist der erste Theil unserer Behauptung erwiesen. — Die Richtigkeit des zweiten Theiles ergiebt sich in folgender Weise.

Vermöge des bei Gelegenheit der Gleichung (70) hervorgehobenen, soeben schon angewandten, specielleren Satzes ist

$$\int_0^\infty \Phi(x;c)\, x^{z-1} dx = \int_0^1 \Phi(x;c)\, x^{z-1} dx + \int_1^\infty \Phi(x;c)\, x^{z-1} dx$$

$$= \int_0^1 \Phi(x;\alpha)\, x^{z-1} dx + \int_1^\infty \Phi(x;\beta)\, x^{z-1} dx\,.$$

Ermittelt man nun diese Integrale mit Hülfe von (71), wobei c der Reihe nach gleich α und β zu setzen ist, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \Phi(x;c)\, x^{z-1} dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{F(w)}{z-w}\, dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{F(w)}{w-z}\, dw\,,$$

weil das Integral auf der rechten Seite von (71) wegen $\alpha < z < \beta$ sowohl für $c = \alpha$ und $x = 0$ als auch für $c = \beta$ und $x = \infty$ den Werth Null erhält. Wendet man nun schliesslich auch den Cauchyschen Satz so an, wie es im vorhergehenden § geschehen ist, so zeigt sich, dass die rechte Seite gleich $F(z)$ ist, womit die Richtigkeit unserer Behauptung vollständig erwiesen ist.

Aus dem Obigen folgt unmittelbar, *dass das Integral* $\Phi(x;c)$, *als Function von* x *betrachtet, nur dann identisch verschwindet, wenn dies mit* $F(z)$, *als Function von* z *betrachtet, der Fall ist.*

Weil $F(z)$ einen Ausdruck von der Form

$$F(z) = \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z,\lambda)$$

bezeichnet, wo φ die Form hat

$$\varphi(z,\lambda) = \sin\pi(z-c_1)\cdots\sin\pi(z-c_\lambda)\,[A_0 + A_1 \operatorname{cotg}\pi(z-c_1) + \cdots + A_\lambda \operatorname{cotg}\pi(z-c_\lambda)],$$

und da die trigonometrischen Functionen mit Hülfe der Formel $\frac{\sin\pi z}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}$ durch die Gammafunction ausgedrückt werden können, so eröffnet uns der über (72) bewiesene Satz die Aussicht, eine überaus grosse Menge bestimmter Integrale auf die Gammafunction zurückführen zu können. Es erübrigt uns in der That nur der Nachweis, dass die in der Form (68) erhaltenen Functionen $\Phi(x;c)$ mit den *hypergeometrischen* identisch sind.

Dabei wollen wir wieder annehmen, dass es für die Function $F(w)$ einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite Eins giebt, $(\alpha \leqq u \leqq \alpha+1)$,



wo sie sich überall regulär verhält, und betrachten das zu diesem Streifen gehörige Integral

$$(73)\quad \Phi(x;\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\varphi(w,\lambda)x^{-w}dw.$$

Da $F(w)$ in dem betreffenden Streifen sich überall regulär verhält, so ist $\Phi(x;\alpha) = \Phi(x;\alpha+1)$. Führt man den Integrationsweg des Integrals $\Phi(x;\alpha+1)$ von der Lage $u=\alpha+1$ mittelst der Substitution $w=y+1$ in die Lage $u=\alpha$ über, so ergiebt sich, indem man statt y wieder w als Zeichen der Integrationsvariable herstellt und die Gleichung $\varphi(w+1) = (-1)^\lambda \varphi(w)$ beachtet:

$$(74)\quad \Phi(x;\alpha) = \frac{(-1)^\lambda}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1+1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m+1)\Gamma(\sigma_1-w)\cdots\Gamma(\sigma_n-w)\varphi(w,\lambda)x^{-w-1}dw.$$

Führt man nun unter dem Zeichen des ersteren Integrals (73) die durch den Differentialausdruck

$$x^{1-\varrho_1}\frac{d}{dx}x^{\varrho_1}\Phi = x\frac{d}{dx}\Phi + \varrho_1\Phi = \left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\Phi$$

bezeichneten Operationen aus, so geht der Factor $\Gamma(w-\varrho_1)$ mit Benutzung von von $(w-\varrho_1)\Gamma(w-\varrho_1) = \Gamma(w-\varrho_1+1)$ in $-\Gamma(w-\varrho_1+1)$ über; d. h. es ist $\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\Phi$ bis auf das Minuszeichen gleich dem Resultate, das entsteht, falls man für ϱ_1 in (73) ϱ_1-1 substituirt. Da Ähnliches von $\varrho_2, \cdots, \varrho_m$ gilt, so hat man symbolisch

$$\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_m\right)\Phi =$$

$$\frac{(-1)^m}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1+1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m+1)\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\varphi(w,\lambda)x^{-w}dw.$$

Von dem Integrale (74) kommt man in ähnlicher Weise zu dem Resultate

$$\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_2+1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n+1\right)\Phi =$$

$$\frac{(-1)^\lambda}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1+1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m+1)\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\varphi(w,\lambda)x^{-w-1}dw.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt schliesslich für $\Phi(x;\alpha)$ die Differentialgleichung

$$(75)\quad \left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_m\right)\Phi=(-1)^{m+\lambda}x\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n+1\right)\Phi,$$

die auch in der Form geschrieben werden kann:

$$x^{1-\varrho_1}\frac{d}{dx}x^{\varrho_1}\dots x^{1-\varrho_m}\frac{d}{dx}x^{\varrho_m}\Phi=(-1)^{m+\lambda}x\,.\,x^{-\sigma_1}\frac{d}{dx}x^{\sigma_1+1}\dots x^{-\sigma_n}\frac{d}{dx}x^{\sigma_n+1}\Phi.$$

Durch den Schluss von n auf $n+1$ überzeugt man sich von der Gültigkeit der Identität

$$\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_m\right)y\equiv x^m\frac{d^my}{dx^m}+a_{m-1}x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+a_1x\frac{dy}{dx}+a_0y\,.$$

Setzt man $y=x^\varrho$, so ergiebt sich die in Bezug auf ϱ identische Gleichung

$$(\varrho+\varrho_1)\cdots(\varrho+\varrho_m)\equiv a_0+a_1\varrho+a_2\varrho(\varrho-1)+\cdots+\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-m+1),$$

die beispielsweise für $\varrho=0,1,2,\cdots,m-1$ eine zur Berechnung der Constanten a hinreichende Anzahl Gleichungen giebt.

Die Differentialgleichung (75) lässt sich also auf die Form bringen

$$(a_0-b_0x)\Phi+(a_1-b_1x)x\frac{d\Phi}{dx}+\cdots+(a_\nu-b_\nu x)x^\nu\frac{d^\nu\Phi}{dx^\nu}=0,$$

wo ν diejenige der Zahlen m und n bezeichnet, die nicht kleiner ist als die andere. Dies ist aber die wohlbekannte Form der hypergeometrischen Differentialgleichungen. *Die ursprünglich in der Form (64) erhaltenen Functionen, zu denen wir von den Functionen $F(z)$ durch Vermittelung der Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ gekommen sind, erweisen sich somit als hypergeometrische Functionen.*

Ist $m>n$, so ist $a_\nu=1$, $b_\nu=0$; ist $m<n$, so ist $a_\nu=0$, $b_\nu=\pm 1$; ist schliesslich $m=n$, so ist $a_\nu=1$ und $b_\nu=\pm 1$, je nachdem $m+\lambda$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Offenbar sind $x=0$ und $x=\infty$ jedenfalls singuläre Stellen der Differentialgleichung, und zwar die einzigen, falls m und n einander ungleich sind. Ist aber $m=n$, so hat die Differentialgleichung überdies eine singuläre Stelle in dem Punkte $x=(-1)^{m+\lambda}$, d. h. im Punkte $x=+1$ oder im Punkte $x=-1$, je nachdem $m+\lambda$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Bemerkenswerth ist, dass diese Stelle jedoch nicht singuläre Stelle des Integrals $\Phi(x;c)$ ist, falls sie nämlich im Gültigkeitsbereiche desselben liegt.

Wir wollen nunmehr in den nachfolgenden §§ 16, 17, 18 zu den Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ zurückkehren, um dieselben unter besonderen Voraussetzungen sowohl über die Zahlen m und n wie über die Lage des Parallelstreifens $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ zu erörtern. In den übrigen §§ dieses Abschnittes wollen wir uns sodann in ähnlicher Weise mit den Functionen $\Phi(x; c)$ beschäftigen.

Anmerkung. Es kann dem aufmerksamen Leser nicht entgangen sein, dass die Erörterungen dieses § — mit einziger Ausnahme der Herleitung der Differentialgleichung (75), wobei die Functionalgleichung der Gammafunction benutzt wurde — auch eine weit allgemeinere Gültigkeit besitzen, als was bisher hervorgehoben worden ist. In der That haben wir bei keiner anderen Gelegenheit in diesem § von einer Functionalgleichung Gebrauch gemacht. Die übrigen Sätze dieses § haben sich ergeben auf Grund der einzigen Voraussetzungen, dass $F(z)$ eine Function bezeichnet, welche in dem in Betracht genommenen, zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ den Charakter einer ganzen — eventuell (70) rationalen — transcendenten Function besitzt, deren Verhalten für unendlich grosse, diesem Streifen angehörige Werthe von $z = \zeta + i\,\zeta'$ durch einen Ausdruck der Form

$$|F(z)| = e^{-\vartheta|\zeta'|} \,.\, \psi(\zeta, \zeta')$$

angegeben werden kann, wo ϑ positiv ist und $\psi(\zeta, \zeta')$ eine Grösse bezeichnet, die für $\zeta' = \pm\infty$, $\alpha \leq \zeta \leq \beta$, höchstens wie eine Potenz von ζ' unendlich gross wird. Die von uns betrachteten Functionen verändern sich nun in dieser Hinsicht offenbar nicht, wenn man sie beispielsweise mit einem aus beliebig vielen Factoren der Form $\sin \pi (z - a)$ gebildeten Producte dividirt. Die so entstehenden Functionen können noch zu den Gammafunctionen gerechnet werden, nämlich zu denjenigen, zu denen man gelangt, wenn man die in einer Note des § 1 formulirte Aufgabe löst. Für die entsprechenden Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ gelten noch einfache Functionalgleichungen, und die zugehörigen Integrale $\Phi(x; c)$ befriedigen sogar hypergeometrische Differentialgleichungen, die aber *nicht* mehr *homogen* sind[1]). Gerade dieser Umstand, dass im Allgemeinen nur die im Abschnitte I charakterisirten Gammafunctionen — für die es also einen zur imaginären Axe parallelen Streifen von der Breite *Eins* giebt, wo sie sich überall regulär verhalten etc. — auf die auseinandergesetzte Weise zu *homogenen* hypergeometrischen Differentialgleichungen führen, hat uns veranlasst, die Untersuchun-

[1]) Diese Gleichungen können doch durch geeignete Operationen auf die homogene Form gebracht werden. Dadurch erhöhen sich aber die Ordnungszahlen derselben.

gen des gegenwärtigen Abschnittes auf die genannten Functionen allein zu beschränken. — Man gelangt aber schon zu Functionen, die nicht mehr zu den Gammafunctionen gerechnet werden können, wenn man die oben besprochenen mit einem etwa aus Thetafunctionen gebildeten Producte multiplicirt. Da die Thetafunction eine ganze transcendente Function ist, die insbesondere die Eigenschaft $\Theta(z + \pi i) = \Theta(z)$ hat, so erfüllen die so gebildeten Functionen die Bedingungen, worauf alle Sätze dieses § mit Ausnahme der Differentialgleichung (75) gegründet sind. Diese Beispiele von Functionen, auf welche die fraglichen Sätze anwendbar sind, liessen sich ohne Mühe beliebig vermehren. Vielleicht wird sich eine andere Gelegenheit darbieten, auf diesen Gegenstand nochmals zurückzukommen. Diesmal mögen nur noch die aus Gammafunctionen mit gebrochenen Exponenten zusammengesetzten Producte (eventuell Quotienten) angeführt werden. Da sie aber mehrdeutig sind, so gehört der Satz (70) nicht mehr zu den für dieselben gültigen Sätzen. Es ist beispielsweise

$$\left(\Gamma(z)\right)^{\frac{m}{n}} = \int_0^\infty x^{z-1} \frac{dx}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\Gamma(w)\right)^{\frac{m}{n}} x^{-w}\, dw,$$

falls c nicht eine negative ganze Zahl oder die Null ist und z zweckmässig beschränkt wird. — (Confer § 29).

15.

Bei Untersuchungen über Gamma- und hypergeometrische Functionen kann man einen von Gauss herrührenden und von Weierstrass verallgemeinerten Satz nicht entbehren, welcher — wenn man auch den Fall berücksichtigt, wo veränderliche Grössen in dem in Frage kommenden Producte auftreten — im Wesentlichen sich folgenderweise aussprechen lässt:

Ist die Function $f(t, \xi)$ für $|\xi| < \varrho$ und für alle Werthe von t, die einem gewissen Bereiche dieser reellen oder complexen Veränderlichen angehören, dem absoluten Betrage nach kleiner als eine angebbare endliche Grösse und überdies in eine für die genannten Werthe von t und ξ unbedingt convergirende Reihe der Form

$$1 + \varphi_2(t)\,\xi^2 + \varphi_3(t)\,\xi^3 + \cdots$$

entwickelbar, wo die φ von ξ unabhängig sind; ist ferner α eine beliebige reelle Constante und $z = \zeta + i\zeta'$ eine auf die Halbebene $\zeta > \alpha$ beschränkte Veränderliche, so ist das unendliche Product

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} f\left(t, \frac{1}{z+k}\right) = \prod_{k=k_0}^{\infty}\left(1 + \frac{\varphi_2(t)}{(z+k)^2} + \frac{\varphi_3(t)}{(z+k)^3} + \cdots\right),$$

falls $\alpha + k_0 > \frac{1}{\varrho}$ ist, für alle oben erwähnten Werthe von t und z *gleichmässig* convergent und dem absoluten Betrage nach kleiner als eine angebbare Grösse. Dasselbe nähert sich ausserdem bei Annäherung von z in der genannten Halbebene an die Stelle $z = \infty$ gleichmässig der Grenze Eins [1]).

Man beweist den Satz einfach, wenn man einen elementaren Satz über Potenzreihen zur Anwendung bringt [2]).

Die für unsere Untersuchungen so wichtigen Gleichungen (9) und (10) des § 2 sind mit Benutzung des obigen Satzes a. a. O. erhalten worden.

Bei Anwendungen des Satzes beachtet man zugleich, dass ein Ausdruck $f(t, \xi)$, in dessen Entwickelung nach Potenzen von ξ das Glied $\varphi_1(t)\,\xi$ vorkommt, durch Multiplication mit $(1+\xi)^{-\varphi_1(t)}$ in eine Function übergeht, in deren Entwickelung das genannte Glied fehlt und auf die der Satz sodann anwendbar ist. — Das von dem obigen Producte Gesagte gilt offenbar auch von

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} f\left(t, \frac{1}{z-k}\right),$$

falls $k_0 - \alpha > \frac{1}{\varrho}$ ist und z eine auf die Halbebene $\zeta \leqq \alpha$ beschränkte Variable bezeichnet.

Bei den weiteren Untersuchungen können wir nicht unterlassen, das Verhalten der Gammafunctionen auch für den Fall zu beachten, wo die unabhängige Variable in der Richtung der reellen Axe sich ins Unendliche entfernt, oder noch allgemeiner, wo sie sich in irgend einer, von einer, zur imaginären Axe parallelen Geraden begrenzten Halbebene der Stelle ∞ nähert. Aus der Functionalgleichung $F(z+1) = \pm R(z)\,F(z)$ erhalten wir die beiden anderen:

(76) $$F(z+k) = (\pm 1)^k R(z)\,R(z+1)\cdots R(z+k-1)\,F(z),$$

(77) $$F(z-k) = (\pm 1)^k \frac{F(z)}{R(z-1)\,R(z-2)\cdots R(z-k)}.$$

Für hinreichend grosse Werthe von z hat man

$$R(z) = \frac{(z-\varrho_1)\cdots(z-\varrho_m)}{(z-\sigma_1)\cdots(z-\sigma_n)} = z^{m-n}\left(1 + \frac{\varkappa}{z} + \frac{\varkappa'}{z^2} + \cdots\right),$$

---

[1]) Der Satz gilt ebenso wohl, falls $f(\xi)$ in der angegebenen Weise von mehreren Veränderlichen $t_1, \cdots, t_n$ abhängt. Ein analoger Satz lässt sich für vielfache Producte beweisen. In seiner Arbeit über die analytischen Facultäten sagt Weierstrass: „Übrigens würden sie (darunter der obige Satz) sich ohne Mühe noch bedeutend verallgemeinern lassen".

[2]) Siehe § 1 meiner Arbeit in Acta Math. Bd. 15.

wo die $\varkappa$ von z unabhängig sind; insbesondere ist $\varkappa = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n - \varrho_1 - \cdots - \varrho_m$. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\left(1+\frac{1}{z}\right)^{-\varkappa}$, so lässt sich das Product dieses Ausdrucks und der Reihe $1+\frac{\varkappa}{z}+\cdots$, welches $f\left(\frac{1}{z}\right)$ heisse, für hinreichend grosse Werthe von z in eine Reihe der Form

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots$$

entwickeln, wo die c von z unabhängig sind. Aus der Gleichung $R(z) = z^{m-n}\left(\frac{z+1}{z}\right)^{\varkappa} f\left(\frac{1}{z}\right)$ erhalten wir

(78) $$R(z)\,R(z+1)\cdots R(z+k-1) =$$
$$\left(\frac{z+k}{z}\right)^{\varkappa}[z(z+1)\cdots(z+k-1)]^{m-n} f\left(\frac{1}{z}\right) f\left(\frac{1}{z+1}\right)\cdots f\left(\frac{1}{z+k-1}\right),$$

und hieraus, indem wir statt z $z-k$ substituiren:

(79) $$R(z-1)\,R(z-2)\cdots R(z-k) =$$
$$\left(\frac{z}{z-k}\right)^{\varkappa}[(z-1)(z-2)\cdots(z-k)]^{m-n} f\left(\frac{1}{z-1}\right) f\left(\frac{1}{z-2}\right)\cdots f\left(\frac{1}{z-k}\right).$$

Diese Gleichungen, die insbesondere für $m = n$ von Wichtigkeit sind, zeigen nun in Verbindung mit den Gleichungen (76), (77), wie sich $F(z)$ verhält, falls die unabhängige Variable sich in der Richtung der reellen Axe ins Unendliche entfernt, wobei der oben hervorgehobene Satz ebenfalls zu beachten ist. Entfernt sich $z+k$, resp. $z-k$, gleichzeitig ohne Ende von der reellen Axe, so hat man ausserdem zu beachten, dass das Verhalten des Ausdrucks $F(z)$, der in den rechten Seiten von (76) und (77) vorkommt und fortwährend eine Function der Form (41) oder (42) bedeuten soll, durch die Gleichung (43) charakterisirt wird, falls z z. B. auf einen Parallelstreifen von der Breite Eins ($\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1$) beschränkt ist, was offenbar auch unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden darf.

16.

Es sei r gleich $n+p$ oder $n+p-1$, $\left(p \geq \frac{m+n}{2} > p-1\right)$, je nachdem $F(z)$ eine in der Form (41) oder (42) darstellbare Function bezeichnet. Für $F(z)$ gebe es einen Parallelstreifen ($\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1$), wo sie sich überall regulär verhält, dessen Lage aber noch nicht genauer angegeben zu werden braucht. Alsdann genügen die in § 13 erhaltenen Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ den resp. Functionalgleichungen

$$P(z+1) = (-1)^\nu R(z) P(z) - (-1)^\nu r(z),$$

$$Q(z+1) = (-1)^\nu R(z) Q(z) + (-1)^\nu r(z),$$

wo $r(z)$ eine mit $R(z)$ gleichnamige rationale Function bezeichnet, deren Zählers Gradzahl kleiner ist als m, falls $m \geqq n$ ist; oder aber kleiner als n, falls $n \geqq m$ ist. Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichungen ergeben sich die folgenden

(80) $$P(z) = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \frac{(-1)^{\lambda\nu} r(z+\lambda)}{R(z) R(z+1) \cdots R(z+\lambda)} + \frac{(-1)^{\nu k} P(z+k)}{R(z) R(z+1) \cdots R(z+k-1)},$$

(81) $$Q(z) = (-1)^\nu r(z-1) + \sum_{\lambda=2}^{k} (-1)^{\lambda\nu} R(z-1) R(z-2) \cdots R(z-\lambda+1) r(z-\lambda)$$
$$+ (-1)^{\nu k} R(z-1) R(z-2) \cdots R(z-k) Q(z-k).$$

Aus der Form (45) des Integrals $P(z)$ geht hervor, dass dasselbe bei Annäherung von z in der Halbebene $z > \alpha$ an die Stelle $z = \infty$ sich der Null nähert. In ähnlicher Weise verhält sich $Q(z)$ in der Halbebene $z < \alpha + 1$. Insbesondere ist $\lim_{k=\infty} P(z+k) = 0$ und $\lim_{k=\infty} Q(z-k) = 0$, falls z auf ein beliebiges endliches Gebiet beschränkt wird.

Ist also *erstens* $m > n$, so nähert sich das letzte Glied der rechten Seite von (80) mit wachsendem k gleichmässig der Grenze Null, falls z auf ein beliebiges endliches Gebiet beschränkt wird, wo keine Nullstellen von $R(z)$, $R(z+1), \cdots$ liegen. Für $P(z)$ ergiebt sich somit die beständig convergirende Reihenentwickelung

(82) $$P(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda\nu} r(z+\lambda)}{R(z) R(z+1) \cdots R(z+\lambda)},$$

die im Endlichen höchstens an den Stellen $\varrho_\mu, \varrho_\mu - 1, \varrho_\mu - 2, \cdots$ $(\mu = 1, 2, \cdots m)$ unendlich gross werden kann. Dagegen kann das letzte Glied der rechten Seite von (81) mit wachsendem k sich nicht der Null nähern, weil man durch die entgegengesetzte Annahme für $Q(z)$ eine offenbar divergirende Reihe erhält.

Ist aber *zweitens* $m < n$, so erhalten wir aus (81) für $Q(z)$ die beständig convergirende Reihenentwickelung

(83) $$Q(z) = (-1)^\nu r(z-1) + \sum_{\lambda=2}^{\infty} (-1)^{\lambda\nu} R(z-1) R(z-2) \cdots R(z-\lambda+1) r(z-\lambda),$$

die im Endlichen höchstens an den Stellen $\sigma_\mu + 1, \sigma_\mu + 2, \sigma_\mu + 3, \cdots (\mu = 1, 2, \cdots, n)$ unendlich gross werden kann. Dagegen führt (80) zu keinem convergenten Resultate.

Der *dritte* Fall, wo $m = n$ ist, erfordert eine eingehendere Erörterung, führt aber zugleich zu dem bemerkenswerthesten Resultate. Mit Hülfe der Gleichungen (78) und (79) des vorhergehenden § bringt man die Restglieder in (80) und (81) auf die bezüglichen Formen

$$\frac{P(z+k)}{R(z)R(z+1)\cdots R(z+k-1)} = \frac{1}{(z+k)^{\varkappa+1}} \cdot \frac{z^\varkappa (z+k) P(z+k)}{f(\frac{1}{z})\cdots f(\frac{1}{z+k-1})}$$

$$R(z-1)R(z-2)\cdots R(z-k)\,Q(z-k) = \frac{z^\varkappa (z-k)\,Q(z-k) f(\frac{1}{z-1})\cdots f(\frac{1}{z-k})}{(z-k)^{\varkappa+1}}$$

Aus (45) und (46) ergiebt sich, dass $\lim\limits_{k=\infty}(z+k)P(z+k)$ und $\lim\limits_{k=\infty}(z-k)\,Q(z-k)$ beide endliche, von z unabhängige Grössen sind. Beachtet man ausserdem den allgemeinen Satz des vorigen § und nimmt an, dass $\varkappa > -1$ ist, so findet man, dass diese Restglieder mit wachsendem k sich gleichmässig der Null nähern, wofern z, wie in den vorigen Fällen, zweckmässig beschränkt wird. Für $P(z)$ und $Q(z)$ ergeben sich daher, falls $\varkappa > -1$ ist, die bezüglichen, gleichzeitig convergirenden Reihenentwickelungen (82) und (83). Hieraus geht aber noch nicht hervor, ob die Ungleichheit $\varkappa > -1$ auch eine nothwendige Bedingung für die Convergenz dieser Reihen sei. Um hierüber zu entscheiden, wobei der Einfachheit halber die absolute Convergenz vorzugsweise beachtet werden soll, bringen wir ihre allgemeinen Glieder auf die Formen

$$\frac{r(z+k-1)}{R(z)R(z+1)\cdots R(z+k-1)} = \frac{1}{(z+k)^{\varkappa+n'}}\,\frac{z^\varkappa (z+k)^{n'} r(z+k-1)}{f(\frac{1}{z})\cdots f(\frac{1}{z+k-1})}.$$

$$R(z-1)R(z-2)\cdots R(z-k)\,r(z-k-1) = \frac{z^\varkappa (z-k)^{n'} r(z-k-1).f(\frac{1}{z-1})\cdots f(\frac{1}{z-k})}{(z-k)^{\varkappa+n'}}.$$

Hier bezeichne $n-n'$ $(n' = 1, 2, \cdots, n)$ die wirkliche Gradzahl des Zählers von $r(z)$, so dass also $\lim\limits_{k=\infty}(z+k)^{n'} r(z+k-1)$ und $\lim\limits_{k=\infty}(z-k)^{n'} r(z-k-1)$ beide endliche, von Null verschiedene Grössen sind. Beachtet man dies, sowie den allgemeinen Satz des vorigen §, so ergiebt sich in bekannter Weise, dass die Reihen (82) uud (83) dann und nur dann absolut convergiren, wenn der reelle Theil von $\varkappa$ die Bedingung $\varkappa > -n'+1$ erfüllt; in welchem Falle sie offenbar

auch gleichmässig convergiren, falls z auf ein beliebiges endliches Gebiet beschränkt wird, wo keine Unendlichkeitsstellen ihrer Glieder sich finden.

Ist also *drittens* $m = n$ und zugleich $\varkappa > -1$, so convergiren die Reihen (82) und (83) beide gleichmässig; bezeichnet ferner n' den Überschuss der Gradzahl des Nenners von $r(z)$ über die des Zählers, so sind die nämlichen Reihen immer und nur dann absolut convergent, wenn $\varkappa > -n' + 1$ ist, in welchem Falle sie auch gleichmässig convergiren, falls z auf ein beliebiges endliches Gebiet beschränkt wird, wo keine Unendlichkeitsstellen ihrer Glieder sich finden. Im Falle der Convergenz stellen sie die Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ resp. dar. Da $P(z) + Q(z) = F(z)$, so erhalten wir im fraglichen Falle zugleich für $F(z)$ die Reihenentwickelung

$$(84)\quad \left.\begin{array}{l} \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_n)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z, n-2) \\ \Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_n)\,\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)\,\varphi(z, n-1) \end{array}\right\} =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(\pm 1)^{\lambda}\, r(z+\lambda)}{R(z)R(z+1)\cdots R(z+\lambda)} \pm r(z-1) + \sum_{\lambda=2}^{\infty}(\pm 1)^{\lambda} R(z-1)R(z-2)\cdots R(z-\lambda+1)\, r(z-\lambda),$$

wo auf der rechten Seite das obere oder untere zeichen zu nehmen ist, je nachdem es sich um den ersteren oder letzteren der obigen Ausdrücke handelt. Diese Gleichungen können natürlich auch als ziemlich allgemeine Summationsformeln aufgefasst werden. — Es lässt sich zeigen, dass die Gradzahl des Zählers von $r(z)$, falls es sich um die erstere Gleichung handelt, niemals grösser als $n-2$ ist. Denn alsdann ist $P(z+1) = R(z)\,P(z) - r(z)$. Multiplicirt man diese Gleichung mit z und lässt z in der Halbebene $z > \alpha$ sich der Stelle $z = \infty$ nähern, so zeigt der Integralausdruck von $P(z)$, dass $z\,P(z+1)$ und $z\,P(z)$ sich beide derselben endlichen Grenze nähern. Da $R(z)$ sich der Grenze Eins nähert, so folgt $\lim\limits_{z=\infty} z\,r(z) = 0$, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergiebt. Hieraus kann man weiter finden, dass die Anzahl der unbestimmten Constanten in den beiden Ausdrücken φ und r dieselbe ist.

17.

Im vorhergehenden § war es nicht nöthig, die Lage des Parallelstreifens $(\alpha \leq \zeta \leq \alpha + 1)$, wo $F(z)$ sich überall regulär verhält, genauer zu fixiren. Nunmehr soll aber vorausgesetzt werden, dass $F(z)$ zu denjenigen Gammafunctio-

nen gehört, die durch den Satz des § 7 charakterisirt worden sind. Die Constanten $\varrho_1, \cdots, \varrho_m, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ erfüllen also die Bedingungen

$$(85)\qquad \varrho_\lambda < \alpha < \sigma_\mu, \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \cdots, m \\ \mu = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix},$$

und es verhält sich $F(z)$ in dem Streifen $(\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1)$ überall regulär, ohne dass die unbestimmten Constanten von $\varphi(z, p-2)$, resp. $\varphi(z, p-1)$, irgend welchen Bedingungen unterworfen zu werden brauchen.

In den Functionalgleichungen von $P(z)$ und $Q(z)$ treten gewisse Constanten in der Form von bestimmten Integralen auf, welche die durch (51), (53) und (57) angegebenen Werthe besitzen. In dem gegenwärtigen Falle, wo die Ungleichheiten (85) bestehen, können diese Integrale entweder ausschliesslich durch die Functionswerthe $P(\sigma_\lambda)$, $P'(\sigma_\lambda) \cdots$ oder ausschliesslich durch die Functionswerthe $Q(\varrho_\lambda + 1)$, $Q'(\varrho_\lambda + 1) \cdots$ ausgedrückt werden. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass weder unter $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ noch unter $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ zwei gleiche Grössen sich finden, so kann die Functionalgleichung von $P(z)$ entweder in der Form (50) oder in der Form (56) geschrieben werden, je nachdem $m \leqq n$ oder $m \geqq n$ ist.

Ist also $m \leqq n$, so ist vermöge (85) und (51):

$$(86)\qquad \begin{cases} P(z+1) = \pm R(z)\, P(z) \mp \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \dfrac{R_\lambda P(\sigma_\lambda)}{z - \sigma_\lambda}, \\[2ex] Q(z+1) = \pm R(z)\, Q(z) + \sum\limits_{\lambda=1}^{n} \dfrac{R_\lambda P(\sigma_\lambda)}{z - \sigma_\lambda}; \end{cases}$$

Ist aber $m \geqq n$, so ist vermöge (85) und (57):

$$(87)\qquad \begin{cases} P(z) = \pm \dfrac{P(z+1)}{R(z)} \pm \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \dfrac{S_\lambda\, Q(\varrho_\lambda + 1)}{z - \varrho_\lambda}, \\[2ex] Q(z) = \mp \dfrac{Q(z+1)}{R(z)} \mp \sum\limits_{\lambda=1}^{m} \dfrac{S_\lambda\, Q(\varrho_\lambda + 1)}{z - \varrho_\lambda}, \end{cases}$$

In allen diesen Gleichungen ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem $F(z)$ die Gleichung $F(z+1) = R(z)\, F(z)$ oder $F(z+1) = -R(z)\, F(z)$ befriedigt. Die Grössen $R_1, \cdots, R_n$ sind nach § 13 die zu den Stellen $z = \sigma_1, \cdots, \sigma_n$

gehörigen Residuen von $R(z)$. Die Grössen $S_1, \cdots, S_m$ sind gleichfalls die zu den Stellen $z = \varrho_1, \cdots, \varrho_m$ gehörigen Residuen von $\frac{1}{R(z)}$.

Setzt man unter Voraussetzung, dass $m \leq n$ ist, in der letzteren Gleichung (86) der Reihe nach $z = \varrho_1, \cdots, \varrho_m$, so verschwindet jedesmal das Glied $R(z)\,Q(z)$, weil $Q(z)$ höchstens nur an den Stellen $\sigma_\lambda + 1, \sigma_\lambda + 2, \cdots$ unendlich wird. Setzt man aber unter Voraussetzung, dass $m \geq n$ ist, in der ersteren Gleichung (87) der Reihe nach $z = \sigma_1, \cdots, \sigma_n$, so verschwindet jedesmal das Glied $\frac{P(z+1)}{R(z)}$, weil $P(z)$ höchstens nur an den Stellen $\varrho_\lambda, \varrho_\lambda - 1, \cdots$ unendlich wird. Im ersteren Falle werden $Q(\varrho_1 + 1), \cdots, Q(\varrho_m + 1)$ linear und homogen durch $P(\sigma_1), \cdots, P(\sigma_n)$, im letzteren Falle $P(\sigma_1), \cdots P(\sigma_n)$ linear und homogen durch $Q(\varrho_1 + 1), \cdots, Q(\varrho_m + 1)$ ausgedrückt.

Ist also $m = n$, so hat man gleichzeitig

$$\begin{cases} Q(\varrho_1 + 1) = \pm \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{R_\lambda P(\sigma_\lambda)}{\varrho_1 - \sigma_\lambda}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ Q(\varrho_n + 1) = \pm \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{R_\lambda P(\sigma_\lambda)}{\varrho_n - \sigma_\lambda}, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} P(\sigma_1) = \pm \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{S_\lambda\, Q(\varrho_\lambda + 1)}{\sigma_1 - \varrho_\lambda}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ P(\sigma_n) = \pm \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{S_\lambda\, Q(\varrho_\lambda + 1)}{\sigma_n - \varrho_\lambda}, \end{cases}$$

wobei wie oben vorausgesetzt werden muss, dass weder unter $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ noch unter $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ gleiche Grössen sich finden.

Weil nach der Voraussetzung die Bedingungen (85) erfüllt sind, so ist der reelle Theil von $\varkappa = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n - \varrho_1 - \cdots - \varrho_n$ positiv, und es gilt somit von $F(z), P(z), Q(z)$, falls $m = n$ ist, auch Alles, was im vorhergehenden § bei dem dritten Falle gesagt worden ist.

18.

In diesem § wollen wir voraussetzen, dass $F(z)$ zu denjenigen Gammafunctionen gehört, welche durch den Satz des § 11 charakterisirt worden sind. Es ist dann $m > n$. Bezeichnet ferner α eine reelle Zahl, die nicht keiner ist als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$, so verhält sich $F(z)$ regulär in der ganzen durch die Ungleichheit $z > \alpha$ charakterisirten Halbebene. Die Function

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(w)}{w-z} \, dw, \qquad b > \alpha, \; z < b,$$

erweist sich in diesem Falle als besonders bemerkenswerth. Dieses Integral, als Function von z betrachtet, verhält sich nämlich einerseits regulär in der ganzen, durch die Ungleichheit $z < b$ definirten Halbebene. Andererseits lässt sich sein Integrationsweg $u = b$, wie aus § 13 zu finden ist, in der Richtung der unendlich grossen positiven Zahlen parallel zu sich selbst beliebig weit verschieben, ohne dass das Integral aufhört, die Function $Q(z)$ darzustellen. Hieraus folgt offenbar, dass $Q(z)$ den Charakter einer ganzen Function hat, weshalb sie auch in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelbar sein muss. Diese Reihenentwickelung kann leicht mit Hülfe des Taylorschen Satzes erhalten werden oder durch gliedweise Integration derjenigen Reihe, die entsteht, falls der Ausdruck $\frac{F(w)}{w-z}$ unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $\frac{z}{w}$ entwickelt wird. Die so entstehende Reihe ist nämlich für $u = b$ gleichmässig convergent, falls z auf ein beliebiges endliches Gebiet beschränkt und b hinreichend gross angenommen wird, weshalb sie gliedweise integrirt werden kann.

Die Function $P(z)$ lässt sich in dem gegenwärtigen Falle, wie aus § 16 zu finden ist, durch die Reihe (82) darstellen. Mit Benutzung des Cauchyschen Satzes würde sie in allen Fällen, wo $m > n$ ist, durch Partialbruchreihen, in deren Gliedern keine additiven ganzen Functionen auftreten, dargestellt werden können. Dieser Gegenstand soll indess hier übergangen werden, weil derselbe in meinen früheren Arbeiten mit Hülfe des Mittag-Lefflerschen Satzes hinreichend behandelt worden ist.

19.

Nunmehr wollen wir zu den in § 14 erhaltenen Integralen

$$\Phi(x; c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{G}(w) \, \varphi(w, \lambda) \, x^{-w} \, dw$$

zurückkehren. Ist $\lambda = p - 1$ oder $= p - 2$ und p durch $p \geqq \frac{m+n}{2} > p - 1$ definirt, so hat dies Integral in dem durch (66) charakterisirten Bereiche von x einen bestimmten Sinn. Gehört das Integral überdies zu einem Parallelstreifen von der Breite *Eins* $(\alpha \leq u \leq \alpha + 1)$, wo $\mathfrak{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)$ sich überall regulär verhält, so genügt dasselbe einer *homogenen* hypergeometrischen Differentialgleichung, die in § 14 in der symbolischen Form erhalten worden ist:

$$(88) \qquad \left(x\frac{d}{dx} + \varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \varrho_m\right)y = \pm x\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_1 + 1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_1 + 1\right)y,$$

wo auf der rechten Seite das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $m + \lambda$ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Mit Hülfe der Identitäten

$$\left(x\frac{d}{dx} + \varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \varrho_m\right)y \equiv x^m\frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1}\,x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + a_0\,y,$$

$$\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_1 + 1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_n + 1\right)y \equiv x^n\frac{d^n y}{dx^n} + b_{n-1}\,x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + b_0\,y,$$

deren Constanten a und b mittelst der in Bezug auf ϱ identischen Gleichungen

$$(\varrho + \varrho_1)\cdots(\varrho + \varrho_m) \equiv a_0 + a_1\,\varrho + a_2\,\varrho(\varrho - 1) + \cdots + \varrho(\varrho - 1)\cdots(\varrho - m + 1)$$

$$(\varrho + \sigma_1 + 1)\cdots(\varrho + \sigma_n + 1) \equiv b_0 + b_1\,\varrho + b_2\,\varrho(\varrho - 1) + \cdots + \varrho(\varrho - 1)\cdots(\varrho - n + 1)$$

sich berechnen lassen, bringt man die obige Differentialgleichung entweder auf die Form

$$(89) \qquad (a_0 \mp b_0\,x)\,y + \cdots + (a_n \mp x)\,x^n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n+1}\,x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \cdots + x^m\frac{d^m y}{dx^m} = 0,$$

oder auf die Form

$$(90) \qquad (a_0 \mp b_0\,x)\,y + (a_1 \mp b_1\,x)\,x\frac{dy}{dx} + \cdots + (1 \mp x)\,x^n\frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

oder schliesslich auf die Form

$$(91) \qquad (a_0 \mp b_0 x)\,y + \cdots + (1 \mp b_m x)\,x^m\frac{d^m y}{dx^m} \mp b_{m+1}\,x^{m+1}\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} \mp \cdots \mp x^n\frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

je nachdem $m >$ oder $=$ oder $< n$ ist. In allen diesen Gleichungen ist das obere oder untere Zeichen $(\mp)$ zu nehmen, je nachdem $m + \lambda$ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Umgekehrt lässt sich auch jede Differentialgleichung der Form (89), (90) oder (91) mit Hülfe der obigen Identitäten auf die symbolische Form (88) bringen.

Die weiteren Untersuchungen können wir in Fällen, wo die Annahmen $m >=< n$ besondere Erörterungen erfordern, unbeschadet der Allgemeinheit auf solche Gamma- und hypergeometrischen Functionen beschränken, in deren Functional- resp. Differentialgleichungen die Zahl m nicht kleiner ist als n $(m \geqq n)$. Denn eine Functionalgleichung $F(z+1) = \pm R(z) F(z)$, wo $m < n$ ist, geht offenbar durch die Substitution $(-z, z)$ in eine Gleichung über, wo $m > n$ ist. Ebenso verwandelt sich eine Differentialgleichung der Form (91), wo also $m < n$ ist, durch die Substitution $(\frac{1}{x}, x)$ in eine Gleichung der Form (89), wo $m > n$ ist. Die analytischen Ausdrücke der bisher von uns ermittelten Lösungen der beiden Arten von Gleichungen erleiden hierbei auch nur unwesentliche Veränderungen. Insbesondere ist zu bemerken, dass die Integrale $\Phi(x; c)$ durch die Substitution $(\frac{1}{x}, x)$ ihren Sinn niemals verlieren können, falls der ursprungliche Werth $x = \varrho\, e^{i\theta}$ dem Gültigkeitsbereiche von $\Phi(x; c)$ angehört; denn alsdann gehört auch der neue Werth $\frac{1}{x} = \varrho^{-1} e^{-i\theta}$ demselben Bereiche an, wie aus (66) leicht zu finden ist.

Anders verhält es sich mit der Transformation der Gleichung $F(z+1) = R(z) F(z)$ in die Gleichung $F(z+1) = -R(z) F(z)$, oder vice versa. Denn diese Gleichungen werden nicht durch eine einfache Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen in einander übergeführt, sondern vielmehr durch Vertauschung der abhängigen Veränderlichen, indem man z. B. setzt $f(z) = e^{\pi i z} F(z)$ oder $f(z) = \sin \pi z\, F(z)$. Hierbei kann aber die durch (40) ausgedrückte Eigenschaft von $F(z)$ in gewissen Fällen bei $f(z)$ verloren gehen, wie aus dem gelegentlich der Gleichung (43) Gesagten zu finden ist. Wollte man, um diesen Übelstand zu vermeiden, $f(z) = \frac{F(z)}{\sin \pi z}$ setzen, so tritt ein anderer hervor, indem es in manchen Fällen keinen Parallelstreifen von der Breite *Eins* mehr giebt, wo $f(z)$ sich überall regulär verhielte. Die Differentialgleichungen (88), welche diesen Functionalgleichungen entsprechen, können zwar durch die Substitution $(-x, x)$ in einander transformirt werden, denn dieselbe verändert nur das Zeichen der rechten Seite von (88). Betrachten wir aber die Integrale $\Phi(x; c)$, so finden wir, dass sie in einem gewissen Sinne eine solche Substitution nicht unbedingt gestatten. Nehmen wir in der That $x = \varrho\, e^{i\theta}$ in dem durch (66) charakterisirten Gültigkeitsbereiche von $\Phi(x; c)$ an, so braucht der zu substituirende Werth $-x = \varrho\, e^{i(\theta \pm \pi)}$ demselben nicht jedenfalls anzugehören. In den Fällen aber, wo Φ die Substitution $(-x, x)$ gestattet, geht der

Ausdruck x^{-w} unter dem Integralzeichen entweder über in $e^{-\pi i w} x^{-w}$ oder in $e^{\pi i w} x^{-w}$, je nachdem es sich um einen halben Umlauf von x in positiver oder negativer Richtung um $x = 0$ handelt. Hiermit vergleiche man, was über die entsprechenden Functionalgleichungen soeben gesagt wurde. — Hieraus dürfte sich ergeben, dass es angemessen war, die beiden Functionalgleichungen $F(z+1) = \pm R(z) F(z)$ gleichzeitig neben einander in Betracht zu nehmen. Mit den entsprechenden Differentialgleichungen wollen wir auch in ähnlicher Weise verfahren.

Während auf der rechten Seite der Differentialgleichung (88) von $\Phi(x; c)$ das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $m + \lambda$ eine gerade oder ungerade Zahl ist, so befriedigt $F(z) = \mathfrak{G}(z)\varphi(z, \lambda)$ die Gleichung $F(z+1) = +R(z) F(z)$ oder $F(z+1) = -R(z) F(z)$, je nachdem $n + \lambda$ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Setzen wir

$$f(\varrho) = (\varrho + \varrho_1)(\varrho + \varrho_2) \cdots (\varrho + \varrho_m),$$

$$g(\varrho) = (\varrho + \sigma_1)(\varrho + \sigma_2) \cdots (\varrho + \sigma_n),$$

so ist

$$f(\varrho) = a_0 + a_1 \varrho + a_2 \varrho(\varrho - 1) + \cdots + \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - m + 1) = 0$$

die zur singulären Stelle $x = 0$ und

$$g(1 - \varrho) = b_0 - b_1 \varrho + b_2 \varrho(\varrho + 1) + \cdots + (-1)^n \varrho(\varrho + 1) \cdots (\varrho + n - 1) = 0$$

die zur singulären Stelle $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung der Differentialgleichung (88). Die Wurzeln der ersteren Gleichung sind also: $-\varrho_1, \cdots, -\varrho_m$, und die der letzteren: $\sigma_1 + 1, \cdots, \sigma_n + 1$. Ist $m = n$, so hat unsere Differentialgleichung noch eine singuläre Stelle in dem Punkte $x = (-1)^{m+\lambda}$. Die hierzu gehörige determinirende Gleichung ist:

$$\varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - n + 2)(\varrho + \varkappa + 1) = 0,$$

wo $\varkappa = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n - \varrho_1 - \cdots - \varrho_n$ ist.

Mit Benutzung der Bezeichnungen $f(\varrho)$, $g(\varrho)$ kann die Differentialgleichung (88) in der einfachen Form $f\left(x \frac{d}{dx}\right) y = \pm x\, g\left(x \frac{d}{dx} + 1\right) y$ geschrieben werden. Bekanntlich hat man

$$x^{\varrho} f\left(x \frac{d}{dx}\right) y = f\left(x \frac{d}{dx} - \varrho\right) x^{\varrho} y,$$

$$f\left(x \frac{d}{dx}\right) y = f\left(-t \frac{d}{dt}\right) y, \text{ falls } x = t^{-1} \text{ ist.}$$

Unsere Differentialgleichung, welche vermöge der ersteren Gleichung auch die Gestalt $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = (-1)^{m+\lambda} g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ annehmen kann, geht also durch die Substitution $x = t^{-1}$ in die Gleichung $g\left(-t\frac{d}{dt}+1\right)y = (-1)^{m+\lambda}\,t f\left(-t\frac{d}{dt}\right)y$ über, d. h. in

$$(t\frac{d}{dt}-\sigma_1-1)\cdots(t\frac{d}{dt}-\sigma_n-1)\,y = (-1)^{n+\lambda}\,t\,(t\frac{d}{dt}-\varrho_1)\cdots(t\frac{d}{dt}-\varrho_m)\,y$$

$$= (-1)^{n+\lambda}(t\frac{d}{dt}-\varrho_1-1)\cdots(t\frac{d}{dt}-\varrho_m-1)\,t\,y\,.$$

20.

Wir wollen zunächst die Frage entscheiden, wie viele linear unabhängige Integrale der Differentialgleichung $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \pm g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ in dem Ausdrucke $\Phi(x;c)$ enthalten sind, der fortwährend zu einem Parallelstreifen $(\alpha \leq u \leq \alpha+1)$ gehören soll, wo die unter dem Integralzeichen stehende Function $F(w) = \mathbf{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)$ sich überall regulär verhält. Mit Ausnahme des in § 7 charakterisirten Falles ist es sonst nöthig, die $\lambda+1$ $(\lambda = p-1$ oder $p-2)$ unbestimmten Constanten von φ gewissen Beschränkungen zu unterwerfen, damit $F(w)$ in dem fraglichen Streifen sich überall regulär verhalte. Hierdurch verwandelt sich $F(w)$, wie in § 9 gezeigt wurde, in einen Ausdruck $\mathbf{G}(w)\sin\pi(w-\beta_1)\cdots\sin\pi(w-\beta_\mu)\,\varphi(w,\lambda-\mu)$, wo φ nunmehr bloss $\lambda-\mu+1$ unbestimmte Constanten enthält.

Setzt man alle diese Constanten $A_0, A_1, \cdots, A_{\lambda-\mu}$ mit Ausnahme von A_0, die den Werth Eins bekomme, gleich der Null, so geht $\Phi(x;c)$ in ein particuläres Integral $\Phi_0(x;c)$ über. Setzt man alle Constanten A mit Ausnahme von A_1, die den Werth Eins bekomme, gleich der Null, so verwandelt sich $\Phi(x;c)$ in ein zweites particuläres Integral $\Phi_1(x;c)$, etc. Es lässt sich nun sehr einfach zeigen, dass die so erhaltenen Functionen ein System von $\lambda-\mu+1$ linear unabhängigen Integralen unserer Differentialgleichung bilden. In der That kann

$$\Phi(x;c) = A_0\,\Phi_0(x;c) + \cdots + A_{\lambda-\mu}\,\Phi_{\lambda-\mu}(x;c)$$

nach einem in § 14 erhaltenen Satze nur dann identisch verschwinden, wenn dies mit $F(w)$, als Function von w betrachtet, der Fall ist. Da dies aber offenbar nicht der Fall ist, wofern $\lambda-\mu \geq 0$ und keine zwei der in φ enthaltenen Constanten $c_1, c_2\cdots$ um eine ganze Zahl von einander differiren, so ist die Richtigkeit der Behauptung erwiesen.

21.

Die Anzahl der in

(92) $$\Phi(x;c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}\,dw$$

enthaltenen unbestimmten Constanten A ist die grösstmögliche, falls $\mathbf{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)$ zu den in § 7 characterisirten Gammafunctionen gehört, was nunmehr in diesem § und in den §§ 22, 24 angenommen werden soll. Diese Anzahl $\lambda+1$ ist dann $=p-1$ oder $=p$, je nachdem es sich um den ersteren oder letzteren Ausdruck (26) handelt. Im gegenwärtigen Falle erfüllen die reellen Theile der Constanten ϱ und σ von vorneherein die Bedingungen

$$\varrho_\mu < \alpha < \sigma_\nu\,, \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \cdots, m\\ \nu = 1, 2, \cdots, n\end{pmatrix},$$

wo α eine gewisse reelle Zahl bezeichnet; und es verhält sich dann $\mathbf{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)$ im Streifen $(\alpha \leqq u \leqq \alpha+1)$ überall regulär. Das zu diesem Streifen gehörige Integral (92) kann nach § 20 als homogene lineare Function mit unbestimmten Coefficienten von $\lambda+1$ linear unabhängigen Integralen der Differentialgleichung $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = (-1)^{m+\lambda}\,g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ aufgefasst werden.

Wir wollen jetzt den Gültigkeitsbereich von (92) unter verschiedenen Annahmen über die Zahlen m, n, λ etwas genauer betrachten. Dieser Bereich wurde in § 14 durch die Ungleichheiten (66):

(93) $$-\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)+\delta \leqq \theta \leqq +\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)-\delta$$

charakterisirt, wo δ eine beliebig kleine positive Zahl und θ das Argument von $x=\varrho\,e^{i\theta}$ bezeichnet. Der absolute Betrag ϱ kommt also hierbei gar nicht in Betracht. Liegt θ ausserhalb des von $-\pi\left(\frac{m+n}{2}-\lambda\right)$ bis $+\pi\left(\frac{m+n}{2}-\lambda\right)$ reichenden Intervalls, so hat das Integral (92), wenigstens bei völlig unbestimmten Werthen der in $\varphi(w,\lambda)$ enthaltenen Constanten A, keinen bestimmten Sinn.

Es können nun überhaupt *vier* Fälle in Betracht genommen werden: je nachdem $m+n$ eine gerade oder ungerade Zahl ist und λ jedesmal gleich $p-2$ oder $p-1$ angenommen wird. Den Gültigkeitsbereich von $\Phi(x;c)$ in diesen verschieden Fällen ersieht man aus der folgenden, aus (93) mit Beachtung von $p \geqq \frac{m+n}{2} > p-1$ sich ergebenden Zusammenstellung:

$$m + n = 2k:$$

(94) $$\begin{cases} -2\pi + \delta \leqq \theta \leqq +2\pi - \delta, \text{ für } \lambda = p - 2, \\ -\pi + \delta \leqq \theta < +\pi - \delta, \text{ für } \lambda = p - 1. \end{cases}$$

$$m + n = 2k + 1:$$

(95) $$\begin{cases} -\frac{3\pi}{2} + \delta < \theta \leqq + \frac{3\pi}{2} - \delta, \text{ für } \lambda = p - 2, \\ -\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \theta \leqq + \frac{\pi}{2} - \delta, \text{ für } \lambda = p - 1. \end{cases}$$

Da δ eine unendlich kleine Grösse bezeichnen darf, so wird der Gültigkeitsbereich von $\Phi(x; c)$ im *ersten* Falle durch eine die x-Ebene — mit Ausnahme der positiven Hälfte der reellen Axe, wo nur einfache Bedeckung stattfindet — doppelt bedeckende Fläche geometrisch dargestellt.

Der Gültigkeitsbereich von $\Phi(x; c)$ ist im *zweiten* Falle eine die x-Ebene — mit Ausnahme der negativen Hälfte der reellen Axe, wo keine Bedeckung stattfindet — einfach bedeckende Fläche.

Im *dritten* Falle ist der Gültigkeitsbereich von $\Phi(x; c)$ eine Fläche, welche diejenige Hälfte der x-Ebene, wo der reelle Theil von x positiv oder gleich der Null ist, nur einfach, den übrigen Theil aber zweifach bedeckt.

Im *vierten* Falle schliesslich bedeckt der Gültigkeitsbereich von $\Phi(x; c)$ nur, und zwar einfach, diejenige Hälfte der x-Ebene, wo der reelle Theil von x positiv ist.

Das oben Dargelegte gilt für den Fall, dass die Constanten A des Ausdrucks $\varphi(z, \lambda)$ als völlig unbestimmte Grössen betrachtet werden. In § 3 ist aber gezeigt worden, dass dieser Ausdruck, wofern die A den beiden Bedingungen (16) unterworfen werden, sich in den Ausdruck $\varphi(z, \lambda - 2)$ verwandelt, der noch $\lambda - 1$ unbestimmte Constanten A enthält; woraus weiter folgt, dass die sämmtlichen Ausdrücke $\varphi(z, \lambda - 2)$, $\varphi(z, \lambda - 4)$, $\cdots$ als specielle Fälle in $\varphi(z, \lambda)$ enthalten sind. Zugleich ergiebt sich, dass beispielsweise das in $\Phi(x; c)$ enthaltene Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{G}(w)\, \varphi(w, \lambda - 2)\, x^{-w}\, dw,$$

welches als homogene lineare Function mit unbestimmten Coefficienten von $\lambda - 1$ linear unabhängigen Integralen der Differentialgleichung

$$f\left(x \frac{d}{dx}\right) y = (-1)^{m+\lambda} g\left(x \frac{d}{dx}\right) x y$$

betrachtet werden kann, einen Gültigkeitsbereich besitzt, der durch die Ungleichheiten

(96) $$-\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)-2\pi+\delta\leq\theta\leq+\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)+2\pi-\delta$$

charakterisirt werden kann. Offenbar ist die Fläche (96) zusammengesetzt aus der Fläche (93) und zwei Blättern, von denen das eine als Fortsetzung der Fläche (93) in positiver, das andere als Fortsetzung derselben in negativer Richtung um $x=0$ als Windungspunkt betrachtet werden kann. Jedes dieser Blätter bedeckt die ganze x-Ebene einfach.

Von dem Gültigkeitsbereiche

$$-\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)-4\pi+\delta\leq\theta\leq+\pi\left(\tfrac{m+n}{2}-\lambda\right)+4\pi-\delta$$

des noch specielleren Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathbf{G}(w)\,\varphi(w,\lambda-4)\,x^{-w}\,dw\,,$$

welches als homogene lineare Function mit unbestimmten Coefficienten von $\lambda-3$ linear unabhängigen Integralen der genannten Differentialgleichung betrachtet werden kann, gilt mit Rücksicht auf den Bereich (96) offenbar dasselbe, was über (96) mit Rücksicht auf (93) gesagt worden ist; etc.

Fährt man mit der Specialisirung der Constanten A in dieser Weise fort, so gelangt man schliesslich entweder zu dem Integrale

(97) $$\frac{A}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathbf{G}(w)\,x^{-w}\,dw$$

oder zu dem Integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathbf{G}(w)\sin\pi(w-c_1)\left[A_0+A_1\operatorname{cotg}\pi(w-c_1)\right]dw\,,$$

je nachdem λ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Der Gültigkeitsbereich des Integrals (97) wird durch die Ungleichheiten

$$-\tfrac{m+n}{2}\pi+\delta\leq\theta\leq+\tfrac{m+n}{2}\pi-\delta$$

charakterisirt. Wie die Function $\mathbf{G}(z)$ als eine Grundform betrachtet werden kann, aus der alle im ersten Abschnitte charakterisirten Gammafunctionen durch Multiplication mit periodischen Ausdrücken $\varphi(z,\lambda)$ enstehen, so werden wir in § 23 finden, dass alle Integrale der mit $\Phi(x;c)$ bezeichneten Form aus dem Integrale (97) durch analytische Fortsetzung, verbunden mit gewissen anderen einfachen Operationen, erhalten werden können.

Bei den Erörterungen dieses § war es nicht nöthig anzugeben, ob die Zahl m gleich, grösser oder kleiner als n sei.

22.

Weil das im Vorhergehenden § erörterte Integral (92) $\Phi(x; c)$ als homogene lineare Function mit unbestimmten Coefficienten von $\lambda + 1$ linear unabhängigen Integralen der Differentialgleichung $f\left(x\frac{d}{dx}\right) y = (-1)^{m+\lambda} g\left(x\frac{d}{dx}\right) x y$ betrachtet werden kann, so entsteht ungezwungen die Frage: *kann $\Phi(x; c)$ jemals das allgemeine Integral dieser Gleichung darstellen*, d. h. bilden die in $\Phi(x, c)$ enthaltenen linear unabhängigen Integrale jemals ein Fundamentalsystem von Integralen der genannten Gleichung? Hierfür ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass die Anzahl $\lambda + 1$ derselben gleich der Ordnungszahl der Differentialgleichung sei. Diese Ordnungszahl ist m, falls $m \geq n$ ist, was unbeschadet der Allgemeinheit (§ 19) angenommen werden kann. Nun ist aber λ entweder $= p - 2$ oder $= p - 1$, je nachdem es sich um die Gleichung $f\left(x\frac{d}{dx}\right) y = (-1)^{m+p} g\left(x\frac{d}{dx}\right) x y$ oder $f\left(x\frac{d}{dx}\right) y = (-1)^{m+p-1} g\left(x\frac{d}{dx}\right) x y$ handelt. Wir nehmen den letzteren Fall an, weil die fragliche Anzahl $\lambda + 1$ dann die grösstmögliche, d. h. gleich p wird. Setzen wir nun $p = m$ in den Ungleichheiten $p \geq \frac{m+n}{2} > p - 1$, so folgt $m \geq n > m - 2$. Damit also $p = m$ sei, muss entweder $m = n + 1$ oder $m = n$ sein. Aus jeder dieser Gleichungen folgt auch umgekehrt, dass $p = m$ ist.

Ist also entweder $m = n + 1$ oder $m = n$, so wird das allgemeine Integral der Differentialgleichung $f\left(x\frac{d}{dx}\right) y = -g\left(x\frac{d}{dx}\right) x y$ durch den Ausdruck (92), *falls darin $\lambda = p - 1 = m - 1$ angenommen wird, dargestellt.* In allen anderen Fällen (den Fall $n = m + 1$ ausgenommen) ist die Anzahl $\lambda + 1$ der in $\Phi(x; c)$ enthaltenen linear unabhängigen Integralen kleiner als die Ordnungszahl der entsprechenden Differentialgleichung.

Diese beiden bemerkenswerthen Fälle ($m = n + 1$ und $m = n$) wollen wir in diesem § etwas genauer erörtern.

Es sei erstens $m = n + 1$. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung $(n + 1)$:ter Ordnung

$$(98)\quad \begin{cases} \left(x\frac{d}{dx} + \varrho_1\right) \cdots \left(x\frac{d}{dx} + \varrho_n\right)\left(x\frac{d}{dx} + \varrho_{n+1}\right) y = -\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_1\right) \cdots \left(x\frac{d}{dx} + \sigma_n\right) x y \\ (a_0 + b_0 x) y + (a_1 + b_1 x) x \frac{dy}{dx} + \cdots + (a_n + x) x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n+1} \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = 0 \end{cases}$$

deren Constanten ϱ *und* σ *die Bedingungen* $\varrho_\lambda < \alpha < \sigma_\mu$ $(\lambda = 1, 2, \cdots m; \mu = 1, 2, \cdots, n)$ *erfüllen, lässt sich nach dem Obigen in der Form darstellen:*

$$(99)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_n)\Gamma(w-\varrho_{n+1})\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\varphi(w,n)x^{-w}dw,$$

wo c *die Bedingung* $\alpha \leq c \leq \alpha + 1$ *erfüllt. Der Gültigkeitsbereich dieses,* $n+1$ *unbestimmte Constanten* A *enthaltenden Ausdrucks wird nach* (95) *durch die Ungleichheiten*

$$(100)\qquad -\tfrac{\pi}{2} + \delta \leqq \theta \leqq +\tfrac{\pi}{2} - \delta$$

charakterisirt. Derselbe ist also eine Fläche, die nur, und zwar einfach, diejenige Hälfte der x*-Ebene bedeckt, wo der reelle Theil von* x *positiv ist.* Die Differentialgleichung (98) geht durch die Substitution $(-x, x)$ über in

$$(101)\quad \begin{cases} \left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_{n+1}\right)y = +\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n\right)xy \\ (a_0-b_0x)y+(a_1-b_1x)x\frac{dy}{dx}+\cdots+(a_n-x)x^n\frac{d^ny}{dx^n}+x^{n+1}\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=0. \end{cases}$$

Der Ausdruck

$$(102)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_n)\Gamma(w-\varrho_{n+1})\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\varphi(w,n-1)x^{-w}dw,$$

der als homogene lineare Function mit unbestimmten Coefficienten von n linear unabhängigen Integralen der Gleichung (101) aufgefasst werden kann, besitzt den in (95) angegebenen Gültigkeitsbereich

$$(103)\qquad -\tfrac{3\pi}{2} + \delta \leqq \theta \leqq +\tfrac{3\pi}{2} - \delta,$$

der eine Fläche ist, welche diejenige Hälfte der x-Ebene, wo der reelle Theil von x positiv oder gleich der Null ist, nur einfach, den übrigen Theil ober zweifach bedeckt. Der Ausdruck (102), dessen Bereich (103) den Bereich (100) enthält, kann, wie aus § 23 zu finden ist, durch analytische Fortsetzung, verbunden mit gewissen anderen Operationen, in den Ausdruck (99) übergeführt werden.

Es sei zweitens $m = n$. *Das allgemeine Integral der Differentialgleichung* n*:ter Ordnung*

(104)
$$\begin{cases}\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y=-\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n\right)xy\\ (a_0+b_0x)y+(a_1+b_1x)x\frac{dy}{dx}+\cdots+(1+x)x^n\frac{d^ny}{dx^n}=0,\end{cases}$$

deren Constanten ϱ *und* σ *die Bedingungen* $\varrho_\lambda<\alpha<\sigma_\mu$ *erfüllen, lässt sich dann in der Form darstellen:*

(105)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_n)\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\,\varphi(w,n-1)x^{-w}\,dw,$$

wo c die Bedingung $\alpha\leqq c\leqq\alpha+1$ *erfüllt. Dieser, n unbestimmte Constanten A enthaltende Ausdruck besitzt den in* (94) *angegebenen Gültigkeitsbereich*

(106)
$$-\pi+\delta\leqq\theta\leqq+\pi-\delta,$$

der eine Fläche ist, welche die x-Ebene — mit Ausnahme der negativen Hälfte der reellen Axe, wo keine Bedeckung stattfindet — einfach bedeckt. Die Differentialgleichung (104) geht durch die Substitution $(-x,x)$ über in

(107)
$$\begin{cases}\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y=\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n\right)xy\\ (a_0-b_0x)y+(a_1-b_1x)x\frac{dy}{dx}+\cdots+(1-x)x^n\frac{d^ny}{dx^n}=0.\end{cases}$$

Der Ausdruck

(108)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_n)\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\,\varphi(w,n-2)x^{-w}\,dw.$$

der als homogene lineare Function mit unbestimmten Coefficienten von $n-1$ linear unabhängigen Integralen dieser Gleichung aufgefasst werden kann, besitzt den in (94) angegebenen Gültigkeitsbereich

$$-2\pi+\delta<\theta<+2\pi-\delta,$$

der eine Fläche ist, welche die ganze x-Ebene — mit Ausnahme der positiven Hälfte der reellen Axe, wo nur einfache Bedeckung stattfindet — doppelt bedeckt.

In welchem Zusammenhange stehen nun diese Ergebnisse mit der allgemeinen Theorie der linearen, insbesondere der hypergeometrischen Differential-

gleichungen? Die Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ sind als singuläre Stellen unserer Integrale $\Phi(x; c)$ zu betrachten. Jede beliebige andere Stelle ist aber, wofern sie nur im Gültigkeitsbereiche des betreffenden Integrals liegt, eine reguläre Stelle desselben. Betrachten wir nun die Differentialgleichung (107), so finden wir, dass sie, ausser in den Punkten $x = 0$ und $x = \infty$, noch eine singuläre Stelle im Punkte $x = 1$ hat, dessen zugehörige determinirende Gleichung nach § 19 die Wurzeln $\varrho = 0, 1, 2, \cdots, n-2$ und $-\varkappa - 1$ besitzt. In dem obigen Falle, wo die Bedingungen $\varrho_\lambda < \alpha < \sigma_\mu$ erfüllt sind, ist der reelle Theil von $\varkappa = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n - \varrho_1 - \cdots - \varrho_n$ positiv, und somit der reelle Theil der Wurzel $\varrho = -\varkappa - 1$ sicherlich negativ. Nach der allgemeinen Theorie lässt sich das allgemeine Integral von (107) in der Umgebung der Stelle $x = 1$ in der Form

$$(109) \qquad C_0 \mathfrak{P}(1-x) + C_1(1-x)\mathfrak{P}_1(1-x) + \cdots + C_{n-2}(1-x)^{n-2}\mathfrak{P}_{n-2}(1-x)$$
$$+ C_{n-1}(1-x)^{-\varkappa-1}\mathfrak{P}_{n-1}(1-x)$$

darstellen, wo die $\mathfrak{P}$ gewöhnliche Potenzreihen bezeichnen. Weil das letzte Glied dieses Ausdrucks für $x = 1$ unendlich wird, so muss das in der Umgebung von $x = 1$ regulär sich verhaltende Integral (108) in derselben Umgebung mit dem Ausdrucke identisch sein, der dadurch erhalten wird, dass man in (109) $C_{n-1} = 0$ setzt, die übrigen C aber als völlig unbestimmte Constanten beibehält. Unser Integral (108) stellt aber nicht nur diesen Ausdruck, sondern auch alle daraus, durch analytische Fortsetzung innerhalb der Fläche $-2\pi + \delta \leq \theta \leq +2\pi - \delta$ entstehenden Potenzreihen dar.

Weil die Differentialgleichung (104) aus (107) durch die Substitution $(-x, x)$ erhalten wird, wodurch die singuläre Stelle $x = 1$ nach dem Punkte $x = -1$ verlegt wird, so ist jene von dieser Gleichung nicht wesentlich verschieden, sondern nur eine andere Form derselben. *Nach* dieser Transformation lässt sich aber selbst das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung durch den Ausdruck (105) darstellen, dessen Gültigkeitsbereich die Fläche (106) ist. Dass diese Fläche die negative Hälfte der reellen Axe gar nicht bedeckt, stimmt mit dem Umstande gut überein, dass die singuläre Stelle $x = -1$, an der das allgemeine Integral unendlich wird, nunmehr gerade auf dieser Hälfte liegt. Aus dem § 23 wird man finden, dass der Ausdruck (108) durch analytische Fortsetzung, verbunden mit gewissen anderen Operationen, in den Ausdruck (105) übergehen kann, dessen Gültigkeitsbereich nur ein Theil des Bereichs des ersteren ist.

23.

In diesem § soll gezeigt werden, dass alle von uns mit $\Phi(x; c)$ bezeichneten Integrale aus dem Integrale

$$(110)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{G}(w)\, x^{-w}\, dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\, x^{-w}\, dw$$

durch analytische Fortsetzung, verbunden mit gewissen anderen einfachen Operationen, erhalten werden können. Hierbei ist die Annahme keineswegs nöthig, dies Integral gehöre zu einem Parallelstreifen von der Breite *Eins*, wo $\mathbf{G}(w)$ sich überall regulär verhält. (Einen solchen Streifen braucht es gar nicht zu geben.) Wir setzen nur voraus, dass der Integrationsweg $u = c$ $(w = u + i v)$ durch keine Unendlichkeitsstelle von $\mathbf{G}(w)$ hindurchgeht. Der Gültigkeitsbereich des Integrals, als Function von $x = \varrho\, e^{i\theta}$ betrachtet, ist eine durch die Ungleichheiten

$$(111)\qquad -\tfrac{m+n}{2}\pi + \delta \leq \theta \leq +\tfrac{m+n}{2} - \delta$$

charakterisirte Fläche. Weil $\varphi(w, \lambda)$ als homogene lineare Function von $\lambda + 1$ Ausdrücken der Form $\sin\pi(w - c_1)\cdots\sin\pi(w - c_\lambda)$ betrachtet werden kann, so können wir auch das Integral $\Phi(x; c)$ als homogene lineare Function von ebenso vielen Integralen der Form

$$(112)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{G}(w)\sin\pi(w-c_1)\cdots\sin\pi(w-c_\lambda)\, x^{-w}\, dw$$

auffassen. Die Richtigkeit unserer Behauptung ist also erwiesen, wenn wir zeigen, das dies Integral aus (110) durch analytische Fortsetzung etc. erhalten werden kann. Der Gültigkeitsbereich von (112) ist eine durch (93) charakterisirte Fläche, die offenbar in der Fläche (111) vollständig enthalten ist. Es sei $x = \varrho\, e^{i\theta}$ ein beliebiger Werth im Bereiche von (110). Bei einem halben Umlaufe von x um $x = 0$ geht der unter dem Zeichen des Integrals (110) stehende Factor x^{-w} in $e^{-\pi i w} x^{-w}$ oder in $e^{\pi i w} x^{-w}$ über, je nachdem der Umlauf in positiver oder in negativer Richtung um $x = 0$ geschieht. Das Integral (110) heisse y. Bezeichnen wir nun durch $[y]^{\frac{1}{2}}$ den Werth, den y nach dem ersteren, durch $[y]^{-\frac{1}{2}}$ den Werth, den y nach dem letzteren Umlaufe bekommt, so ist offenbar

$$\frac{e^{-\pi i c_1}[y]^{-\frac{1}{2}} - e^{\pi i c_1}[y]^{\frac{1}{2}}}{2i} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{G}(w)\sin\pi(w-c_1)\,x^{-w}\,dw\,.$$

Fährt man auf diese Weise fort, indem man statt c_1 die Constanten $c_2, \cdots c_\lambda$ nach einander benutzt, so gelangt man zu dem Integrale (112), welches somit als homogene lineare Function von gewissen analytischen Fortsetzungen des Integrals (110) aufgefasst werden kann. Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung erwiesen.

Setzen wir

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{G}(w)\,\varphi(w, \lambda-1)\,x^{-w}\,dw\,,$$

$$y_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{G}(w)\,\varphi(w, \lambda-1)\sin\pi(w-a)\,x^{-w}\,dw\,,$$

so ist

$$y_1 = -\frac{e^{\pi i a}[y]^{\frac{1}{2}} - e^{-\pi i a}[y]^{-\frac{1}{2}}}{2i}\,.$$

Aus § 3 ist leicht zu finden, dass der allgemeine Ausdruck $\varphi(w, \lambda)$ mit $\varphi(w, \lambda-1)\sin\pi(w-a)$ identisch ist, falls a als unbestimmte Constante aufgefasst wird. Hiermit ist auch der bei Gelegenheit der Ausdrücke (99), (102) und (105), (108) versprochene Nachweis erbracht.

24.

Die in den §§ 21, 22 erörterten Integrale $\Phi(x; c)$ sollen in diesem § mit Benutzung des Cauchyschen Satzes durch Potenzreihen dargestellt werden. Nach den in den genannten §§ geltenden Voraussetzungen erfüllen die Constanten ϱ und σ von vorneherein die Bedingungen $\varrho_\mu < \alpha < \sigma_\nu$ ($\mu = 1, 2, \cdots, m$; $\nu = 1, 2, \cdots, n$), weshalb $\mathbf{G}(u + iv)$, und somit auch $\mathbf{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)$, in dem Streifen ($\alpha \leqq u \leqq \alpha + 1$) sich überall regulär verhält. Es sei c eine die Bedingung $\alpha \leqq c \leqq \alpha + 1$ erfüllende reelle Zahl; d. h.

$$\Phi(x; c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathbf{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)\,x^{-w}\,dw$$

ein zu dem genannten Streifen gehöriges Integral. Weil die Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{G}(w)$ als Glieder in den aritmetischen Reihen

$$\varrho_k, \varrho_k - 1, \cdots, \varrho_k - \nu, \cdots \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\sigma_k + 1, \sigma_k + 2, \cdots, \sigma_k + 1 + \nu, \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

enthalten sind, so kann offenbar c in dem Intervalle $\alpha \leq c \leq \alpha + 1$ so angenommen werden, dass sowohl $c + \nu'$ als $c - \nu'$ für jeden ganzzahligen Werth von ν' von den reellen Theilen der Glieder dieser Reihen verschieden ist. Alsdann haben (§ 14) die beiden Integrale $\Phi(x; c + \nu')$ und $\Phi(x; c - \nu')$ für jeden ganzzahligen Werth von ν' gleichzeitig mit $\Phi(x; c)$ einen bestimmten Sinn. Vermöge der mit Hülfe des Cauchyschen Satzes erhaltenen Gleichung (70) des § 16 hat man nun:

$$\Phi(x; c) = + \sum_k \sum_\nu R_k^{(\nu)} + \Phi(x; c - \nu'), \tag{113}$$

$$\Phi(x; c) = - \sum_k \sum_\nu S_k^{(\nu)} + \Phi(x; c + \nu'). \tag{114}$$

In der ersteren Gleichung bezieht sich die Summation nur auf diejenigen Residuen des Ausdrucks $\mathbf{G}(w)\varphi(w, \lambda)x^{-w}$, welche zu den, zwischen den Parallelen $u = c$ und $u = c - \nu'$ liegenden Unendlichkeitsstellen $\varrho_k - \nu$ desselben Ausdrucks gehören. Die Summation in (114) ist in analoger Weise beschränkt auf die Residuen, welche zu den, zwischen den Parallelen $u = c$ und $u = c + \nu'$ gelegenen Unendlichkeitsstellen $\sigma_k + 1 + \nu$ gehören.

Die Form der Residuen R und S ist abhängig von dem Umstande, ob die zugehörigen Unendlichkeitsstellen von $\mathbf{G}(w)$ erster oder höherer Ordnung sind. Die Residuen R werden der Form nach am einfachsten, wenn die Stellen $\varrho_k - \nu$ erster Ordnung sind, weshalb zunächst angenommen werden soll, dass die Differenz irgend zweier der Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ keine ganze Zahl ist. Die Residuen S werden gleichfalls der Form nach am einfachsten, wofern die Stellen $\sigma_k + 1 + \nu$ erster Ordnung sind, weshalb bei Ermittelung der S ebenfalls zunächst angenommen wird, die Differenz irgend zweier der Grössen $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ sei keine ganze Zahl.

Unter den obigen Voraussetzungen über die Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ und $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ ist:

$$R_k^{(\nu)} = \lim_{w = \varrho_k - \nu} (w - \varrho_k + \nu)\, \mathbf{G}(w)\, \varphi(w, \lambda)\, x^{-w},$$

$$S_k^{(\nu)} = \lim_{w = \sigma_k + 1 + \nu} (w - \sigma_k - 1 - \nu)\, \mathbf{G}(w)\, \varphi(w, \lambda)\, x^{-w}.$$

Setzt man nun bei der Ermittelung von $R_k^{(\nu)}$:

$$\mathfrak{G}(w) = \Gamma(w-\varrho_k)\prod_{\mu=1}^{m}{}' \Gamma(w-\varrho_\mu)\cdot\prod_{\mu=1}^{n}\Gamma(1+\sigma_\mu-w),$$

(wo der Strich das Fortlassen des Factors, wo $\mu = k$ ist, andeutet), bei der Ermittelung von $S_k^{(\nu)}$ aber:

$$\mathfrak{G}(w) = \Gamma(1+\sigma_k-w)\prod_{\mu=1}^{n}{}' \Gamma(1+\sigma_\mu-w)\cdot\prod_{\mu=1}^{m}\Gamma(w-\varrho_\mu),$$

und beachtet die Formeln:

$$\varphi(w+\nu, \lambda) = (-1)^{\lambda\nu}\varphi(w, \lambda),$$

$$\lim_{w=-\nu}(w+\nu)\Gamma(w) = \lim\frac{(w+\nu)\Gamma(w+\nu)}{w(w+1)\cdots(w+\nu-1)} = \frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}},$$

$$\lim_{w=\nu}(w-\nu)\Gamma(-w) = \lim\frac{(w-\nu)\Gamma(\nu-w)}{(-w)(-w+1)\cdots(-w+\nu-1)} = -\frac{(-1)^\nu}{\underline{|\nu}},$$

so ergiebt sich:

$$(115)\quad R_k^{(\nu)} = \varphi(\varrho_k)\, x^{-\varrho_k}(-1)^{\lambda\nu}\frac{(-x)^\nu}{\underline{|\nu}}\prod_{\mu=1}^{m}{}' \Gamma(\varrho_k-\varrho_\mu-\nu)\cdot\prod_{\mu=1}^{n}\Gamma(1+\sigma_\mu-\varrho_k+\nu),$$

$$(116)\quad S_k^{(\nu)} = -\varphi(\sigma_k+1)\left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma_k+1}(-1)^{\lambda\nu}\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)^\nu}{\underline{|\nu}}\prod_{\mu=1}^{n}{}' \Gamma(\sigma_\mu-\sigma_k-\nu)\cdot\prod_{\mu=1}^{m}\Gamma(1+\sigma_k-\varrho_\mu+\nu),$$

wo $\varphi(\sigma_k+1) = \varphi(\sigma_k+1, \lambda)$ ist.

In dem allgemeinen Falle, wo $w = \varrho - \nu$ eine Unendlichkeitsstelle β:ter Ordnung von $\mathfrak{G}(w)\varphi(w)x^{-w}$ ist, hat man den Coefficienten von $(w-\varrho+\nu)^{-1}$ in der Entwickelung von $\mathfrak{G}(w)\varphi(w)x^{-w}$ nach ganzen Potenzen von $w-\varrho+\nu$ zu ermitteln. Dieser Coefficient ist das zur Stelle $w = \varrho - \nu$ gehörige Residuum $R_\varrho^{(\nu)}$. Setzt man

$$x^{-w} = x^{-\varrho+\nu}\left[1-\frac{(w-\varrho+\nu)}{1}.\log x + \frac{(w-\varrho+\nu)^2}{1.2}(\log x)^2 - \cdots\right],$$

$$(117)\qquad \mathfrak{G}(w)\varphi(w) = \frac{C_\beta^{(\nu)}}{(w-\varrho+\nu)^\beta}+\cdots+\frac{C_1^{(\nu)}}{w-\varrho+\nu}+\mathfrak{P}(w-\varrho+\nu),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe bedeutet, so ergiebt sich der Werth

$$(118)\qquad R_\varrho^{(\nu)} = x^{-\varrho+\nu}\left[C_1^{(\nu)} - C_2^{(\nu)}\log x + \cdots + (-1)^{\beta-1}\frac{C_\beta^{(\nu)}}{\underline{|\beta-1}}(\log x)^{\beta-1}\right],$$

wo die C Grössen bezeichnen, die erhalten werden, indem man die Entwickelung (117) bewerkstelligt.

Nachdem nun gezeigt worden ist, wie die Residuen R und S in jedem Falle bestimmt werden können, sollen die Gleichungen (113), (114) unter der Annahme betrachtet werden, dass ν' eine ohne Ende wachsende positive ganze Zahl bezeichnet. Um das Verhalten der Integrale $\Phi(x; c-\nu')$ und $\Phi(x; c+\nu')$ dabei leichter übersehen zu können, führen wir ihre Integrationswege $u = c - \nu'$ und $u = c + \nu'$ durch die Substitutionen $w = y - \nu'$ und $w = y + \nu'$ in die Lage $y = c$ über. Zugleich wollen wir aber statt y wieder w als Zeichen der Integrationsvariable herstellen. Machen wir auch von der Functionalgleichung des Ausdrucks $\mathbf{G}(w)\varphi(w)$ Gebrauch, so haben wir:

$$\Phi(x; c-\nu') = \frac{\pm 1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{\nu'}}{R(w-1)R(w-2)\cdots R(w-\nu')}\mathbf{G}(w)\varphi(w)x^{-w}\,dw\,.$$

$$\Phi(x; c+\nu') = \frac{\pm 1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{R(w)R(w+1)\cdots R(w+\nu'-1)}{x^{\nu'}}\mathbf{G}(w)\varphi(w)x^{-w}\,dw\,.$$

Mit Benutzung der in § 15 ermittelten Gleichungen (78), (79) ergiebt sich nun leicht Folgendes:

Ist $m > n$, so nähert sich $\Phi(x; c-\nu')$ mit wachsendem ν' der Null, wie gross auch der absolute Betrag von x sei. Die rechte Seite von (113) geht also dabei in eine beständig convergirende Reihenentwickelung über.

Ist $m = n$ und $|x| < 1$, so nähert sich $\Phi(x; c-\nu')$ mit wachsendem ν' der Grenze Null. Ist aber $m = n$ und $|x| > 1$, so nähert sich $\Phi(x; c+\nu')$ mit wachsendem ν' derselben Grenze. Im ersteren Falle geht die rechte Seite von (113) in eine für $|x| < 1$, im letzteren Falle die rechte Seite von (114) in eine für $|x| > 1$ convergirende Reihenentwickelung über.

Ist schliesslich $m < n$, so nähert sich $\Phi(x; c+\nu')$ mit wachsendem ν' der Null, wie *klein* auch der absolute Betrag von x sei. Dabei geht also die rechte Seite von (114) in eine beständig convergirende Reihenentwickelung über.

Erfüllen die Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ *insbesondere die Bedingung, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl ist, so besitzen die Residuen* R *die durch* (115) *angegebenen Werthe, und es ist also, falls* $m \geq n$ *ist:*

$$(119)\quad \Phi(x; c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\varphi(w,\lambda)x^{-w}\,dw$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \varphi(\varrho_k)\, x^{-\varrho_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\lambda\nu} \frac{(-x)^\nu}{\underline{|\nu}} \prod_{\mu=1}^{m}{}' \Gamma(\varrho_k - \varrho_\mu - \nu) \cdot \prod_{\mu=1}^{n} \Gamma(1 + \sigma_\mu - \varrho_k + \nu).$$

Im Falle $m = n$ convergirt die rechte Seite für $|x| < 1$; ist aber für $|x| > 1$ offenbar divergent. Im Falle $m > n$ ist dieselbe eine beständig convergirende Reihenentwickelung.

Erfüllen die Grössen $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ *in besonderen Fällen die Bedingung, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl ist, so besitzen die Residuen S die durch* (116) *angegebenen Werthe, und es ist somit, falls* $m \leq n$ *ist:*

$$(120)\quad \Phi(x;c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1) \cdots \Gamma(w-\varrho_m)\, \Gamma(1+\sigma_1-w) \cdots \Gamma(1+\sigma_n-w)\, \varphi(w,\lambda)\, x^{-w}\, dw$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi(\sigma_k+1) \left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma_k+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\lambda\nu} \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)^\nu}{\underline{|\nu}} \prod_{\mu=1}^{n}{}' \Gamma(\sigma_\mu - \sigma_k - \nu) \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \Gamma(1+\sigma_k-\varrho_\mu+\nu).$$

Im Falle $m = n$ convergirt die rechte Seite für $|x| > 1$, ist aber für $|x| < 1$ offenbar divergent. Im Falle $m < n$ ist dieselbe eine beständig convergirende Reihenentwickelung.

Der Fall $m = n$ ist also dadurch bemerkenswerth, dass das Integral $\Phi(x;c)$ durch zwei verschiedene Reihenentwickelungen dargestellt wird, je nachdem $|x| < 1$ oder $|x| > 1$ ist: *die erstere stellt das Integral in der Umgebung von* $x = 0$, *die letztere in der Umgebung von* $x = \infty$ *dar.*

Man vergleiche die verschiedenen, nur theilweise sich bedeckenden Gültigkeitsbereiche der beiden Seiten jeder dieser Gleichungen mit einander.

Die rechte Seite von (119) hat die Form

$$x^{-\varrho_1}\, \mathfrak{P}_1(x) + x^{-\varrho_2}\, \mathfrak{P}_2(x) + \cdots + x^{-\varrho_m}\, \mathfrak{P}_m(x),$$

die rechte Seite von (120) aber die Form

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma_1+1} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma_2+1} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma_n+1} \mathfrak{P}_n\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo die $\mathfrak{P}(t)$ gewöhnliche, nach positiven ganzzahligen Potenzen von t fortschreitende Reihen bezeichnen. Dies stimmt auch damit überein, dass $-\varrho_1, \cdots -\varrho_m$ die Wurzeln der zur Stelle $x = 0$, und $\sigma_1 + 1, \cdots, \sigma_n + 1$ die Wurzeln der zur Stelle $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung der Differentialgleichung von $\Phi(x;c)$ sind. (C. f. § 19).

25.

Besondere Besprechung verdienen auch diejenigen Integrale $\Phi(x; c)$, welche über die in § 11 charakterisirten Gammafunctionen gebildet sind. Wie aus den §§ 10 und 11 zu finden ist, werden die betreffenden Gammafunctionen aus den Ausdrücken $\mathbf{G}(w)\,\varphi(w, p-2)$ und $\mathbf{G}(w)\,\varphi(w, p-1)$, die allen Untersuchungen dieses Abschnittes zu Grunde liegen, dadurch erhalten, dass die unbestimmten Constanten von $\varphi(w, p-2)$ und $\varphi(w, p-1)$ solchen Beschränkungen unterworfen werden, dass die Gleichungen entstehen:

$$\mathbf{G}(w)\,\varphi(w, p-2) = \mathbf{G}(w) \sin\pi(w-\sigma_1)\cdots\sin\pi(w-\sigma_n)\,\varphi(w, p-n-2)$$
$$= \frac{\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)}{\Gamma(w-\sigma_1)\cdots\Gamma(w-\sigma_n)}\,\varphi(w, q-2),$$

$$\mathbf{G}(w)\,\varphi(w, p-1) = \mathbf{G}(w) \sin\pi(w-\sigma_1)\cdots\sin\pi(w-\sigma_n)\,\varphi(w, p-n-1)$$
$$= \frac{\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)}{\Gamma(w-\sigma_1)\cdots\Gamma(w-\sigma_n)}\,\varphi(w, q-1),$$

wo die ganzen Zahlen p und $q = p - n$, wie im ersten Abschnitte, durch die Ungleichheiten $p \geq \frac{m+n}{2} > p-1$, $q \geq \frac{m-n}{2} > q-1$ eindeutig definirt sind. Diese beiden Ausdrücke sind vermöge der in § 3 gegebenen erweiterten Definition von φ identisch gleich der Null, falls $m < n$ ist. Damit also wenigstens nicht der letztere identisch verschwinde, soll in diesem § angenommen werden, dass $m > n$ ist. Bezeichnet α eine reelle Zahl, die algebraisch grösser ist als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$, so sind die obigen Gammafunctionen dadurch bemerkenswerth, dass sie sich in der ganzen durch die Ungleichheit $u > \alpha$ $(w = u + iv)$ charakterisirten Halbebene regulär verhalten.

Setzen wir nun

$$\psi(x; c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)}{\Gamma(w-\sigma_1)\cdots\Gamma(w-\sigma_n)}\,\varphi(w, \lambda)\,x^{-w}\,dw, \tag{121}$$

wo λ entweder $= q-2$ oder $= q-1$ ist, und nehmen $c > \alpha$ an, so ist dies Integral nach § 14 im Übrigen von c unabhängig. Bei unbestimmten Werthen der in φ enthaltenen Constanten (A) ist der Gültigkeitsbereich desselben eine durch die Ungleichheiten

$$-\pi\left(\tfrac{m-n}{2} - \lambda\right) + \delta \leq \theta \leq +\pi\left(\tfrac{m-n}{2} - \lambda\right) - \delta \tag{122}$$

charakterisirte Fläche. Es ergiebt sich leicht, dass dies Integral, wofern die Constanten ϱ und σ die in den vorangehenden §§ geltenden Bedingungen

$\varrho_\mu < \alpha < \sigma_\nu$ erfüllen, als specieller Fall in dem daselbst besprochenen Integrale $\Phi(x; c)$ enthalten ist. Unter allen in (121) enthaltenen Integralen hat

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)}{\Gamma(w-\sigma_1)\cdots\Gamma(w-\sigma_n)} x^{-w}\,dw$$

den weitesten Gültigkeitsbereich: $-\frac{m-n}{2}\pi + \delta \leqq \theta \leqq +\frac{m-n}{2}\pi - \delta$. Alle übrigen Integrale $\Psi(x; c)$ können offenbar aus diesem durch analytische Fortsetzung, verbunden mit den in § 23 auseinandergesetzten Operationen, erhalten werden.

Das Integral (121) kann nach § 20 als homogene lineare Function mit unbestimmten Coefficienten von $\lambda + 1$ linear unabhängigen Integralen der Differentialgleichung

$$(123)\qquad \left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_m\right)y = (-1)^{m-n+\lambda}\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n\right)xy,$$

aufgefasst werden.

Weil nach Voraussetzung $m > n$ ist, so können die Integrale dieser Differentialgleichung durch beständig convergirende Potenzreihen dargestellt werden. Um die für das Integral (121) geltende Reihenentwickelung zu erhalten, hat man nur den Cauchyschen Satz auf die in § 24 auseinandergesetzte Weise zu benutzen. In dem einfachsten Falle, wo die Constanten ϱ die Bedingung erfüllen, dass die Differenz irgend zweier derselben keine ganze Zahl ist, bekommt man die von Logarithmen freie Darstellung:

$$(124)\qquad \Psi(x; c) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)}{\Gamma(w-\sigma_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_n)}\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}\,dw$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\varphi(\varrho_k)\,x^{-\varrho_k}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\lambda\nu}\frac{(-x)^\nu}{\underline{|\nu}}\cdot\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m}{}'\,\Gamma(\varrho_k-\varrho_\mu-\nu)}{\prod\limits_{\mu=1}^{n}\Gamma(\varrho_k-\sigma_\mu-\nu)}.$$

wo $\varphi(\varrho_k) = \varphi(\varrho_k, \lambda)$ ist.

26.

In diesem § wollen wir untersuchen, wie sich die in den vorangehenden §§ durch $\Phi(x; c)$ und $\Psi(x; c)$ bezeichneten Integrale für unendlich kleine, insbesondere aber für unendlich grosse Werthe der Variable x verhalten.

Wir betrachten zuvörderst das Integral $\Phi(x; c)$. Infolge der über die Constanten ϱ und σ geltenden Voraussetzungen können wir dieselben in der Reihenfolge geordnet denken:

$$\varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \cdots \leqq \varrho_m < \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \cdots \leqq \sigma_n, \tag{125}$$

wo das Ungleichheits- resp. Gleichheits-Zeichen sich nur auf die reellen Theile der betreffenden Grössen bezieht. Insofern nun der Integrationsweg $u = c$ die Bedingung $\varrho_m < c < \sigma_1 + 1$ erfüllt, ist der Werth des Integrals $\Phi(x; c)$ im Übrigen von c unabhängig. Aus der Ungleichheit (69) wurde in § 14 der Satz gefolgert, dass $x^k \Phi(x; c)$ bei Annäherung von x an die Stelle $x = 0$ gegen die Null convergirt, falls k algebraisch grösser als c angenommen wird, und bei Annäherung von x an die Stelle $x = \infty$ ebenfalls gegen die Null, falls diesmal k algebraisch kleiner als c angenommen wird. Verbindet man diesen Satz mit dem Umstande, dass c einerseits um beliebig wenig grösser als der reelle Theil von ϱ_m und andererseits auch um beliebig wenig kleiner als der reelle Theil von $\sigma_1 + 1$ angenommen werden kann, ohne dass $\Phi(x; c)$ aufhört, eine und dieselbe monogene Function darzustellen, so folgt hieraus, *dass jedes durch $\Phi(x; c)$, wo $\varrho_m < c < \sigma_1 + 1$ ist, dargestellte Integral der Differentialgleichung $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = (-1)^{m+\lambda} g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ die Eigenschaft besitzt, dass $x^k \Phi(x; c)$ bei Annäherung von x an die Stelle $x = 0$ gegen die Null convergirt, falls k algebraisch grösser als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ angenommen wird, und bei Annäherung von x an die Stelle $x = \infty$ ebenfalls gegen die Null, wofern diesmal k algebraisch kleiner als die reellen Theile von $\sigma_1 + 1, \cdots, \sigma_n + 1$ angenommen wird.* Selbstverständlich sollen diese Annäherungen im Gültigkeitsbereiche von $\Phi(x; c)$ geschehen. *Ist k insbesondere eine die Bedingung $\varrho_m < k < \sigma_1 + 1$ erfüllende Zahl, so ist sowohl $\lim\limits_{x=0} x^k \Phi(x; c) = 0$ als auch $\lim\limits_{x=\infty} x^k \Phi(x; c) = 0$.*

Ist in dem Integrale (121), $\Psi(x; c)$, c grösser als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$, so ist Ψ im Übrigen von c unabhängig. Insbesondere lässt sich der Integrationsweg $u = c$ beliebig weit in der Richtung der unendlich grossen positiven Zahlen verschieben, ohne dass Ψ aufhört, eine und dieselbe monogene Function darzustellen. Verbindet man diesen Umstand mit dem oben angeführten Satze des § 14, so folgt, *dass jedes durch $\Psi(x; c)$ dargestellte Integral der Differentialgleichung* (123) *die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzt, dass $x^k \Psi(x; c)$, wie gross man auch k annehmen möge, bei Annäherung von x an die Stelle $x = \infty$ gegen die Null convergirt.* Derselbe Ausdruck convergirt bei Annäherung von x an die Stelle $x = 0$ ebenfalls gegen die Null, falls k algebraisch grösser als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ angenommen wird.

Die obigen Sätze über $\Phi(x; c)$ und $\Psi(x; c)$ drücken in manchen Fällen nur Eigenschaften aus, die ebenfalls aus der allgemeinen Form der in den Umgebungen der singulären Stellen $x = 0$ und $x = \infty$ geltenden Reihenentwickelungen der Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichungen gefolgert werden können. In der That hat die zur singulären Stelle $x = 0$ gehörige determinirende Gleichung nach § 19 die Wurzeln $-\varrho_1, \cdots, -\varrho_m$, während die zur Stelle $x = \infty$ gehörige Gleichung die Wurzeln $\sigma_1 + 1, \cdots, \sigma_n + 1$ besitzt. Ist nun zuvörderst $m = n$, so ist die Gradzahl beider Gleichungen gleich der Ordnungszahl der Differentialgleichung, so dass $x = 0$ und $x = \infty$ beide singuläre Stellen der Bestimmtheit sind. In diesem Falle drückt der Satz über $\Phi(x; c)$ offenbar nur Eigenschaften aus, die allen Integralen der Differentialgleichung von Φ gemeinsam und aus den bezüglichen Reihenentwickelungen ebenfalls ersichtlich sind.

In allen den Fällen aber, wo $m > n$ ist, (der Fall $m < n$ braucht nach § 19 nicht besonders erörtert zu werden) geben unsere Sätze einen Aufschluss über das Verhalten der Functionen Φ und Ψ in der Nähe von $x = \infty$, der aus ihren Reihenentwickelungen gar nicht zu entnehmen ist. Ist nämlich $m > n$, so können bekanntlich sämmtliche Integrale der Differentialgleichung

$$f\left(x \frac{d}{dx}\right) y = \pm g\left(x \frac{d}{dx}\right) x y,$$

welcher Φ und Ψ genügen, durch gewöhnliche beständig convergirende Potenzreihen dargestellt werden. In dem einfachsten Falle, z. B., wo unter den Wurzeln $-\varrho_1, \cdots, -\varrho_m$ der zur singulären Stelle $x = 0$ gehörigen determinirenden Gleichung $f(\varrho) = 0$ keine zwei sich finden, deren Differenz eine ganze Zahl ist, hat man für das allgemeine Integral der betreffenden Differentialgleichung eine von Logarithmen freie Darstellung der Form

$$(126) \qquad x^{-\varrho_1} \mathfrak{P}_1(x) + x^{-\varrho_2} \mathfrak{P}_2(x) + \cdots + x^{-\varrho_m} \mathfrak{P}_m(x),$$

wo die $\mathfrak{P}$ nach positiven ganzzahligen Potenzen von x fortschreitende, *beständig convergirende* Potenzreihen bezeichnen, deren Anfangsglieder als unbestimmte Constanten aufzufassen sind.

Aus (126) geht nun zwar ebenfalls hervor, dass Φ und Ψ bei Annäherung von x an die Stelle $x = 0$ auf die in den obigen Sätzen angegebene Weise sich verhalten. Aus (126) ist dagegen gar nicht zu ersehen, dass die darin enthaltenen Functionen $\Psi(x; c)$, die wir zunächst in Betracht nehmen wollen, die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzen, dass $x^k \Psi(x; c)$, *wie gross auch k*

sei, gegen die Null convergirt, falls $x = \varrho\, e^{i\theta}$, in der durch die Ungleichheiten (122)

$$-\pi\left(\tfrac{m-n}{2} - \lambda\right) + \delta \leqq \theta \leqq + \pi\left(\tfrac{m-n}{2} - \lambda\right) - \delta$$

$$\left(\lambda = q - 1 \text{ oder } = q - 2\,,\, q \geqq \tfrac{m-n}{2} > q - 1\right)$$

charakterisirten Fläche, der Stelle $x = \infty$ ohne Ende genähert wird. Es ist zu bemerken, dass δ während dieser Annäherung eine zwar beliebig kleine, aber bestimmte positive Zahl bezeichnen soll. Als specieller Fall dieses Satzes kann der betrachtet werden, dass die Exponentialfunction

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w)\, x^{-w}\, d\, w\,, \qquad (c > 0)$$

selbst nach Multiplication mit einer beliebig hohen Potenz von x, mit wachsendem $|x|$ sich der Grenze Null nähert, wofern zugleich das Argument von x die Bedingung $-\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \theta \leqq + \frac{\pi}{2} - \delta$ erfüllt. Als zweites Beispiel mag das folgende, der Differentialgleichung

$$\begin{cases} \left(x\dfrac{d}{dx} + \alpha\right)\left(x\dfrac{d}{dx} + \beta\right) y = x y \\ x^2\dfrac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + \beta + 1)\, x\dfrac{dy}{dx} + (\alpha\beta - x)\, y = 0 \end{cases}$$

genügende, mit den Besselschen Functionen nahe verwandte Integral angeführt werden:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w-\alpha)\,\Gamma(w-\beta)\, x^{-w}\, d\, w = x^{-\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha-\beta-\nu)}{\underline{|\nu}}(-x)^{\nu} + x^{-\beta}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\beta-\alpha-\nu)}{\underline{|\nu}}(-x)^{\nu}$$

$$= \Gamma(\alpha-\beta)\, x^{-\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\nu}}{\underline{|\nu}\,(\beta-\alpha+1)\cdots(\beta-\alpha+\nu)} + \Gamma(\beta-\alpha)\, x^{-\beta}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\nu}}{\underline{|\nu}\,(\alpha-\beta+1)\cdots(\alpha-\beta+\nu)}$$

Der Gültigkeitsbereich dieses Integrals ψ ist eine Fläche, welche die x-Ebene einfach bedeckt, mit Ausnahme jedoch der negativen Hälfte der reellen Axe, wo keine Bedeckung stattfindet. Wird nun das Argument θ der Bedingung $-\pi + \delta \leqq \theta \leqq + \pi - \delta$ unterworfen, wo δ eine beliebig kleine, aber bestimmte positive Zahl bezeichnet, so nähert sich $x^k\psi$, wie gross auch k sei, mit wachsendem $|x|$ der Grenze Null — eine Eigenschaft, die aus der Reihenentwickelung keineswegs ersichtlich ist.

Wenn die Constanten ϱ und σ die Bedingungen (125) erfüllen, so ist das Integral $\Psi(x; c)$ als specieller Fall in dem Integrale $\Phi(x; c)$ enthalten. Obgleich nun die übrigen in Φ enthaltenen Functionen mit wachsendem $|x|$ sich nicht gerade auf eine so bemerkenswerthe Weise verhalten, wie die Functionen Ψ, so sind sie doch in einer gewissen anderen Hinsicht ihrerseits bemerkenswerther als die Functionen Ψ, indem sie nämlich für grosse Werthe von x durch divergirende Reihen *asymtotisch* dargestellt werden können. Diese Ausdrucksweise benutzt Herr Poincaré in seiner Arbeit *Sur les intégrales irrégulières des équations lineaires* (Acta Math. Bd. 8). Es giebt also m. a. W. divergirende Reihen, die zu den fraglichen Functionen in derselben eigenthümlichen Beziehung stehen, wie die bekannte Stirlingsche Reihe zu $\log \Gamma(x)$.

Betrachtet man in der That die in § 24 mit Benutzung des Cauchyschen Satzes erhaltene Gleichung (114):

$$\Phi(x; c) = -\sum\sum S_k^{(\nu)} + \Phi(x; c + \nu'),$$

so geht die auf der rechten Seite befindliche Summe, wegen der Voraussetzung $m > n$, für $\nu' = \infty$ in eine divergirende Reihenentwickelung über. Dies leuchtet am leichtesten in dem Falle ein, wo die Differenz irgend zweier der Grössen $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ keine ganze Zahl ist. Alsdann haben die Residuen S die in (116) angegebenen Werthe, so dass die obige Gleichung folgenderweise lautet:

$$\Phi(x; c) = \Phi(x; c + \nu') +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \varphi(\sigma_k + 1)\left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma_k + 1} \sum_{\nu} (-1)^{\lambda\nu} \frac{\left(-\frac{1}{x}\right)^{\nu}}{\underline{|\nu}} \prod_{\mu=1}^{n}{}' \Gamma(\sigma_\mu - \sigma_k - \nu) \prod_{\mu=1}^{m} \Gamma(1 + \sigma_k - \varrho_\mu + \nu),$$

wo $\varphi(w) = \varphi(w, \lambda)$ ist. Offenbar wächst der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes jeder dieser n Summen mit der Ordnungszahl ν über jede endliche Grenze, falls $m > n$ ist. Bezeichnen wir nun die auf der rechten Seite stehende Summe durch $S_{\nu'}(x)$, so gilt der Satz: *Ist k eine beliebig grosse positive Zahl, so kann doch die positive ganze Zahl ν' so gross angenommen werden, dass*

$$x^k [\Phi x; c) - S_{\nu'}(x)]$$

gegen die Null convergirt, wofern x innerhalb des Gültigkeitsbereiches von $\Phi(x; c)$ der Stelle $x = \infty$ ohne Ende genähert wird. Denn wird ν' so gross

angenommen, dass $c+\nu'>k$ ist, so wissen wir auf Grund des aus der Ungleichheit (69) gefolgerten Satzes, dass

$$x^k \Phi(x; c+\nu') = x^k [\Phi(x; c) - S_{\nu'}(x)]$$

bei Annäherung von x an die Stelle $x=\infty$ gegen die Null convergirt.

In diesem Zusammenhange sei Folgendes bemerkt. In der oben citirten Arbeit hebt Herr Poincaré hervor, dass eine divergirende Reihe, die ein gewisses Integral einer linearen Differentialgleichung für ein gewisses Argument θ von x darstellt, dasselbe Integral für ein anderes Argument *im Allgemeinen* nicht mehr asymtotisch repräsentirt. Bemerkenswerth ist deshalb, dass wenigstens die asymtotischen Reihen der hypergeometrischen Functionen, wie aus dem obigen Satze hervorgeht, die betreffenden Functionen auch für verschiedene, innerhalb gewisser Grenzen liegende Werthe des Arguments θ darstellen. Offenbar liessen sich ohne Mühe Beispiele geben, wo sogar mehrere auf einander folgende Zweige derselben Function durch eine und dieselbe Reihenentwickelung asymtotisch dargestellt werden.

Setzt man unter der Voraussetzung $\varrho_1 < \varrho_2 < c < \sigma$:

$$\Phi(x; c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(w-\varrho_1)\,\Gamma(w-\varrho_2)\,\Gamma(1+\sigma-w)\,x^{-w}\,dw$$

und nimmt an, dass $\varrho_1-\varrho_2$ keine ganze Zahl ist, so hat man für Φ einerseits die beständig convergirende, von Logarithmen freie Reihenentwickelung

$$x^{-\varrho_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x)^\nu}{\underline{|\nu}}\,\Gamma(\varrho_1-\varrho_2-\nu)\,\Gamma(1+\sigma-\varrho_1+\nu)+$$

$$+\,x^{-\varrho_2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x)^\nu}{\underline{|\nu}}\,\Gamma(\varrho_2-\varrho_1-\nu)\,\Gamma(1+\sigma-\varrho_2+\nu)$$

und andererseits auch die asymptotische Darstellung

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma+1}\sum_{\nu=0}^{\nu'-1}\frac{\left(-\frac{1}{x}\right)^\nu}{\underline{|\nu}}\,\Gamma(1+\sigma-\varrho_1+\nu)\,\Gamma(1+\sigma-\varrho_2+\nu)\quad+\Phi(x; c+\nu').$$

Der Gültigkeitsbereich von Φ ist eine durch die Ungleichheiten

$$-\frac{3\pi}{2}+\delta<\theta<+\frac{3\pi}{2}-\delta$$

charakterisirte Fläche. Die Differentialgleichung, welcher Φ genügt, lautet

$$\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)y = x\left(x\frac{d}{dx}+\sigma+1\right)y.$$

27.

Die im ersten und in diesem Abschnitte dargestellten Untersuchungen erhalten einen gewissen Abschluss, wenn man sich davon überzeugt, dass die in der Form $\Phi(x; c)$ erhaltenen Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichungen auch die einzigen Integrale derselben sind, welche für unendlich grosse und unendlich kleine Werthe von x sich ebenso verhalten, wie der aus der Ungleichheit (69) gefolgerte Satz in jedem besonderen Falle besagt, falls derselbe auf die in § 26 auseinandergesetzte Weise benutzt wird. Nehmen wir insbesondere die in den vorangehenden §§ vorzugsweise erörterten Functionen in Betracht, so hat man folgende Sätze.

Erfüllen die Constanten ϱ und σ der Differentialgleichung

$$(x\frac{d}{dx}+\varrho_1)\cdots(x\frac{d}{dx}+\varrho_m)\,y=(-1)^{m+\lambda}(x\frac{d}{dx}+\sigma_1)\cdots(x\frac{d}{dx}+\sigma_n)\,x\,y$$

die Bedingungen

$$\varrho_1\leqq\varrho_2\leqq\cdots\leqq\varrho_m<\sigma_1\leqq\sigma_2\leqq\cdots\leqq\sigma_n\,,$$

und ist y ein Integral derselben, welches die beiden Eigenschaften $\lim_{x=0} x^k y=0$ und $\lim_{x=+\infty} x^k\,y=0$ besitzt, falls k einen beliebigen, dem Parallelstreifen $\varrho_m<k<\sigma_1$ angehörigen Werth bezeichnet, so lässt sich x auf die Form (92), $\Phi(x;c)$, *bringen.*

Weiss man von einem Integrale y der Differentialgleichung (123)

$$(x\frac{d}{dx}+\varrho_1)\cdots(x\frac{d}{dx}+\varrho_m)\,y=(-1)^{m-n+\lambda}(x\frac{d}{dx}+\sigma_1)\cdots(x\frac{d}{dx}+\sigma_n)\,x\,y\,,$$

wo $m>n$ ist, dass $x^k\,y$, wie gross auch k sei, bei Annäherung von x an die Stelle $x=+\infty$ gegen die Null convergirt, so lässt sich y auf die Form (121), $\Psi(x;c)$, *bringen.*

Aus § 24 meiner Arbeit *Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung* (Acta Math. Bd. 15) kann man finden, in welcher Weise diese und ähnliche Sätze bewiesen werden können. Daselbst findet sich nämlich ein Beweis für den letzteren der obigen Sätze [1]). Setzt man die am Schluss des § 29 hervorzuhebenden Sätze als bekannt voraus, so gestalten sich die Beweise solcher Sätze noch einfacher.

---

[1]) Die daselbst auf Seite 382 befindliche Uugleichheit muss folgenderweise lauten:

$$|\,y^{(\nu)}(\xi)\,|\leqq\frac{|\underline{\nu}}{r^\nu}\,M(\xi,r)\,.$$

In § 22 sind zwei ziemlich allgemeine Fälle hervorgehoben worden, wo die allgemeinen Integrale der betreffenden hypergeometrischen Differentialgleichungen mit Hülfe der Gammafunction in der Form eines bestimmten, durch $\Phi(x; c)$ bezeichneten Integrals dargestellt werden können. Sehen wir aber von diesen Fällen ab, so ist die Anzahl der in $\Phi(x; c)$ enthaltenen, linear unabhängigen Integrale stets kleiner als die Ordnungszahl der zugehörigen Differentialgleichung. Im folgenden Abschnitte wird sich aber ergeben, dass das allgemeine Integral einer jeden hypergeometrischen Differentialgleichung durch ein bestimmtes, über Gammafunctionen ausgedehntes Integral sich darstellen lässt, falls als Integrationsweg, statt einer geraden Linie, eine zweckmässig gewählte Curve oder, noch einfacher, eine gebrochene Linie benutzt wird.

28.

In § 14 ergab sich der folgende Satz: *Wird die Veränderliche $z = \zeta + i\zeta'$ auf einen beliebigen, zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ beschränkt, wo $\mathrm{G}(z)\,\varphi(z, \lambda)$, $(\lambda = p - 1$ oder $= p - 2)$, sich überall regulär verhält, so ist*

$$(127) \qquad \mathrm{G}(z)\,\varphi(z, \lambda) = \int_0^\infty x^{z-1} \frac{dx}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)\,x^{-w}\,dw = \int_0^\infty \Phi(x, c)\,x^{z-1}\,dx,$$

wofern der Integrationsweg $u = c$ demselben Streifen $(\alpha \leq c \leq \beta)$ ebenfalls angehört. Durch diesen Satz, der übrigens auch eine weit allgemeinere Gültigkeit besitzt (§ 14 Anm.), wird eine grosse Menge bestimmter, über hypergeometrische Functionen $\Phi(x; c)$ gebildeter Integrale auf die Gammafunction zurückgeführt. Das bestimmte Integral $\Phi(x; c)$ ist von der Lage seines Integrationsweges $u = c$ in der Weise abhängig, wie die Gleichung (70) des § 14 näher angiebt. Für verschiedene Werthe von c stellt demnach $\Phi(x; c)$ auch im Allgemeinen verschiedene analytische Functionen von x dar. Gehört $\Phi(x; c)$ zu einem Streifen $(\alpha \leq c \leq \beta)$, dessen Breite mindestens gleich *Eins* ist, so genügt dasselbe einer *homogenen* hypergeometrischen Differentialgleichung. Andernfalls genügt Φ zwar noch einer hypergeometrischen Gleichung, die aber im Allgemeinen nicht homogen ist, indem sie gewisse Potenzen von x als Glieder enthält, die auch mit Logarithmen behaftet sein können. (Man beachte die Gleichungen (70) und (118)).

Wie die hypergeometrischen Functionen $\Phi(x; c)$ durch Integration von Gammafunctionen erzeugt werden, wobei die Veränderliche x unter dem Inte-

gralzeichen als Parameter benutzt wird, so zeigt die Gleichung (127), dass auch umgekehrt die Gammafunctionen $\mathbf{G}(z)\varphi(z,\lambda)$ durch Integration eben dieser hypergeometrischen Functionen erzeugt werden, falls die Veränderliche z in angeführter Weise als Parameter benutzt wird.

Die Grenzen $x=0$ und $x=\infty$ des Integrals (127) sind jedenfalls singuläre Stellen der Differentialgleichung, welcher $\Phi(x;c)$ Genüge leistet. Ist $m=n$, so hat diese Gleichung noch eine singuläre Stelle im Punkte $x=(-1)^{m+\lambda}$. Sind nun im Falle $m=n$ gewisse Bedingungen hinsichtlich der Constanten ϱ und σ der fraglichen Differentialgleichung erfüllt und ist $x=+1$ singuläre Stelle derselben, so hat die Gleichung ein particuläres, zur Wurzel $\varrho=-\varkappa-1$ der determinirenden Gleichung $\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-n+2)(\varrho+\varkappa+1)=0$ gehöriges Integral, welches, mit x^{z-1} multiplicirt und zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ oder auch zwischen $x=1$ und $x=\infty$ integrirt, durch Gammafunctionen ausgedrückt werden kann. Dies soll hier nachgewiesen werden.

In diesem Zusammenhange verdient zunächst als allgemeine, diesen ganzen Abschnitt betreffende Bemerkung hervorgehoben zu werden, dass wir hier nicht sämmtliche, im ersten Abschnitte charakterisirte Functionen benutzt haben, die eine Integration längs einer unbegrenzten, zur imaginären Axe parallelen Geraden gestatten. Nur die in den Ausdrücken (41), (42) enthaltenen Gammafunctionen sind bisher in Betracht genommen worden, d. h. nur diejenigen Functionen des ersten Abschnittes, welche die Eigenschaft $\lim\limits_{\zeta'=\pm\infty} z^k F(z)=0$, $(\alpha\leq\zeta\leq\beta)$ besitzen, *wie gross auch k sei.* (Man siehe die in § 12 gegebene Übersicht). Nun ist der Ausdruck (41) aus dem in § 1 befindlichen ersteren Ausdrucke (8) dadurch erhalten, dass die unbestimmten Constanten A von $\mathbf{G}(z)\varphi(z,p)$ nicht nur im Falle, wo $m+n$ eine ungerade Zahl ist (§ 5), sondern auch im Falle, wo $m+n$ eine gerade Zahl ist, solchen Beschränkungen (16) unterworfen worden sind, dass $\mathbf{G}(z)\varphi(z,p)$ sich in $\mathbf{G}(z)\varphi(z,p-2)$ verwandelte. Der ursprüngliche Ausdruck $\mathbf{G}(z)\varphi(z,p)$ — dessen Verhalten für unendlich grosse, einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen angehörige Werthe z der Ausdruck (22) angiebt, *falls $m+n$ gerade ist* — kann aber, wie aus (22) nicht schwer zu finden ist und im Folgenden in einem besonderen Falle gezeigt wird, unter gewissen Voraussetzungen hinsichtlich der Grösse $\varkappa$ und der Lage des in Betracht genommenen Parallelstreifens in derselben Weise behandelt werden, wie es in den §§ 13 und 14 mit den Ausdrücken $\mathbf{G}(z)\varphi(z,p-2)$ und $\mathbf{G}(z)\varphi(z,p-1)$ geschehen ist. *Ein* wichtiger Unterschied zeigt sich indessen, indem die zugehörigen Integrale $\Phi(x;c)$ nur für *reelle positive* Werthe von x einen Sinn haben, weshalb sie auch nicht von

demselben Interesse zu sein scheinen, wie die von uns betrachteten hypergeometrischen Functionen.

Nehmen wir jetzt an, in $\mathbf{G}(z)\varphi(z,p)$ sei $m=n$, so ist auch $p=\frac{m+n}{2}=n$, so dass wir den Ausdruck $\mathbf{G}(z)\varphi(z,n)$ bekommen. Nach § 10 können wir über die in φ enthaltenen $n+1$ Constanten A so verfügen, dass $\mathbf{G}(z)\varphi(z,n)$ in einer ganzen, die unendlich grossen positiven Zahlen enthaltenden Halbebene sich überall regulär verhält, oder auch so, dass $\mathbf{G}(z)\varphi(z,n)$ in einer ganzen, die unendlich grossen negativen Zahlen enthaltenden Halbebene sich in derselben Weise verhält. Im ersteren Falle bekommen wir den in § 10 charakterisirten Ausdruck (36):

$$F(z)=\frac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_n)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}$$

Im letzteren Falle erhalten wir den in (37) enthaltenen Ausdruck

$$F_1(z)=\frac{\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)}{\Gamma(1+\varrho_1-z)\cdots\Gamma(1+\varrho_n-z)}.$$

Das Verhalten von $F(z)$ für unendlich grosse, einem beliebigen zur imaginären Axe parallelen Streifen angehörige Werthe von z wird durch die in § 10 erwähnte Gleichung $F(z)=z^{\varkappa}(1+\varepsilon)$ angegeben, wo $\varkappa=\sigma_1+\cdots+\sigma_n-\varrho_1-\cdots-\varrho_n$ und ε unendlich klein ist. In demselben Sinne ist offenbar auch $F_1(z)=z^{\varkappa}(1+\varepsilon)$. Es soll jetzt angenommen werden, dass der reelle Theil von $\varkappa<0$ ist. Alsdann werden die beiden Ausdrücke

$$\frac{F(w)}{w-z},\quad \frac{F_1(w)}{w-z},$$

falls $w=u+iv$ in irgend einem Parallelstreifen $(\alpha\leq u\leq\beta)$ sich ins Unendliche entfernt, von höherer Ordnung als der ersten unendlich klein, weshalb jeder derselben eine Integration längs jeder unbegrenzten, zur imaginären Axe parallelen Geraden gestattet, die durch keine Unendlichkeitsstelle des betreffenden Ausdrucks hindurchgeht.

Es sei b grösser als a und a grösser als die reellen Theile von $\varrho_1,\cdots,\varrho_n$. Ist ferner $z=\zeta+i\zeta'$ ein beliebiger dem Streifen $(a<\zeta<b)$ angehöriger Werth, so ergiebt sich mit Benutzung des Cauchyschen Satzes

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{F(w)}{z-w}dw+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty}\frac{F(w)}{w-z}dw=P(z)+Q(z),$$

$$\varrho_\mu<a<z<b,\ \mu=1,2,\cdots,n.$$

Hier, wie auch im Nachstehenden, wird das Ungleichheitszeichen in dem in § 12 angegebenen Sinne gebraucht. Es wird sich nun ergeben, dass $Q(z)$, als Function von z betrachtet, identisch verschwindet. Da nämlich der Integrationsweg $u = b$ von Q beliebig weit in der Richtung der unendlich grossen positiven Zahlen parallel zu sich selbst verschoben werden kann, ohne dass Q sich dadurch verändert, so hat man

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b+k-i\infty}^{b+k+i\infty} \frac{F(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(w+k)}{w+k-z}\,dw.$$

Bezeichnet k eine positive ganze Zahl, so ist vermöge der Gleichungen (76), (78):

$$F(w+k) = F(w)\left(\frac{w+k}{w}\right)^{\varkappa} f\left(\frac{1}{w}\right) f\left(\frac{1}{w+1}\right)\cdots f\left(\frac{1}{w+k-1}\right),$$

wo $f\left(\frac{1}{w}\right)$ die in § 15 angegebene Bedeutung hat. Da $\varkappa < 0$ ist, so ergiebt sich hieraus leicht die Richtigkeit unserer Behauptung.

Somit wird $F(z) = P(z)$. In dieser Gleichung ist während des Laufes der Integration $z - w > 0$, so dass

$$\frac{1}{z-w} = \int\limits_0^1 x^{z-w-1}\,dx$$

gesetzt werden kann. Führt man dieses Integral in P ein, so ergiebt sich durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$(128)\qquad \frac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_n)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)} = \int\limits_0^1 x^{z-1}\frac{dx}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_n)}{\Gamma(w-\sigma_1)\cdots\Gamma(w-\sigma_n)}\,x^{-w}\,dw.$$

Die Bedingungen, unter denen diese Gleichung besteht, sind: dass $\varkappa < -1$ ist [1]), dass a algebraisch grösser als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ ist und, dass schliesslich $z > a$ ist.

Das Integral

$$(129)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_n)}{\Gamma(w-\sigma_1)\cdots\Gamma(w-\sigma_n)}\,x^{-w}\,dw \qquad (\varkappa < -1)$$

---

[1]) Damit das Integral, wo w Integrationsvariable ist, *unbedingt* convergire, ist es nöthig anzunehmen, dass $\varkappa$ nicht nur < 0 sondern auch < -1 ist. Sonst ist schon $\varkappa < 0$ eine hinreichende Bedingung dafür, dass das Integral einen Sinn habe.

hat nur für reelle positive Werthe von x einen bestimmten Sinn. Wie an der Hand des § 14 zu finden ist, befriedigt dasselbe die Differentialgleichung

$$\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y=\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n\right)xy.$$

Es sei nunmehr a_1 kleiner als b_1 und b_1 kleiner als die reellen Theile von $\sigma_1+1,\cdots,\sigma_n+1$. Mit Benutzung des Cauchyschen Satzes bekommt man, falls z auf den Parallelstreifen $(a_1<\zeta<b_1)$ beschränkt wird:

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty}\frac{F_1(w)}{z-w}dw+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_1-i\infty}^{b_1+i\infty}\frac{F_1(w)}{w-z}dw=P_1(z)+Q_1(z),$$

$$a_1<z<b_1<\sigma_\mu+1,\mu=1,2,\cdots,n.$$

In diesem Falle beweist man, dass $P_1(z)$, dessen Integrationsweg $u=a_1$ beliebig weit in der Richtung der unendlich grossen negativen Zahlen verschoben werden kann, ohne dass P_1 sich dadurch verändert, identisch verschwinden muss. Dadurch bekommt man $F_1(z)=Q_1(z)$. In Q_1 ist während des Laufes der Integration $w-z>0$, so dass

$$\frac{1}{w-z}=\int\limits_1^\infty x^{z-w-1}dx$$

gesetzt werden kann. Führt man dieses Integral in Q_1 ein, so bekommt man durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$(130)\quad \frac{\Gamma(1+\sigma_1-z)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-z)}{\Gamma(1+\varrho_1-z)\cdots\Gamma(1+\varrho_n-z)}=\int\limits_1^\infty x^{z-1}\frac{dx}{2\pi i}\int\limits_{b_1-i\infty}^{b_1+i\infty}\frac{\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)}{\Gamma(1+\varrho_1-w)\cdots\Gamma(1+\varrho_n-w)}x^{-w}dw.$$

Die Bedingungen, unter denen diese Gleichung besteht, sind: dass $\varkappa<-1$ ist[1]), dass b_1 kleiner als die reellen Theile von $\sigma_1+1,\cdots,\sigma_n+1$ ist und, dass schliesslich $z<b_1$ ist.

Das Integral

$$(131)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_1-i\infty}^{b_1+i\infty}\frac{\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)}{\Gamma(1+\varrho_1-w)\cdots\Gamma(1+\varrho_n-w)}x^{-w}dw \qquad (\varkappa<-1)$$

---

[1]) Siehe die Note der vorangehenden Seite.

hat ebenfalls nur für reelle positive Werthe von x einen bestimmten Sinn. Wie sich an der Hand des § 14 ergiebt, genügt dasselbe ebenfalls der oben angeführten Differentialgleichung.

Es liesse sich zeigen, dass die Integrale (129) und (131) beide zur Wurzel $\varrho = -\varkappa - 1$ der determinirenden Gleichung $\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-n+2)(\varrho+\varkappa+1)=0$ gehören, so dass sie höchstens um einen constanten Factor differiren können.

Als Beispiel möge der Fall genommen werden, wo $n=1$ ist. Mit Benutzung des Cauchyschen Satzes erhält man in diesem Falle für die Integrale (129) und (131) die resp. Reihenentwickelungen

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\Gamma(w-\varrho)}{\Gamma(w-\sigma)}x^{-w}\,dw = x^{-\varrho}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-x)^{\nu}}{\underline{|\nu}\,\Gamma(\varrho-\sigma-\nu)} = \frac{x^{-\varrho}}{\Gamma(\varrho-\sigma)}(1-x)^{\varrho-\sigma-1},$$

$$1+\sigma<\varrho<a;$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b_1-i\infty}^{b_1+i\infty}\frac{\Gamma(1+\sigma-w)}{\Gamma(1+\varrho-w)}x^{-w}\,dw = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma+1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{x})^{\nu}}{\underline{|\nu}\,\Gamma(\varrho-\sigma-\nu)} = \frac{(\frac{1}{x})^{\sigma+1}}{\Gamma(\varrho-\sigma)}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\varrho-\sigma-1},$$

$$b_1<\sigma+1<\varrho.$$

Die Gleichungen (128) und (130) gehen somit resp. in die folgenden über:

$$\frac{\Gamma(z-\varrho)}{\Gamma(z-\sigma)} = \frac{1}{\Gamma(\varrho-\sigma)}\int\limits_0^1 x^{z-\sigma-1}(1-x)^{\varrho-\sigma}\,dx,$$

$$\frac{\Gamma(1+\sigma-z)}{\Gamma(1+\varrho-z)} = \frac{1}{\Gamma(\varrho-\sigma)}\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma+2-z}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\varrho-\sigma-1}dx.$$

Diese bekannten Gleichungen, wodurch das Eulersche Integral erster Gattung auf die Gammafunction zurückgeführt wird, sind also die einfachsten speciellen Fälle der Gleichungen (128) und (130).

III.

Über bestimmte Integrale, die längs gebrochenen Linien über Gammafunctionen ausgedehnt sind.

29.

Bevor ich zu weiteren Anwendungen des Cauchyschen Satzes übergehe, ist es am Platze, dass ich endlich auch eine gebührende Erwähnung früherer, die Theorie der Gammafunctionen oder die der bestimmten Integrale betreffender Arbeiten thue, mit denen die vorliegende wichtige Berührungspunkte hat.

Aus dem Anfange meiner Arbeit *Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen erster Ordnung* (Acta Math. Bd. 15) findet man, in welchem Zusammenhange meine früheren Arbeiten über die Gammafunctionen, und mittelbar auch die gegenwärtige, mit einer Arbeit[1]) von Herrn Prym, sowie auch mit einer Arbeit[2]) von Scheeffer stehen. Von der Prymschen Gleichung $\Gamma(z) = P(z) + Q(z)$ als Ausgangspunkt, wo P eine bekannte Partialbruchreihe und Q eine ganze transcendente Function bezeichnet, gelangte ich mit Hülfe des Mittag-Lefflerschen Satzes zu allgemeineren analogen Darstellungen von Gammafunctionen. Aus der vorliegenden Arbeit (§ 13) findet man, dass eine geeignete Benutzung des Cauchyschen Satzes ebenfalls zu den verallgemeinerten Functionen P und Q führt.

Die beiden bestimmten Integrale, durch welche in § 13 die Functionen P und Q dargestellt wurden, unterscheiden sich, vom Zeichen des Integrands abgesehen, nur dadurch von einander, dass ihre resp. Integrationswege verschiedene Lagen hinsichtlich des dem Parameter z entsprechenden Punktes haben. Auf diese Eigenthümlichkeit, dass ein bestimmtes Integral, welches einen Para-

---

[1]) Zur Theorie der Gammafunction. Crelles J. Bd. 82.

[2]) Zur Theorie der Functionen $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$. C. J. Bd. 97.

meter enthält, in gewissen Fällen verschiedene monogene Functionen von z darstellen kann, je nachdem der Parameter verschiedenen Gebieten der z-Ebene angehört, hat bekanntlich zuerst Herr HERMITE die Aufmerksamkeit der Mathematiker gelenkt [1]).

Die vorliegende Arbeit schliesst sich hinsichtlich der Art und Weise, worauf der CAUCHYsche Satz hier benutzt wird, an eine im 105. Bande des CRELLEschen Journals von KRONECKER publicirte Arbeit an, welche den Titel hat: *Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale.* Indem ich auf jene Schrift verweise, worin zugleich werthvolle litterarische Bemerkungen eingestreut sind, führe ich hier nur die allgemeine Form der daselbst betrachteten Integrale an. Bezeichnet $f(z)$ irgend eine Function von $z = \zeta + i\zeta'$, welche sich in einem, die reelle Axe einschliessenden Streifen regulär verhält und sich bei wachsenden Werthen von $|\zeta|$ der Null nähert, so ist

$$(B) \qquad \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f(k) = \frac{1}{2\pi i}\int \pi \operatorname{cotg} \pi z \cdot f(z)\, dz\,,$$

„vorausgesetzt, dass die Reihe auf der linken Seite convergirt, und dass die Integration auf der rechten Seite über die Umgrenzung jenes Streifens erstreckt wird". Die im IV. Heft desselben Bandes abgedruckte Fortsetzung der Schrift fängt mit den Worte an: „Auch die Integration der Function $\pi \operatorname{cotg} \pi z \cdot f(z)$ längs zweier der Ordinatenaxe parallelen Linien ergiebt, wie oben in der Gleichung (B) die Integration längs zweier der Abscissenaxe parallelen Linien, eine Darstellung von Reihen durch Integrale. Aber die beiden Darstellungen sind von wesentlich verschiedener Art".

Zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen besteht bekanntlich ein Zusammenhang, der nicht nur formaler, sondern auch innerer Art ist. LAPLACE bemerkte [2]), dass ein bestimmtes Integral der Form

$$(132) \qquad F(z) = \int \Phi(x)\, x^{z-1}\, dx\,,$$

wofern Φ eine homogene lineare Differentialgleichung mit in Bezug auf x rationalen Coefficienten befriedigt, unter gewissen Voraussetzungen einer homogenen linearen Differenzengleichung mit in Bezug auf z rationalen Coefficienten Genüge leistet. In neuester Zeit hat Herr PINCHERLE gezeigt [3]), dass dieser

[1]) Sur quelques points de la théorie des fonctions. Acta Soc. Sc. Fenn. Tom. XII. 1881.

[2]) Théorie analytique des probabilités.

[3]) Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equazioni alle differenze, e viceversa. Nota, letta al R. Istituto Lombardo nell'adunanza del 17 giugno 1886.

Satz sich in der Weise umkehren lässt, dass ein bestimmtes Integral der Form

(133) $$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int F(z)\, x^{-z}\, dz,$$

wofern $F(z)$ eine homogene lineare Differenzengleichung mit in Bezug auf z rationalen Coefficienten befriedigt, unter gewissen Voraussetzungen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit in Bezug auf x rationalen Coefficienten Genüge leistet.

Die Gammafunctionen befriedigen homogene lineare Differenzengleichungen erster Ordnung. Als Beispiel eines Integrals der Form (133) erörtert nun Herr Pincherle in einer späteren Arbeit[1]) das Integral

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}\, x^{-z}\, dz, \qquad (m \geqq n)$$

worin er indess statt x eine neue Veränderliche mittelst der Gleichung $x = e^{-t}$ einführt. Er betrachtet zunächst dieses Integral unter der Voraussetzung, dass der Integrationsweg eine Curve ist, welche die sämmtlichen, in der arithmetischen Reihe $\varrho_1, \varrho_1 - 1, \varrho_1 - 2, \cdots$ enthaltenen Unendlichkeitsstellen des Integrands einschliesst, die übrigen aber nicht. Mit Hülfe des Cauchyschen Satzes findet er, dass Φ in diesem Falle in eine nach Potenzen von e^{-t} fortschreitende Reihe entwickelbar ist, welche im Falle $m = n$ nur für $|e^{-t}| < 1$ convergirt. Sodann wird aber auch, unter der Voraussetzung $m > n$, eine unbegrenzte zur imaginären Axe parallele gerade Linie als Integrationsweg benutzt, deren Lage $\zeta = c$ so angenommen wird, dass c grösser ist als die reellen Theile von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$. Für Φ, als Function von t betrachtet, findet er die Differentialgleichung

$$(a_0 + b_0 e^{-t})\,\Phi + (a_1 + b_1 e^{-t})\,\Phi' + \cdots + (a_m + b_m e^{-t})\,\Phi^{(m)} = 0.$$

Dies ist der wesentliche Inhalt der citirten Arbeit, insofern sie die hypergeometrischen Functionen (im Sinne von Gauss, Pfaff und Goursat) betrifft. Darin werden also, und zwar, soviel ich weiss, zum ersten Male in der Litteratur, gewisse hypergeometrische Functionen in der bemerkenswerthen Form von bestimmten einfachen, über Gammafunctionen gebildeten Integralen betrachtet, worin die Variable $x = e^{-t}$ in einer für Differentiationen und Integrationen sehr geeigneten Weise als Parameter enthalten ist.

---

[1]) Sulle funzioni ipergeometriche generalizzale. Rend. della R. Accad. dei Lincei. Vol. IV. fasc. 12. 13. S. 792—799. 1888.

In entfernterem Zusammenhange steht die gegenwärtige Arbeit mit den Untersuchungen[1]) des Herrn Pincherle über Functionalgleichungen der Form

$$(134)\qquad \sum_{\nu=0}^{m} h_\nu F(z+\alpha_\nu) = f(z),$$

wo die Coefficienten h_ν constante Grössen oder rationale Functionen von z bezeichnen, während $f(z)$ eine gegebene Function, inclusive die Null, bedeutet. Die linearen Differenzengleichungen sind als specielle Fälle in dieser Gleichung enthalten. Herr Pincherle zeigt, dass man Lösungen derselben in der Form des bestimmten Integrals (132) erhalten kann, falls darin die Function Φ so bestimmt wird, dass sie einer gewissen linearen Differentialgleichung genügt, deren Constanten in bestimmter Weise von denen der Gleichung (134) abhängen. Statt x wird indess in (132) $t = \log x$ als Integrationsvariable benutzt. Die Ermittelung von Lösungen der obigen Functionalgleichung wird also mit Hülfe von (132) zurückgeführt auf die Integration einer gewissen linearen Differentialgleichung. Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit, von ihrer specielleren Art zugleich abgesehen, ist offenbar der von Herrn Pincherle erörterten gerade entgegengesetzt. Denn hier wird die Integration sämmtlicher hypergeometrischer Differentialgleichungen durch Vermittelung von (133) zurückgeführt auf die Bestimmung passender Gammafunctionen $F(z)$, d. h. passender Functionen, die homogene lineare Differenzengleichungen erster Ordnung befriedigen, und welche bewirken, dass $\Phi(x)$ gleich jeder beliebig angenommenen hypergeometrischen Function wird.

Die in § 14 entwickelten, ziemlich allgemeinen Sätze über bestimmte Integrale glaube ich, mit Rücksicht auf die denselben zu Grunde liegenden Voraussetzungen, als neu betrachten zu dürfen. Dieselben können gewissermassen als in der Formel (72):

$$(135)\qquad F(z) = \int_0^\infty \Phi(x;a)\, x^{z-1}\, dx = \int_0^\infty x^{z-1} \frac{dx}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(w)\, x^{-w}\, dw$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx} \frac{dx}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(w)\, e^{-xw}\, dw$$

zusammengefasst gedacht werden, bei deren Herleitung die fraglichen Sätze verwendet worden sind. Doch kommen in der Litteratur Formeln vor, die sich

[1]) Sulla risoluzione dell'equazione funzionale $\Sigma h_\nu \varphi(x+\alpha_\nu) = f(x)$. Mem. della R. Accad. delle Sc. dell'Istituto di Bologna 1888.

von dieser nur dadurch unterscheiden, dass die Integrationswege (der eine oder beide) infolge anderer, über $F(z)$ geltender Voraussetzungen von den in der obigen Formel benutzten verschieden sind.

In Riemanns Aufsatze über die Primzahlen (Werke p. 140) heisst es: „Diese Gleichung ist aber gültig für jeden complexen Werth $a+ib$ von s, wenn $a>1$. Wenn aber in diesem Umfange die Gleichung

$$g(s)=\int_0^\infty h(x)\,x^{-s}\,d\log x\left[=\int_0^1 h\left(\frac{1}{x}\right)x^{s-1}\,dx\right]$$

gilt, so kann man mit Hülfe des Fourierschen Satzes die Function h durch die Function g ausdrücken. Die Gleichung zerfält, wenn $h(x)$ reel ist und $g(a+ib)=g_1(b)+i\,g_2(b)$, in die beiden folgenden:

$$g_1(b)=\int_0^\infty h(x)\,x^{-a}\cos(b\log x)\,d\log x$$

$$i\,g_2(b)=-\,i\int_0^\infty h(x)\,x^{-a}\sin(b\log x)\,d\log x\,.$$

Wenn man beide Gleichungen mit $[\cos(b\log y)+i\sin(b\log y)]\,db$ multiplicirt und von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt, so erhält man in beiden auf der rechten Seite nach dem Fourierschen Satze $\pi\,h(y)\,y^{-a}$, also, wenn man beide Gleichungen addirt und mit $i\,y^a$ multiplicirt

$$2\pi i\,h(y)=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(s)\,y^s\,ds\,,$$

worin die Integration so auszuführen ist, dass der reelle Theil von s constant bleibt".

Um den hierin enthaltenen Satz mit der Formel (135) vergleichen zu können, führe man in die erste Riemannsche Gleichung $\frac{1}{x}$ als Integrationsvariable ein und setze in der letzten $y=\frac{1}{x}$ und $s=w$; dann folgt aus beiden

$$g(s)=\int_0^1 x^{s-1}\frac{dx}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} g(w)\,x^{-w}\,dw\,.$$

Unsere Formel (135) stimmt offenbar mit dieser nur in solchen Fällen überein, wo das Integral

$$\int_1^\infty x^{z-1}\frac{dx}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(w)\,x^{-w}\,dw,$$

als Function von z betrachtet, identisch verschwindet. Aus § 28 ersieht man, dass solche Fälle unter besonderen Voraussetzungen über $F(w)$ in der That eintreten können.

Um auch ein zweites Beispiel von einer Formel zu erhalten, die ihrer Form nach mit (135) übereinstimmt, setze man

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{y^{\nu+1}}, \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{\underline{|\nu}}\,x^\nu,$$

wo φ eine für $|y| \geqq R$ convergente Reihe ist. Alsdann ist [1]) sowohl

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\varrho)} e^{xy}\,\varphi(y)\,dy = f(x),$$

falls die Integration längs einer Kreislinie mit dem Mittelpunkte $y=0$ und dem Radius $\varrho > R$ erstreckt wird, wie auch

$$\int_0^\infty e^{-xy} f(x)\,dx = \varphi(y),$$

wofern der reelle Theil von $y > \varrho$ ist. Aus diesen Gleichnngen folgt leicht eine Formel, die hinsichtlich ihrer Form mit (135) in Übereinstimmung gebracht werden kann.

Durch (135) und die oben angeführten analogen Formeln wird, unter verschiedenen Voraussetzungen über die jedesmal in Frage stehenden Functionen, eine Aufgabe gelöst, die als specieller Fall eines viel allgemeineren Problems („Inversion" eines bestimmten Integrals) betrachtet werden kann. In einer im 10 Bande von *Acta Mathematica* publicirten Arbeit hat Herr Pincherle versucht, dieses Problem allgemein zu behandeln. Unter der Voraussetzung, dass, wenn man

$$f(x) = \int_{(l)} A(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

setzt, eine „reciproke" Function $B(y,t)$ existirt, für welche umgekehrt die Gleichung

[1]) C. f. Pincherle, Della trasformazione di Laplace, Serie IV, T. VIII, Mem. della Accad. delle Sc, dell'Ist. di Bologna. 1887.

$$\varphi(y) = \int_{(\lambda)} B(y, t) f(t)\, dt$$

statt hat, beschäftigt sich der erste Abschnitt seiner Arbeit mit den rein formalen Eigenschaften der angeführten Integrale, so dass also keine Rücksicht darauf genommen wird, ob man wirklich solche Integrationswege finden kann, dass die Integrale, ausser den formalen Eigenschaften, auch einen bestimmten Sinn erhalten. Im zweiten Abschnitte wird dieser letztere Umstand unter gewissen Voraussetzungen über $A(x, y)$ ebenfalls berücksichtigt. Die specialisirten Untersuchungen umfassen, soviel ich sehen kann, nicht die Formel (135).

Es sei mir in diesem Zusammenhange gestattet, die Aufmerksamkeit des Lesers auf die Umkehrungen der in § 14 enthaltenen allgemeinen Sätze zu lenken.

Von irgend einer Function $\Phi(x)$ nehme man an, dass sie sich in der Umgebung jeder Stelle (die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ ausgenommen) im Inneren und auf der Begrenzung des durch die Ungleichheiten

$$-\vartheta \leq \theta < +\vartheta$$

charakterisirten Bereiches von $x = \varrho e^{i\theta}$ regulär verhält und die Eigenschaft besitzt, dass das Product $x^k \Phi(x)$, falls k eine beliebige die Bedingung $\alpha \leq k \leq \beta$ erfüllende Constante bedeutet, sowohl bei Annäherung von x an die Stelle $x = 0$ wie auch bei Annäherung von x an die Stelle $x = \infty$, gleichmässig gegen die Null convergirt. Alsdann stellt das Integral

$$F(z) = \int_0^\infty \Phi(x)\, x^{z-1}\, dx\,,$$

wie leicht zu finden ist, eine in dem Parallelstreifen $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ überall regulär sich verhaltende Function von $z = \zeta + i\zeta'$ dar, welche bei wachsendem $|\zeta'|$ dem absoluten Betrage nach nicht ohne Ende wächst. Aus den mit Hülfe des CAUCHYschen Satzes sich ergebenden Gleichungen

$$F(z) = e^{i\vartheta} \int_0^\infty \Phi(e^{i\vartheta} x)\, x^{z-1}\, dx\,, \quad F(z) = e^{-i\vartheta} \int_0^\infty \Phi(e^{-i\vartheta} x)\, x^{z-1}\, dx$$

folgt

$$F(z) = \frac{1}{\sin \vartheta z} \int_0^\infty \frac{\Phi(e^{-i\vartheta} x) - \Phi(e^{i\vartheta} x)}{2i}\, x^{z-1}\, dx\,.$$

Weil x als eine reelle und positive Integrationsvariable betrachtet wird und das Integral auf der rechten Seite somit bei wachsendem $|\zeta'|$ endlich bleibt, so folgt aus dieser Formel, dass $F(z)$ für unendlich grosse, dem Streifen $(\alpha < \zeta < \beta)$ angehörige Werthe von z auf die Form gebracht werden kann:

$$F(z) = e^{-\vartheta\,\zeta'} \,.\, \psi(\zeta, \zeta'),$$

wo ψ für $\zeta' = \pm\infty$, $\alpha \leq \zeta \leq \beta$, endlich ist. Demnach kann, wie in § 14, das folgende Integral gebildet werden:

$$\Phi(t;c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(z)\,t^{-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\Phi(e^{-i\vartheta}x) - \Phi(e^{i\vartheta}x)}{2i}\cdot\frac{dx}{x}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\left(\frac{x}{t}\right)^z}{\sin\vartheta z}\,dz,$$

wo c die Bedingung $\alpha \leq c \leq \beta$, und $t = \varrho\, e^{i\theta}$ die Bedingung $-\vartheta < \theta < \vartheta$ erfüllt. Durch zweimalige Anwendung des Cauchyschen Satzes lassen sich die beiden Integralzeichen des letzten Ausdrucks wegschaffen, wobei am zweckmässigsten statt ϑ ein Bogen $\frac{\pi}{n} < \vartheta$ benutzt werden kann. Nachdem dies geschehen, bleibt auf der rechten Seite nur $\Phi(t)$ übrig, womit endlich bewiesen ist, dass $\Phi(t;c) = \Phi(t)$, d. h. dass

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-z}\,dz \int_0^\infty \Phi(x)\,x^{z-1}\,dx. \tag{136}$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Herleitung dieser Formel auch durch eine geeignete Substitution einer neuen Veränderlichen auf die Sätze des § 14 gegründet werden kann. — Ich behalte mir vor, jene und diese Sätze auf Functionen mehrerer Variablen gelegentlich auszudehnen. (Cf. die am Anfang dieser Arbeit befindliche Note über hypergeometrische Functionen mehrerer Veränderlichen).

30.

Dieser und der folgende § enthalten solche Anwendungen des Cauchyschen Satzes, durch welche, wie in § 13, Darstellungen von Gammafunctionen als Summen von neuen Functionen, die ebenfalls einfache Functionalgleichungen befriedigen, erhalten werden. Hierbei sollen nur die zu den einfachsten Ergebnissen führenden Gammafunctionen in Betracht genommen werden.

Die übrigen §§ dieses Abschnittes enthalten den Nachweis, dass eine jede hypergeometrische Differentialgleichung mit Hülfe der Gammafunction in früher angegebenem Sinne vollständig integrirt werden kann.

Die Gammafunctionen, worauf die Erörterungen dieses und des folgenden § beschränkt werden, seien der Form

$$F(z) = \frac{\Gamma(z-\varrho_1)\cdots\Gamma(z-\varrho_m)}{\Gamma(z-\sigma_1)\cdots\Gamma(z-\sigma_n)}\varphi(z, \mu),$$

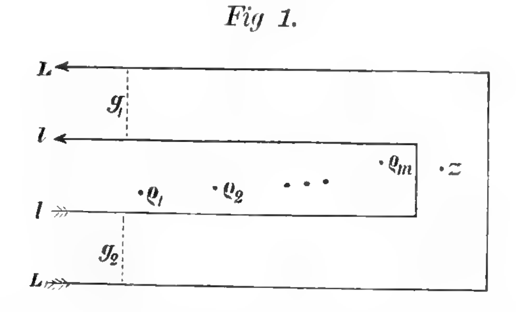
wo m nicht kleiner sei als n. Dieser Ausdruck ist offenbar als specieller Fall in dem allgemeineren $\mathbf{G}(z)\,\varphi(z, \lambda)$ enthalten. Die nicht negative ganze Zahl μ braucht keinen Beschränkungen zu unterliegen. Da $\varphi(z, \mu)$ den Charakter einer ganzen Function hat, so sind die sämmtlichen Unendlichkeitsstellen von $F(z)$ in den m arithmetischen Reihen

$$\varrho_\nu, \varrho_\nu - 1, \cdots, \varrho_\nu - k, \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, m) \tag{137}$$

als Glieder enthalten.

In einer Ebene, wo die complexen Veränderlichen z und $w = u + iv$ beide durch Punkte dargestellt werden sollen, nehme man zunächst einen zur *reellen* Axe parallelen Streifen ($\alpha \leqq v < \beta$) so an, dass er die Punkte (137) in seinem

Fig 1.



Inneren enthält, was der Fall ist, wenn α und β so angenommen werden, dass die Ordinaten der Punkte $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ sämmtlich algebraisch kleiner als β und grösser als α sind. Man zerlege den Streifen vermittelst einer zur imaginären Axe parallelen Geraden derart in zwei Theile, dass der in der negativen Richtung der reellen Axe unbegrenzte Theil oder Bereich auch die Anfangsglieder der sämmtlichen Reihen (137) in seinem Inneren enthält. Die diesen Bereich begrenzende, aus drei Geraden zusammengesetzte, gebrochene Linie heisse l. Unter L verstehe man eine ganz ähnliche, *die Linie l einschliessende,* gebrochene Linie. Das zwischen den Linien l und L liegende Gebiet der w-Ebene wird durch jede unbegrenzte, zur imaginären Axe parallele, diese *beiden* Linien schneidende Gerade in drei Theile zerlegt, von denen der mittlere, durch acht Geraden begrenzte, endliche Theil jetzt in Betracht genommen werden soll.

Bezeichnet z einen beliebigen Werth innerhalb des genannten Achteckes, so ist nach dem CAUCHYschen Satze

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(w)}{w-z}\,dw,$$

falls die Integration längs der Begrenzung des Achteckes in positiver Richtung erstreckt wird. Dieses Integral können wir als Summe von vier Integralen betrachten, von denen zwei, sie mögen (l) und (L) heissen, resp. über diejenigen Theile der Linien l und L erstreckt sind, die der Begrenzung des Achteckes angehören. Die beiden anderen, die durch (g_1) und (g_2) bezeichnet werden mögen, sind resp. erstreckt über diejenigen Theile der die Linien l und L schneidenden geraden Linie, welche ebenfalls der Begrenzung des Achteckes angehören. Was ergiebt sich nun aus der Gleichung $F(z) = (l) + (L) + (g_1) + (g_2)$, falls die Geraden g_1 und g_2 ins Unendliche verschoben werden?

Beschränkt man die Variable $w = u + iv$ auf einen beliebigen, zur *reellen* Axe parallelen Streifen $(\alpha \leq v \leq \beta)$, so wird das Verhalten irgend einer die Functionalgleichung $F(w+1) = \pm R(w)\,F(w)$ befriedigenden Function für unendlich grosse, diesem Streifen angehörige Werthe von w durch die Gleichungen (76), $\cdots$, (79) des § 15 charakterisirt. Aus den Gleichungen (77) und (79) folgt

$$(138) \qquad F(w-k) = (\pm 1)^k \frac{w^{-\varkappa}(w-k)^{\varkappa} F(w)}{[(w-1)(w-2)\cdots(w-k)]^{m-n} f\left(\frac{1}{w-1}\right) f\left(\frac{1}{w-2}\right)\cdots f\left(\frac{1}{w-k}\right)}$$

wo f die in § 15 angegebene Bedeutung hat. Beachtet man zugleich den allgemeinen Satz desselben §, so zeigt diese Formel, wie sich $F(w)$ verhält, falls die unabhängige Variable in der negativen Richtung der reellen Axe sich ins Unendliche entfernt.

Ist zunächst $m > n$, so nähern sich offenbar die beiden Integrale (g_1) und (g_2) der Grenze Null, während die beiden anderen (l) und (L) gegen gewisse endliche Grenzwerthe $P(z)$ und $Q(z)$ resp. convergiren.

Ist aber $m = n$, so ist es nöthig vorauszusetzen, dass der reelle Theil von $z < 0$ sei, damit $\frac{F(w-\infty)}{w-\infty-z}$ von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein sei. Bekanntlich ist dies auch eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Integrale $P(z)$ und $Q(z)$, worin (l) und (L) resp. übergehen, beide einen bestimmten Sinn haben sollen. Überdies nähern sich dann (g_1) und (g_2) beide der Grenze Null, so dass man auch jetzt die Gleichung bekommt:

$$F(z) = P(z) + Q(z);$$

wo P und Q folgenderweise definirt sind:

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \frac{F(w)}{z-w}\,dw\,,$$

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \frac{F(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Die auf die gebrochene Linie l sich beziehende Integration ist, mit Rücksicht auf den von l umgrenzten Halbstreifen, in positiver Richtung erstreckt. Ähnliches gilt von der über L erstreckten Integration.

Die Functionen P und Q lassen sich nun in fast ganz ähnlicher Weise behandeln, wie es früher mit den entsprechenden Functionen des § 13 geschehen ist. Wir beschränken uns deswegen hier auf die folgenden kurzen Bemerkungen.

Betrachtet man die Integrale P und Q, jedes einzeln für sich, so ergiebt sich, dass $P(z)$ in demjenigen Gebiete der z-Ebene, welches von der Linie l zwar begrenzt, aber nicht eingeschlossen wird, nicht nur einen bestimmten Sinn hat, sondern auch eine gewisse monogene, daselbst regulär sich verhaltende Function von z darstellt.

In ähnlicher Weise verhält sich $Q(z)$ in demjenigen Theile der z-Ebene, welcher von der Linie L eingeschlossen wird. Beachtet man nun andererseits, dass L eine ganz beliebige, die Linie l einschliessende, gebrochene Linie, deren geradlinige Theile zu den Coordinaten axen parallel sind, bedeutet, so folgt offenbar, dass $Q(z)$ den Charakter einer ganzen Function besitzt und somit in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelbar sein muss. (Cf. § 18). Dagegen kann man für $P(z)$ mit Benutzung des Cauchyschen Satzes eine Darstellung durch Partialbruchreihen erhalten.

Verschiebt man den Integrationsweg von P in der positiven Richtung der reellen Axe um die Strecke Eins, wodurch P sich offenbar nicht verändert, und führt den Integrationsweg von der neuen Lage vermittelst der Substitution $w = w' + 1$ in die ursprüngliche zurück, so ergiebt sich durch Rechnungen, die den in § 13 angestellten ganz ähnlich sind, für P eine Functionalgleichung der Form

$$P(z+1) = \pm R(z)\,P(z) \mp r(z)\,,$$

und somit für Q die Functionalgleichung

$$Q(z+1) = \pm R(z)\,Q(z) \pm r(z)\,,$$

wo $r(z)$ eine mit $R(z)$ gleichnamige rationale Function bedeutet, bei welcher die Gradzahl des Zählers kleiner ist als m.

Der am Anfang des § 14 durch die Functionen P und Q des § 13 vermittelte Übergang von den Gamma- zu den hypergeometrischen Functionen lässt sich hier nicht derart bewerkstelligen, dass $F(z)$, wie in § 14, in der Form eines bestimmten, über eine hypergeometrische Function gebildeten Integrals dargestellt würde. Zwar lässt sich $P(z)$ in dieser Form darstellen, wenn z so beschränkt wird, dass der reelle Theil von $z-w$ während des ganzen Laufes der längs l erstreckten Integration positiv bleibt. In dem Integrale $Q(z)$ können wir aber, welchen Werth auch z innerhalb des von L umgrenzten Gebietes besitze, *nicht* setzen:

$$\frac{1}{w-z} = \int_1^\infty x^{z-w-1}\,dx\,,$$

weil der reelle Theil von $w-z$ während des Laufes der auf L sich beziehenden Integration stets sein Zeichen wechselt.

31.

Unter der Annahme, dass $m=n$ und zugleich der reelle Theil von $\varkappa<0$ sei, soll die Gleichung $F(z)=P(z)+Q(z)$ noch weiter erörtert werden. Wir stellen uns vor, dass der Integrationsweg L des Integrals $Q(z)$ in der positiven Richtung der reellen Axe ohne Ende verschoben wird, wobei $Q(z)$ sich offenbar nicht verändert. Wird $Q(z)$ als Summe dreier Integrale aufgefasst, die bezüglich über die geradlinigen Theile von L erstreckt sind, so nähert sich das auf den zur imaginären Axe parallelen Theil sich beziehende Integral wegen $\varkappa<0$ der Grenze Null, während die beiden anderen ebenfalls gegen gewisse endliche Grenzwerthe convergiren. Aus den Gleichungen (76) und (78) des § 15 folgt nämlich im Falle $m=n$ die Formel

$$(139)\qquad F(w+k) = (\pm 1)^k F(w)\cdot\left(\tfrac{w+k}{w}\right)^{\varkappa} f\left(\tfrac{1}{w}\right) f\left(\tfrac{1}{w+1}\right)\cdots f\left(\tfrac{1}{w+k-1}\right),$$

woraus sich die Richtigkeit der Behauptungen leicht ergiebt.

Demnach wird

$$Q(z) = Q_1(z) + Q_2(z)\,,$$

wo

$$Q_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty + i\alpha}^{+\infty + i\alpha} \frac{F(w)}{w - z}\, dw\,, \qquad \zeta' > \alpha\,,$$

$$\alpha < \beta\,,$$

$$Q_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty + i\beta}^{+\infty + i\beta} \frac{F(w)}{z - w}\, dw\,, \qquad \zeta' < \beta\,.$$

Hierbei soll α algebraisch kleiner, β grösser als die Ordinaten von $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ sein.

Es ergiebt sich leicht, dass Q_1 und Q_2 beide den Charakter einer ganzen Function haben. Dieselben befriedigen ebenfalls einfache Functionalgleichungen:

$$Q_1(z+1) = \pm R(z)\, Q_1(z) + r_1(z)\,,$$

$$Q_2(z+1) = \pm R(z)\, Q_2(z) + r_2(z)\,,$$

wo r_1 und r_2 mit R gleichnamige rationale Functionen bezeichnen. Die Gradzahl des Zählers von r_1 und die des Zählers von r_2 sind kleiner als $m = n$. Natürlich muss $r_1(z) + r_2(z) = r(z)$ sein.

32.

Wir gehen jetzt zur eigentlichen Aufgabe dieses Abschnittes über, indem wir in den folgenden §§ schliesslich zeigen werden, dass alle hypergeometrischen Differentialgleichungen:

$$(A_0 - B_0 t^k)\, y + (A_1 - B_1 t^k)\, t \frac{dy}{dt} + \cdots + (A_m - B_m t^k)\, t^m \frac{d^m y}{dt^m} = 0$$

mit Hülfe der Gammafunction in früher angegebenem Sinne vollständig integrirt werden können.

Durch die Substitution $t^k = x$ nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$(a_0 - b_0 x)\, y + (a_1 - b_1 x)\, x \frac{dy}{dx} + \cdots + (a_m - b_m x)\, x^m \frac{d^m y}{dx^m} = 0\,.$$

Bekanntlich kann man unbeschadet der Allgemeinheit (§ 19) annehmen, dass a_m nicht nur von Null verschieden, sondern auch gleich Eins ist. Bezeichnet b_n die erste von den Constanten $b_m, b_{m-1}, \cdots, b_0$, die von Null verschieden ist, so kann man b_n durch die Substitution $x = ct$, welche die Constanten $a_0, \cdots, a_m$ offenbar nicht verändert, jeden beliebigen, von Null verschiedenen Werth ertheilen. Wir können somit auch $b_n = 1$ annehmen.

Setzen wir nun

$$f(\varrho) = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho(\varrho - 1) + \cdots + \varrho(\varrho - 1)\cdots(\varrho - m + 1)$$
$$g(\varrho) = b_0 + b_1(\varrho - 1) + b_2(\varrho - 1)(\varrho - 2) + \cdots + (\varrho - 1)(\varrho - 2)\cdots(\varrho - n)$$

und vestehen unter $\varrho_1, \cdots, \varrho_m, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ Grössen, die durch die Identitäten

$$f(\varrho) = (\varrho + \varrho_1)(\varrho + \varrho_2)\cdots + (\varrho + \varrho_m)$$
$$g(\varrho) = (\varrho + \sigma_1)(\varrho + \sigma_2)\cdots + (\varrho + \sigma_n)$$

definirt sind, so kann (§§ 14, 19) die obige Differentialgleichung auf die symbolische Form gebracht werden:

$$\left(x\frac{d}{dx} + \varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \varrho_m\right)y = x\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_1 + 1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_n + 1\right)y,$$

oder noch kürzer, auf die Form $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = xg\left(x\frac{d}{dx} + 1\right)y = g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$. Offenbar ist $f(\varrho) = 0$ die zur singulären Stelle $x = 0$, und $g(1 - \varrho) = 0$ die zur singulären Stelle $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung unserer Differentialgleichung. Die Wurzeln der ersteren Gleichung sind demnach gleich $-\varrho_1, \cdots, -\varrho_m$ und die der letzteren gleich $\sigma_1 + 1, \cdots, \sigma_n + 1$.

Da die Differentialgleichung $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ durch die Substitution $(-x, x)$ sich in $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = -g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ verwandelt, und vice versa, so können wir unsere Aufgabe als gelöst betrachten, sobald es gelungen ist, das allgemeine Integral der einen oder der anderen von den Gleichungen $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \pm g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ durch ein bestimmtes, über Gammafunctionen gebildetes Integral darzustellen, *welches die Substitution* $(-x, x)$ *gestattet.* Das doppelte Zeichen der rechten Seite soll weiterhin andeuten, dass wir das Zeichen derselben im Laufe der allgemeinen Erörterungen nicht näher berücksichtigen wollen.

33.

Unsere Aufgabe ist nun, nachzuweisen, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$(140) \qquad \left(x\frac{d}{dx} + \varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \varrho_m\right)y = \pm\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx} + \sigma_n\right)xy,$$

wo m niemals kleiner als n sei $(m \geq n)$, durch das bestimmte Integral

$$(141)\qquad \Phi(x; l) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l)} \mathrm{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}\,dw\,,$$

wo G durch

$$\mathrm{G}(w) = \Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)\,,$$

und φ durch

$$\varphi(w,\lambda) = \sin\pi(w-c_1)\cdots\sin\pi(w-c_\lambda)\,[A_0 + A_1\operatorname{cotg}\pi(w-c_1) + \cdots + A_\lambda\operatorname{cotg}\pi(w-c_\lambda)]$$

definirt ist, dargestellt werden kann, wenigstens wenn man dem Integrale Φ in gewissen, weiterhin näher anzugebenden Fällen einen Ausdruck hinzuaddirt, der, ausser constanten Grössen, nur Potenzen von x, die auch mit Logarithmen behaftet sein können, in endlicher Anzahl enthält.

Der Einfachheit und Übersichtlichkeit halber bedienen wir uns ausschliesslich solcher gebrochener Linien als Integrationswege l, die schon in den §§ 30 und 31 benutzt wurden. Unter $l_{-\infty}$ verstehen wir eine, aus drei den Coordinatenaxen parallelen Geraden zusammengesetzte, durch keine Unendlichkeitsstelle von $\mathrm{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)$ hindurchgehende Linie, deren beide zur reellen Axe parallele Theile sich in der negativen Richtung der reellen Axe ins Unendliche erstrecken (Fig. 1. § 30). Unter $l_{+\infty}$ wird eine ebensolche Linie verstanden, deren beide zur reellen Axe parallele Theile sich in der positiven Richtung der reellen Axe ins Unendliche erstrecken (Fig. 2. § 34). Durch l werden beide Arten von Linien ohne Unterschied bezeichnet. — Hinsichtlich der Lagen dieser Linien und der Breite des von einer solchen Linie eingeschlossenen Gebietes der w-Ebene wollen wir in diesem § noch nichts festsetzen.

Da der unter dem Zeichen des Integrals (141) stehende Ausdruck $\mathrm{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)$ die Functionalgleichung $F(w+1) = \pm R(w)\,F(w)$ befriedigt, so ergiebt sich mit Hülfe der Gleichung (138) und mit Benutzung bekannter Sätze über bestimmte Integrale Folgendes:

Ist $m > n$, so stellt das Integral (141), über eine Linie $l_{-\infty}$ erstreckt, in der ganzen x-Ebene eine monogene Function von x dar, für welche die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ die einzigen singulären Stellen sind. Dagegen hat es in diesem Falle keinen Sinn, dass Integral (141) über eine Linie $l_{+\infty}$ zu erstrecken.

Ist $m = n$, so stellt das Integral (141), über eine Linie $l_{-\infty}$ erstreckt, für $|x| < 1$ eine monogene Function von x dar, für die der Punkt $x = 0$ im Allgemeinen eine singuläre Stelle ist. Es hat aber, falls $|x| > 1$ ist, keinen Sinn,

das Integral über eine solche Linie ${}_{-\infty}l$ zu erstrecken. Ist $|x| = 1$, so hat das Integral einen Sinn, falls $\varkappa$ die Bedingung $\varkappa < -1$ erfüllt [1]).

Ist fortwährend $m = n$, so ergiebt sich mit Hülfe der Formel (139), dass das Integral (141), über eine Linie ${}_{+\infty}l$ erstreckt, für $|x| > 1$ eine monogene Function von x darstellt. Es hat aber falls $|x| < 1$ ist, in diesem Falle keinen Sinn, das Integral über eine solche Linie zu erstrecken. Ist $|x| = 1$, so hat das Integral einen Sinn, falls $\varkappa$ die Bedingung $\varkappa < -1$ erfüllt.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den im Abschnitte II erörterten Integralen $\Phi(x; c)$ einerseits und den Integralen (141) andererseits besteht also darin, dass — während bei Angabe der Gültigkeitsbereiche der ersteren nur das Argument θ, nicht aber der absolute Betrag von $x = |x|\, e^{i\theta}$, in Betracht kommt — die letzteren Integrale für jeden Werth von θ einen Sinn haben, wofern der absolute Betrag von x (im Falle $m > n$, ausser $0 < |x| < \infty$, keiner Beschränkung) im Falle $m = n$ der Beschränkung $|x| < 1$ oder $|x| > 1$ unterworfen wird, je nachdem die Integration über eine Linie ${}_{-\infty}l$ oder eine Linie ${}_{+\infty}l$ erstreckt ist.

An der Hand des § 14 findet man, dass die Differentiation des Integrals (141) unter dem Integralzeichen bewerkstelligt werden darf, und dass die unbestimmte Integration gemäss der Gleichung

(142) $$\int \Phi(x; l)\, x^{\varrho-1}\, dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \mathbf{G}(w)\, \varphi(w, \lambda)\, \frac{x^{\varrho-w}}{\varrho - w}\, dw + C$$

ausgeführt werden kann, *falls ϱ keinen auf dem Integrationswege l liegenden Werth bezeichnet.*

Jetzt soll eine jedenfalls hinreichende Bedingung dafür angegeben werden, dass $\Phi(x; l)$ der Differentialgleichung (140) Genüge leisten soll. Durchläuft w den Integrationsweg l, so durchläuft $w' = w + 1$ eine ganz ähnliche Linie l^{+1}, die auch als eine neue Lage der Linie l betrachtet werden kann, falls nämlich l um die Strecke *Eins* in der positiven Richtung der reellen Axe verschoben wird. Liegt nun weder auf der Linie l^{+1} noch innerhalb des Rechtecks, welches die der imaginären Axe parallelen Theile von l und l^{+1} zu gegenüberliegenden Seiten hat, eine Unendlichkeitsstelle von $\mathbf{G}(w)\, \varphi(w, \lambda)$, so ist auf Grund des Cauchyschen Satzes $\Phi(x; l) = \Phi(x; l^{+1})$. Bezeichnet man durch w' die Integrationsvariable von $\Phi(x; l^{+1})$ und führt den Integrationsweg l^{+1} vermittelst der Substitution $w' = w + 1$ in die Lage l über, so ergiebt sich hieraus durch

---

[1]) Cf. die Note des § 28.

dieselben Rechnungen, wie sie in § 14 gelegentlich der Differentialgleichung (75) angestellt wurden, dass $\Phi(x; l)$ der Differentialgleichung (140) Genüge leistet.

Lässt sich also der Integrationsweg l in der positiven oder negativen Richtung der reellen Axe um die Strecke Eins verschieben, ohne dabei irgend eine Unendlichkeitsstelle von $\mathrm{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)$ *zu überschreiten, so genügt* $\Phi(x; l)$ *der Differentialgleichung* (140).

Liegt keine Unendlichkeitsstelle von $\mathrm{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)$ innerhalb des von l eingeschlossenen Gebietes der w-Ebene, so ist $\Phi(x; l)$ identisch gleich der Null.

34.

In diesem § soll zunächst ein ziemlich allgemeiner Fall der Differentialgleichung (140) betrachtet werden, wo der Nachweis sich am einfachsten führen lässt, dass das allgemeine Integral von (140) in dem Integrale (141) enthalten ist.

Wir setzen voraus, dass keine der Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ um eine ganze Zahl von irgend einer der Grössen $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ verschieden ist, d. h. dass keine von den $m.n$ Differenzen $\varrho_\mu - \sigma_\nu$ $(\mu = 1, 2, \cdots, m;\ \nu = 1, 2, \cdots, n)$ eine ganze Zahl ist.

Wir verfügen über die willkürlichen Constanten (A) von φ und über die Zahl λ so (§§ 3, 10), dass (141) in das folgende Integral übergeht:

$$(143) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l_{-\infty})} \frac{\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)}{\Gamma(w-\sigma_1)\cdots\Gamma(w-\sigma_n)}\,\varphi(w, m-1)\,x^{-w}\,dw\,.$$

Die Integration sei über eine Linie $l_{-\infty}$ erstreckt, *welche die sämmtlichen Unendlichkeitsstellen:*

$$(144) \qquad \varrho_\mu, \varrho_\mu - 1, \cdots, \varrho_\mu - \nu, \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks einschliesst. Der Ausdruck φ enthält, ausser m willkürlichen Constanten A, noch $m-1$ im Obigen durch $c_1, c_2, \cdots$ bezeichnete Constanten, die als bestimmte, von vorneherein so angenommene Grössen anzusehen sind, dass unter denselben weder zwei gleiche sich finden noch zwei, deren Differenz gleich einer ganzen Zahl ist.

Dies vorausgesetzt, soll jetzt gezeigt werden, dass (143) das allgemeine Integral der Differentialgleichung (140) darstellt, und zwar in der ganzen x-Ebene oder nur in dem durch $|x| \leq 1$ definirten Gebiete der x-Ebene, je nachdem m grösser als oder gleich n ist.

Dass das Integral (143) unter den obigen Voraussetzungen nicht nur einen bestimmten Sinn hat sondern auch der Gleichung (140) genügt, bedarf keiner weiteren Erörterung, da (143) als specieller Fall in (141) enthalten ist und der Integratiosweg $_{-\infty}l$ auf die im vorigen § angegebene Weise verschoben werden kann.

Die Unendlichkeitsstellen des Ausdrucks

$$F(w) = \frac{\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)}{\Gamma(w-\sigma_1)\cdots\Gamma(w-\sigma_n)} \tag{145}$$

sind sämmtlich in den m Reihen (144) als Glieder enthalten. Umgekehrt ist auch, infolge unserer Voraussetzung über die $m.n$ Differenzen $\varrho_\mu - \sigma_\nu$, jedes Glied dieser Reihen eine Unendlichkeitsstelle für $F(w)$, und zwar ist die Ordnungszahl der betreffenden Stelle genau gleich der Anzahl derjenigen Factoren $\Gamma(w-\varrho_\mu)$, die an derselben unendlich werden. Dies ist ein für unseren Nachweis wesentlicher Umstand.

In üblicher Weise stellen wir uns vor, dass die Wurzeln $-\varrho_1, \cdots, -\varrho_m$ der zur singulären Stelle $x=0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung $f(\varrho)=0$ derart in Gruppen gesondert sind, dass die Wurzeln einer und derselben Gruppe sich höchstens um ganze Zahlen von einander unterscheiden, während die Differenz irgend zweier, zu verschiedenen Gruppen gehöriger Wurzeln keine ganze Zahl ist. Die sämmtlichen Wurzeln *einer* solchen Gruppe seien $-\varrho_1 \geqq -\varrho_2 \geqq \cdots \geqq -\varrho_k$. Der entgegengesetzte Werth jeder von diesen Wurzeln, d. h. jede der Grössen

$$\varrho_1 \leqq \varrho_2 \leqq \cdots < \varrho_k$$

ist als erstes Glied in irgend einer der m Reihen (144) enthalten.

Auf die in § 3 angegebene Weise verfügen wir über die willkürlichen Constanten von $\varphi(w, m-1)$ so, dass φ sich in

$$\varphi(w, m-1) = \sin\pi(w-\varrho_{k+1})\cdots\sin\pi(w-\varrho_m)\,\varphi(w, k-1)$$

verwandelt, d. h. so, dass der in (143) unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck $F(w)\,\varphi(w, m-1)$ nicht mehr an den Stellen $w=\varrho_{k+1}, \cdots, \varrho_m$ — deren entgegengesetzte Werthe zu den übrigen Wurzelgruppen gehören — unendlich werden kann. Dadurch geht das Integral (143) in das folgende über:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(_{-\infty}l)} F(w)\sin\pi(w-\varrho_{k+1})\cdots\sin\pi(w-\varrho_m)\,\varphi(w, k-1)\,x^{-w}\,dw\,, \tag{146}$$

wo $F(w)$ durch (145) definirt ist.

Der Ausdruck $\varphi(w, k-1)$ enthält noch k willkürliche Constanten (A). Wir behaupten nun, dass (146) das allgemeinste zur Wurzelgruppe $(-\varrho_1, \cdots, -\varrho_k)$ gehörige Integral der Differentialgleichung (140) darstellt.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich, wenn man das obige Integral mit Hülfe des Cauchyschen Satzes in eine Reihe verwandelt, wobei zugleich die Ordnungszahlen der Unendlichkeitsstellen von

$$F_1(w) = F(w) \sin \pi (w - \varrho_{k+1}) \cdots \sin \pi (w - \varrho_m),$$

wenigstens von einer bestimmten Stelle an, genau anzugeben sind. Die sämmtlichen Unendlichkeitsstellen dieses Ausdrucks sind nach dem Obigen als Glieder in den k, von dem Integrationswege $l_{-\infty}$ eingeschlossenen, arithmetischen Reihen enthalten:

(147) $$\varrho_\mu, \varrho_\mu - 1, \cdots, \varrho_\mu - \nu, \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, k)$$

welche beziehungsweise den k Factoren $\Gamma(w-\varrho_1), \cdots, \Gamma(w-\varrho_k)$ des Zählers von $F(w)$ als Reihen ihrer Unendlichkeitsstellen entsprechen. Da weder die übrigen Factoren Γ des Zählers noch die des Nenners von $F(w)$ an diesen Stellen unendlich werden, und da die trigonometrischen Factoren von $F_1(w)$ an denselben von der Null verschieden sind, so ist die Ordnungszahl irgend einer Stelle (147), als Unendlichkeitsstelle für $F_1(w)$ betrachtet, genau gleich der Anzahl derjenigen Factoren $\Gamma(w-\varrho_1), \cdots, \Gamma(w-\varrho_k)$, die an dieser Stelle gleichzeitig unendlich werden, d. h. gleich der Anzahl derjenigen Reihen (147), für welche die betreffende Stelle ein *gemeinsames* Glied ist.

Weil die Grössen $\varrho_1 \leq \varrho_2 \leq \cdots \leq \varrho_k$ sich höchstens um ganze Zahlen von einander unterscheiden, so ist unter den Reihen (147) die Reihe

(148) $$\varrho_1, \varrho_1 - 1, \cdots, \varrho_1 - \nu, \cdots$$

dadurch bemerkenswerth, dass ihre sämmtlichen Glieder in jeder der übrigen Reihen (147) enthalten sind, so dass also $\Gamma(w-\varrho_1), \cdots, \Gamma(w-\varrho_k)$ an jeder der Stellen (148) gleichzeitig unendlich werden. An jeder Stelle (148) wird somit $F_1(w)$ genau von der k^{ten} Ordnung unendlich gross. An den übrigen Stellen (147), die nicht allen Reihen gemeinsam sind, wird $F_1(w)$ von niedrigerer als der k^{ten} Ordnung unendlich gross.

Mit Hülfe des Cauchyschen Satzes ergiebt sich, wenn man auch die Formel (138) beachtet, dass das Integral (146) gleich einer Reihe ist, wo die sämmtlichen, zu den Stellen (147) gehörigen Residuen des unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrucks $F_1(w)\varphi(w, k-1)x^{-w}$ als Glieder vorkommen. Es erübrigt uns, die Form dieser Residuen auf Grund der obigen Erörterungen anzugeben.

Offenbar hat man

$$x^{-w} = x^{-\varrho_1+\nu}\left[1 - \frac{(w-\varrho_1+\nu)}{1}\log x + \frac{(w-\varrho_1+\nu)^2}{1.2}(\log x)^2 - \cdots\right],$$

$$F_1(w)\,\varphi(w, k-1) = \frac{K_k^{(\nu)}}{(w-\varrho_1+\nu)^k} + \cdots + \frac{K_1^{(\nu)}}{w-\varrho_1+\nu} + \mathfrak{P}(w-\varrho_1+\nu),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet. Ertheilt man den willkürlichen Constanten A von φ solche Werthe, dass φ an der Stelle $w = \varrho_1$, und somit auch an allen übrigen Stellen (147), von der Null verschieden ist, so ist auch $K_k^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, \infty)$ nach dem oben Dargelegten thatsächlich von der Null verschieden. Das zur Stelle $w = \varrho_1 - \nu$ gehörige Residuum hat also die Form

$$R_\nu = x^{-\varrho_1+\nu}\left[K_1^{(\nu)} - \frac{K_2^{(\nu)}}{\underline{|1}}\log x + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{K_k^{(\nu)}}{\underline{|k-1}}(\log x)^{k-1}\right]$$

und enthält bei unbestimmten Werthen der Constanten A den Logarithmus thatsächlich in der $(k-1)^{ten}$ Potenz. Die zu den übrigen, nicht allen Reihen (147) gemeinsamen, Unendlichkeitsstellen gehörigen Residuen, welche durch S_ν bezeichnet werden mögen, enthalten dagegen höchstens die $(k-2)^{te}$ Potenz von $\log x$.

Für das Integral (146) ergiebt sich also eine Reihenentwickelung:

$$(149)\qquad \sum_\nu S_\nu + x^{-\varrho_1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[K_1^{(\nu)} - \frac{K_2^{(\nu)}}{\underline{|1}}\log x + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{K_k^{(\nu)}}{\underline{|k-1}}(\log x)^{k-1}\right]x^\nu,$$

welche bei unbestimmten Werthen der Constanten A die $(k-1)^{te}$ Potenz von $\log x$ wirklich enthält.

Die Richtigkeit unserer Behauptung, dass (146) das allgemeinste zur Wurzelgruppe $(-\varrho_1, \cdots, -\varrho_k)$ gehörige Integral der Differentialgleichung (140) darstellt, wird offenbar erwiesen, wenn wir zeigen, dass man durch geeignete Verfügung über die Constanten A bewirken kann, dass die obige Reihenentwickelung unseres Integrals (146) sich successive in Reihen verwandelt, worin die höchste thatsächlich enthaltene Potenz von $\log x$ beziehungsweise die $(k-2)^{te}$, $(k-3)^{te}$, $\cdots$, bis 0te ist. Denn zwischen solchen Reihen, deren Anzahl hier gleich k ist, wenn die ursprüngliche Reihe (149) mit gerechnet wird, kann bekanntlich keine lineare Gleichung bestehen.

Verfügen wir in der That über die Constanten A so, dass $\varphi(w, k-1)$ sich in $\sin\pi(w-\varrho_1)\,\varphi(w, k-2)$ verwandelt, so wird der nunmehr unter dem

Integralzeichen (an Stelle von $F_1(w)$) stehende Factor $F_1(w) \sin \pi (w - \varrho_1)$ an den Stellen (148) genau von der $(k-1)^{ten}$ Ordnung — an den übrigen, allen Reihen (147) nicht gemeinsamen Stellen aber von niedrigerer als der $(k-1)^{ten}$ Ordnung — unendlich gross. Hieraus folgt offenbar, wie oben, dass das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\left(\frac{l}{-\infty}\right)} F_1(w) \sin \pi (w - \varrho_1)\, \varphi(w, k-2)\, x^{-w}\, dw$$

in eine Reihe entwickelbar ist, welche der Form nach sich von der Reihe (149) nur dadurch unterscheidet, dass statt k die Zahl $k-1$ vorkommt, und welche den Logarithmus thatsächlich in der $(k-2)^{ten}$ Potenz enthält, wofern die $k-1$ Constanten A in $\varphi(w, k-2)$ als willkürliche Grössen betrachtet werden. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man schliesslich für das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\left(\frac{l}{-\infty}\right)} F_1(w) \sin^{k-1} \pi (w - \varrho_1)\, \varphi(w, 0)\, x^{-w}\, dw\,,$$

wo $\varphi(w, 0)$ eine willkürliche Constante bedeutet, eine Reihe der Form

$$x^{-\varrho_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} K^{(\nu)} x^{\nu}\,,$$

wo die K von der Null verschieden sind. Hiermit ist die Richtigkeit der fraglichen Behauptung erwiesen.

Erinnern wir uns, in welcher Weise das Integral (146) aus dem allgemeineren Integrale (143) hervorging, so ist hiermit zugleich bewiesen, dass der Integralausdruck (143) das allgemeinste, zu einer beliebigen Wurzelgruppe der determinirenden Fundamentalgleichung $f(\varrho) = 0$ gehörige Integral der Differentialgleichung (140) umfasst, woraus weiter folgt, *dass* (143) *unter den am Anfang dieses § angegebenen Voraussetzungen das allgemeine Integral derselben Differentialgleichung repräsentirt, und zwar in der ganzen x-Ebene oder nur in dem durch $|x| < 1$ definirten Gebiete, je nachdem $m > n$ oder $m = n$ ist.*

Im Falle $m = n$ besitzen wir also zunächst nur in der Umgebung $|x| \leq 1$

Fig. 2.

der Stelle $x = 0$ eine Darstellung für das allgemeine Integral unserer Differen-

tialgleichung. An der Hand der obigen Erörterungen ergiebt sich aber sofort, *dass das allgemeine Integral, falls $m = n$ ist, in der Umgebung $|x| \geq 1$ der Stelle $x = \infty$ durch das folgende Integral repräsentirt wird:*

$$(150) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\underset{+\infty}{l})} \frac{\Gamma(1+\sigma_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma_n-w)}{\Gamma(1+\varrho_1-w)\cdots\Gamma(1+\varrho_n-w)}\,\varphi(w, n-1)\,x^{-w}\,dw\,,$$

wo die Integration über eine Linie $\underset{+\infty}{l}$ erstreckt ist, welche die sämmtlichen Stellen

$$\sigma_\mu + 1, \sigma_\mu + 2, \cdots \sigma_\mu + \nu, \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n)$$

einschliesst. Hierbei wird ebenfalls vorausgesetzt, dass keine von den n^2 Differenzen $\varrho_\mu - \sigma_\nu$ gleich einer ganzen Zahl ist.

35.

Unter der Voraussetzung, dass das Integral (141):

$$(151) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l)} \mathbf{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)\,x^{-w}\,dw$$

über eine solche Linie, $\underset{-\infty}{l}$ oder $\underset{+\infty}{l}$, erstreckt ist, dass es einen bestimmten Sinn besitzt, wurde am Schluss des § 33 eine jedenfalls hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass dasselbe die Differentialgleichung (140) befriedigen soll. Die betreffende Bedingung ist erfüllt, wenn der Integrationsweg l um die Strecke *Eins* in der positiven oder negativen Richtung der reellen Axe verschoben werden kann, ohne dabei irgend eine Unendlichkeitsstelle von $\mathbf{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)$ zu überschreiten.

An der Hand des vorangehenden § ist es nunmehr nicht schwer, ebenfalls hinreichende Bedingungen dafür zu entdecken, dass (151) selbst das allgemeine Integral der genannten Differentialgleichung darstelle. Man kann in der That Folgendes behaupten:

Das Integral (151), über eine Linie $\underset{-\infty}{l}$ erstreckt, stellt in seinem Gültigkeitsbereiche das allgemeine Integral der Differentialgleichung (140) dar, wofern die Linie $\underset{-\infty}{l}$ die Stellen

$$(152) \qquad \varrho_\mu, \varrho_\mu - 1, \varrho_\mu - 2, \cdots, \varrho_\mu - \nu, \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

einschliesst und um die Strecke Eins in der positiven oder negativen Richtung der reellen Axe verschoben werden kann, ohne dabei irgend eine Unendlich-

keitsstelle von $\mathbf{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)$ zu überschreiten. Ebenso stellt im Falle $m = n$ das Integral (151), über eine Linie $l_{+\infty}$ erstreckt, in der Umgebung $|x| \geqq 1$ der Stelle $x = \infty$ das allgemeine Integral derselben Differentialgleichung dar, wofern die Linie $l_{+\infty}$ die Stellen

$$\sigma_\mu + 1, \sigma_\mu + 2, \cdots, \sigma_\mu + \nu, \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n) \tag{153}$$

einschliesst und auf die soeben angegebene Weise verschiebbar ist. Unter den $\lambda + 1$ Grössen A des Ausdrucks $\varphi(w, \lambda)$ müssen hierbei m (resp. n) als völlig unbestimmte Constanten gelten. Hierbei wird ausserdem vorausgesetzt, dass man über die übrigen $\lambda - m + 1$ Constanten A keinenfalls derart verfügt, dass φ an irgend einer, von dem jedesmaligen Integrationswege eingeschlossenen Unendlichkeitsstelle des Ausdrucks $\mathbf{G}(w)$ verschwindet.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen leuchtet an der Hand des vorigen § ohne Schwierigkeit ein.

Erfüllen nun beispielsweise die Constanten ϱ und σ unserer Differentialgleichung die in den vorigen Abschnitten sehr oft vorausgesetzte Bedingung, dass die reellen Theile der Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_m$ einerseits algebraisch kleiner sind als die entsprechenden Theile der Grössen $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ andererseits, so kann das allgemeine Integral stets durch (151) dargestellt werden. In diesem Falle verhält sich nämlich $\mathbf{G}(w)\,\varphi(w, \lambda)$, wenn α eine reelle, die Bedingungen

$$\varrho_\mu < \alpha < \sigma_\nu \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \cdots, m \\ \nu = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix} \tag{154}$$

erfüllende Zahl bezeichnet, in dem zur imaginären Axe parallelen Streifen $(\alpha \leqq u < \alpha + 1)$ überall regulär. *Gehört also der zur imaginären Axe parallele Theil des Integrationsweges diesem Streifen an, so stellt der Ausdruck*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l_{-\infty})} \mathbf{G}(w)\,\varphi(w, m-1)\,x^{-w}\,dw, \qquad (m \geqq n) \tag{155}$$

falls l zugleich die sämmtlichen Stellen (152) *einschliesst, in seinem Gültigkeitsbereiche das allgemeine Integral von* (140) *dar. Ebenso repräsentirt, im Falle $m = n$, der Ausdruck*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l_{+\infty})} \mathbf{G}(w)\,\varphi(w, n-1)\,x^{-w}\,dw \tag{156}$$

in der Umgebung $|x| \geq 1$ *der Stelle* $x = \infty$ *das allgemeine Integral derselben Gleichung, wofern* l *eine die sämmtlichen Stellen* (153) *einschliessende Linie ist, deren zur imaginären Axe paralleler Theil dem Streifen* $(\alpha \leq u \leq \alpha + 1)$ *angehört.*

Die im Abschnitte II ausführlich erörterten, besonders ausgezeichneten Integrale $\Phi(x; c)$, $\alpha \leq c \leq \alpha + 1$, der Differentialgleichung (140) müssen somit auch durch die Integrale (155), (156) darstellbar sein. In der That sind in den Ausdrücken (155), (156) gewisse Integrale enthalten, die dadurch bemerkenswerth sind, dass die zur *reellen* Axe parallelen Theile ihrer Integrationswege derart gedreht werden können, dass dieselben der *imaginären* Axe parallel werden, ohne dass die betreffenden Integrale dabei ihren Sinn verlieren oder sich verändern. Offenbar gehen sie dann in die mit $\Phi(x; c)$ bezeichneten Integrale über.

Im folgenden § wollen wir zeigen, dass die Integration solcher hypergeometrischer Differentialgleichungen, deren Constanten die Bedingungen (154) nicht erfüllen, auf den Fall, wo diese Bedingungen erfüllt sind, zurückgeführt werden kann. Hierbei ist aber zu bemerken, dass die im folgenden § auseinanderzusetzende Ermittelung des allgemeinen Integrals der betreffenden Differentialgleichung bei weitem nicht in allen Fällen die vortheihafteste ist. Es wird vielmehr in den meisten Fällen am vortheihaftesten sein, die im folgenden § zu beschreibenden Transformationen auf die kleinste Zahl zu reduciren, indem man in jedem Falle, wo es nur angeht, das für den vorangehenden § eigenthümliche Verfahren ebenfalls benutzt. Es handelt sich aber bei dieser Gelegenheit vorzugsweise darum, die Richtigkeit unserer Behauptung im Princip nachzuweisen, dass alle hypergeometrischen Differentialgleichungen mit Hülfe der Gammafunction in früher angegebenem Sinne vollständig integrirt werden können.

36.

Multiplicirt man den Ausdruck

(157) $$\mathbf{G}(w) = \Gamma(w - \varrho_1) \cdots \Gamma(w - \varrho_m)\, \Gamma(1 + \sigma_1 - w) \cdots \Gamma(1 + \sigma_n - w)$$

mit $w - \varrho_1$, so nimmt der Parameter ϱ_1 infolge $(w - \varrho_1)\Gamma(w - \varrho_1) = \Gamma(w - \varrho_1 + 1)$ um Eins ab. Wird $\mathbf{G}(w)$ dagegen mit $1 + \sigma_1 - w$ multiplicirt, so nimmt der Parameter σ_1 um Eins zu. Hieraus folgt offenbar, dass jeder Ausdruck der Form $\mathbf{G}(w)$ durch Multiplication mit einer passenden ganzen rationalen Function stets so transformirt werden kann, dass die Constanten ϱ' und σ' des neuen Ausdrucks die Bedingungen

$$\varrho'_\mu < \alpha < \sigma'_\nu \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \cdots, m \\ \nu = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

erfüllen, wo α eine reelle Zahl bedeutet.

Eine entsprechende Transformation kann mit der Differentialgleichung

$$(158) \qquad \left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_m\right)y = \pm\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n\right)xy$$

vorgenommen werden. Fügt man nämlich auf beiden Seiten den symbolischen Factor $\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1-1\right)$ hinzu, wendet auf der rechten Seite die evidente Formel

$$\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1-1\right)xy = x\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)y$$

an und setzt auf beiden Seiten

$$\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)y = z,$$

so bekommt man die Gleichung

$$\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1-1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_m\right)z = \pm\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_n\right)xz.$$

Bei Hinzufügung des symbolischen Factors $\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1-1\right)$ und der gleichzeitigen Substitution $\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)y = z$ erleidet also die Differentialgleichung (158) genau dieselbe Veränderung, wie der Ausdruck $\mathbf{G}(w)$ bei Multiplication mit $w-\varrho_1$, d. h. der Parameter ϱ_1 nimmt in der Differentialgleichung, wie im Ausdrucke, um Eins ab, während die übrigen Parameter unverändert bleiben. In ähnlicher Weise ergiebt sich, dass die Differentialgleichung (158), wenn auf beiden Seiten der symbolische Factor $\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+1\right)$ hinzugefügt und die Substitution $\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+1\right)y = z$ bewerkstelligt wird, sich genau so verändert, wie der Ausdruck $\mathbf{G}(w)$ bei Multiplication mit $1+\sigma_1-w$. Der Parameter σ_1 nimmt in der Gleichung, wie im Ausdrucke, um Eins zu.

Offenbar folgt aus dem Obigen, dass der Differentialausdruck $D\left(x\frac{d}{dx}\right)y = z$, wofern $D(\varrho)$ eine passend gewählte ganze rationale Function von ϱ, und y ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (158) bezeichnet, ebenfalls einer Differentialgleichung derselben Ordnung Genüge leistet:

(159) $$\left(x\frac{d}{dx}+\varrho'_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho'_m\right)z=\pm\left(x\frac{d}{dx}+\sigma'_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma'_n\right)xz,$$

deren Constanten aber die Bedingungen

(160) $$\varrho'_\mu<\alpha<\sigma'_\nu \qquad \begin{pmatrix}\mu=1,2,\cdots,m\\ \nu=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$$

erfüllen und sich höchstens um ganze Zahlen von den entsprechenden Constanten der Gleichung (158) unterscheiden, und zwar so, dass die Differenzen

$$\varrho_\mu-\varrho'_\mu,\ \sigma'_\nu-\sigma_\nu \qquad \begin{pmatrix}\mu=1,2,\cdots,m\\ \nu=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$$

gleich positiven ganzen Zahlen oder Null sind.

Bei der Transformation der Differentialgleichung (158) in die Gleichung (159) wollen wir der Einfachheit halber die Grössen ϱ unverändert lassen, während die Grössen σ, alle oder einige derselben, um positive ganze Zahlen vergrössert werden, wodurch sie in die resp. Grössen σ' übergehen.

Da die Constanten der Differentialgleichung (159) die Bedingungen (160) erfüllen, so kann das allgemeine Integral derselben nach dem vorigen § in der Form dargestellt werden:

(161) $$z=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l)}\mathrm{G}'(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}dw,$$

wo

$$\mathrm{G}'(w)=\Gamma(w-\varrho_1)\cdots\Gamma(w-\varrho_m)\,\Gamma(1+\sigma'_1-w)\cdots\Gamma(1+\sigma'_n-w)$$

ist und l je nach den Umständen eine Linie $l_{-\infty}$ oder eine Linie $l_{+\infty}$ bedeutet, deren Lage in demselben § näher angegeben wurde. Es ist vortheilhaft, sich die Zahl λ grösser als $m-1$ vorzustellen, damit φ, ausser den erforderlichen m Integrationsconstanten, noch andere enthalte, über welche in besonderen Fällen je nach den Umständen verfügt werden kann.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (158) findet sich nun offenbar unter den Lösungen y der Gleichung

(162) $$D\left(x\frac{d}{dx}\right)y=z,$$

wo z das allgemeine Integral (161) bedeutet. Die allgemeinste Lösung dieser Gleichung lässt sich, weil wir für z den geschlossenen Ausdruck (161) besitzen, ohne Schwierigkeit ebenfalls in geschlossener Form darstellen.

Ist beispielsweise $\sigma_1' = \sigma_1 + p_1$, so enthält der Differentialausdruck $D\left(x\frac{d}{dx}\right)y$ nach dem Obigen die symbolischen Factoren $\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+1\right), \cdots, \left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+p_1\right)$, die sich aus der Gleichung (162) folgenderweise wegschaffen lassen. Wir multipliciren die Gleichung mit x^{σ_1} und geben ihr zunächst die Form

$$x^{\sigma_1}\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+p_1\right)D_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y = z\,x^{\sigma_1}, \tag{163}$$

wo die Bedeutung von D_1 ohne weiteres klar ist. Durch wiederholte Anwendung der Identität

$$x^{\sigma}\left(x\frac{d}{dx}+\sigma+1\right)X = \frac{d}{dx}x^{\sigma+1}X$$

und durch jedesmalige unbestimmte Integration entstehen nun aus (163) der Reihe nach die Gleichungen:

$$x^{\sigma_1+1}\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+p_1\right)D_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \int z\,x^{\sigma_1}\,dx,$$

$$x^{\sigma_1+2}\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+3\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_1+p_1\right)D_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \int^{(2)} z\,x^{\sigma_1}\,dx^2,$$

. . . .

$$x^{\sigma_1+p_1}D_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \int^{(p_1)} z\,x^{\sigma_1}\,dx^{p_1},$$

so dass also

$$D_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y = x^{-\sigma_1-p_1}\int^{(p_1)} z\,x^{\sigma_1}\,dx^{p_1}$$

ist, wo auf der rechten Seite ein p_1-faches unbestimmtes Integral sich befindet. In ähnlicher Weise lassen sich die übrigen symbolischen Factoren der linken Seite wegschaffen. Es wird aber genügen, die rechte Seite der letzten Gleichung in geschlossener Form darzustellen, um daraus ersehen zu können, von welcher Form die allgemeinste Lösung y der Gleichung (162) schliesslich wird.

Nach § 33 darf die unbestimmte Integration von $z\,x^{\sigma_1}$, wenn z einen Ausdruck der Form (161) bedeutet, gemäss der Gleichung (142) ausgeführt werden. Thuen wir dies, so erhalten wir:

$$D_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l)}\frac{G'(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}\,dw}{(1+\sigma_1-w)(2+\sigma_1-w)\cdots(p_1+\sigma_1-w)} + x^{-\sigma_1-p_1}\sum_{\nu=0}^{p_1-1}C_\nu\,x^\nu,$$

wo die C Integrationsconstanten bezeichnen. Nun enthält aber $\mathbf{G}'(w)$ den Factor $\Gamma(1+\sigma_1'-w) = \Gamma(1+\sigma_1+p_1-w) = (1+\sigma_1-w)\cdots(p_1+\sigma_1-w)\,\Gamma(1+\sigma_1-w)$. Es ist also

$$D_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\mathbf{G}_1'(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}\,dw + x^{-\sigma_1-p_1}\sum_{\nu=0}^{p_1-1}C_\nu x^\nu$$

wo $\mathbf{G}_1'(w)$ sich von $\mathbf{G}(w)$ höchstens dadurch unterscheidet, dass die Constanten $\sigma_2', \cdots, \sigma_n'$ des ersteren Ausdrucks um positive ganze Zahlen die entsprechenden des letzteren übertreffen können.

Ist nun weiter $\sigma_2' = \sigma_2 + p_2$, so enthält die linke Seite der letzten Gleichung die symbolischen Factoren $\left(x\frac{d}{dx}+\sigma_2+1\right), \cdots, \left(x\frac{d}{dx}+\sigma_2+p_2\right)$. Werden diese vermittelst der oben angewandten Operationen aus der Gleichung weggeschafft, so folgt:

$$D_2\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\mathbf{G}_2'(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}\,dw + x^{-\sigma_2-p_2}\int^{(p_2)}x^{\sigma_2-\sigma_1-p_1}\sum_{\nu=0}^{p_1-1}C_\nu x^\nu\,dx^{p_2},$$

wo $\mathbf{G}_2$ sich nunmehr von $\mathbf{G}$ höchstens dadurch unterscheidet, dass die Constanten $\sigma_3, \cdots, \sigma_n'$ des ersteren Ausdrucks um positive ganze Zahlen die entsprechenden des letzteren übertreffen können. Die p_2 im zweiten Theile der rechten Seite bezeichneten Integrationen können explicite ausgeführt werden. Der ungünstigste Fall tritt hierbei ein, falls $\sigma_2 - \sigma_1$ eine ganze Zahl ist, weil alsdann der Logarithmus auftreten kann. Aber auch dann kann offenbar der fragliche Theil durch Potenzen von x und $\log x$ explicite ausgedrückt werden.

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man schliesslich für die allgemeinste Lösung der Gleichung (162) den Ausdruck

$$(164)\qquad y = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)}\mathbf{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}\,dw + R(x,\log x),$$

wo $\mathbf{G}$ durch (157) definirt ist und R eine in Bezug auf $\log x$ ganze rationale Function bezeichnet, deren Coefficienten Potenzen von x in endlicher Anzahl enthalten.

In dem Ausdrucke (164) muss nach dem Obigen auch das allgemeine Integral der Differentialgleichung (158) enthalten sein. Es entsteht also die Frage, welche Beziehungen zwischen den unbestimmten Constanten der beiden Ausdrücke φ und R stattfinden müssen, damit (164) in das allgemeine Integral

der Differentialgleichung $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \pm g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ übergehen soll. Wir beschränken uns hier auf die folgenden Andeutungen.

Das auf der rechten Seite von (164) vorkommende Integral heisse $\Phi(x;l)$. Versteht man unter $\Phi(x;l^{+1})$ dasjenige Integral, welches entsteht, falls der Integrationsweg von $\Phi(x;l)$ um die Strecke Eins in der positiven Richtung der reellen Axe verschoben wird, so ist

$$\Phi(x;l^{+1}) = \Phi(x;l) + S(x,\log x),$$

wo S die Summe derjenigen Residuen von $\mathbf{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}$ bezeichnet, die zu den zwischen den Linien l und l^{+1} liegenden Unendlichkeitsstellen desselben Ausdrucks gehören. Der Ausdruck S ist, wie $R(x,\log x)$, in Bezug auf $\log x$ eine ganze rationale Function, deren Coefficienten Potenzen von x in endlicher Anzahl enthalten (§ 34). Bezeichnen wir die Integrationsvariable in $\Phi(x;l^{+1})$ mit w' und setzen $w' = w + 1$, so haben wir

$$\Phi(x;l^{+1}) = \frac{\pm 1}{2\pi i}\int\limits_{(l)} \mathbf{G}(w+1)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w-1}\,dw$$

Durch dieselben Rechnungen, wie sie in § 14 gelegentlich der Differentialgleichung (75) angestellt wurden, ergiebt sich auch jetzt die Gleichung

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)\Phi(x;l) = \pm g\left(x\frac{d}{dx}\right)x\,\Phi(x;l^{+1}).$$

Macht man von den vorangehenden Gleichungen Gebrauch, so folgt:

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)(y-R) = +g\left(x\frac{d}{dx}\right)x(y-R+S).$$

Soll also y die Differentialgleichung $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \pm g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ befriedigen, so ist hierfür nothwendig und hinreichend, dass zwischen den Constanten der Ausdrücke R und S (resp. φ) solche Beziehungen bestehen, dass

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)R = +g\left(x\frac{d}{dx}\right)x(R-S)$$

zu einer Identität wird.

Das Schlussergebniss dieses Abschnittes ist also, *dass jede hypergeometrische Differentialgleichung* (158) *mit Hülfe der Gammafunction derart vollständig integrirt werden kann, dass ihr allgemeines Integral sich in der Form*

$$(165) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(l)} \mathbf{G}(w)\,\varphi(w,\lambda)\,x^{-w}\,dw + R(x, \log x)$$

darstellen lässt, wo l je nach den Umständen eine passend gewählte Linie $l_{-\infty}$ *oder* $l_{+\infty}$ *bedeutet, und wo R eine in Bezug auf* $\log x$ *ganze rationale Function bezeichnet, deren Coefficienten Potenzen von x in endlicher Anzahl enthalten.*

Durch passende Verfügung über die Zahl λ, welche im Obigen nur der Bedingung $\lambda \geqq m - 1$ unterworfen war, kann stets erreicht werden, dass der Ausdruck (165) die eine oder die andere von den Gleichungen $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = \pm g\left(x\frac{d}{dx}\right)xy$ befriedigt.

In der vorliegenden Arbeit haben wir den Platz der Gammafunction in der Analysis bei weitem nicht erschöpfend besprochen. Auch in der Theorie derjenigen *partiellen Differentialgleichungen*, denen die hypergeometrischen Functionen mehrerer Veränderlichen genügen, kann „diese in der ganzen Analyse höchst wichtige“ und „der Anstrengungen der Geometer sehr würdige Function“ (Gauss) analogerweise und mit bestem Erfolg angewendet werden.



ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXI. № 2.

SPECIES PALAEARCTICAE

GENERIS

ACANTHIA FABR., LATR.

DISPOSITAE

AB

O. M. REUTER.

I.

Pars systematica.

Genus ACANTHIA Fabr., Latr.

Corpus ovale vel obovatum, nigrum. Caput superne visum transversum, quinquangulare, pone oculos in collum breve constrictum, vertice et fronte fere sub angulo recto convexis, hac apice emarginato, clypeo calloso, gula sulco longitudinali destituta. Oculi maximi, valde exserti et convexi, superne margine interiore postice sinuati. Ocelli duo in vertice inter oculos positi, sat appropinqvati vel saepe subcontigui. Labrum elongato-triangulare, apice acuminatum. Rostrum tri-articulatum, apicem metasterni attingens, articulo primo brevi, a capite distante, secundo basi incrassato, tertio et secundo rectis. Antennae sat longe ante oculos insertae, quadri-articulatae, filiformes, articulo primo brevi, secundo omnium longissimo, ultimis rarius fortius incrassatis fusiformibus. Pronotum trapeziforme, lateribus limbatis vel carinatis, rotundatis vel rectis, margine acuto, margine basali late emarginato, disco antice callo lato elevato, medio foveola instructo marginibusque impressis. Scutellum triangulare, basi totum detectum, parte apicali impressione transversali discreta. Hemielytra clavo, corio membranaque discretis; corio venis duabus longitudinalibus in areas tres longitudinales (endocorium, mesocorium, ectocorium) partito, limbo laterali distincto, basin versus magis minusve reflexo; membrana venis longitudinalibus apice conjunctis, areas quatuor vel quinque formantibus; membrana interdum (formae brachypterae) abbreviata, semper tamen apicem abdominis attingente. Alae areola angusta, hamo recurrente fere bipartita; interdum (formae brachypterae) valde abbreviatae. Xyphus prosterni brevis, triangularis. Mesostethium breve. Coxae subcontiguae, cardinatae, scrobiculis femoralibus instructae. Pedes saltatorii, femoribus elongatis, posticis reliquis longioribus, tibiis spinulosis, posticis longis, tarsis triarticulatis, articulo primo brevi, ultimo apice biungviculato, aroliis nullis. Mas segmentis duobus genitalibus liberis, primo ultimo ventrali simili. Femina segmento ultimo ventrali postice rotundato, segmenta genitalia tota includente.

A.

Dispositio subgenerum.

1'. Pronotum lateribus magis minusve explanatis et acutis, callo margines laterales numquam attingente, impressione pone hunc arcuata, plerumque pone medium pronoti sita.

2'. Membrana areis quinque, quarum subexterna reliquis breviore, tertia et quinta apicem versus sat longe contiguis, area interna vel prima basi ante aream proximam numquam plus quam tertia sua parte producta, apice apicem secundae haud attingente. Pronotum versus apicem minus angustatum, marginibus lateralibus ante apicem subito angulatis, margine apicali inter angulos capiti latitudine subaequali vel hoc paullo latiore, limbo laterali plerumque inferne late albido vel eburneo. Prostethium totum vel limbis latis anteriore et exteriore acetabulorum anticorum albidis vel eburneis. Hemielytra locis sericeo-nigris destituta. Corpus latum. Ocelli distincte distantes. Antennae articulo secundo latitudine capitis haud longiore. Fig. 1.

1. **Chiloxanthus** Reut.

2. Membrana solum areis quatuor.

3'. Membrana area prima vel interiore basi *longe* ante aream proximam producta, apice apicem secundae haud attingente. Pronotum apice capite angustius.

4'. Antennae graciliores, breviter pubescentes, parcius longius pilosae, articulo secundo primo duplo et dimidio vel triplo longiore. Ocelli levissime distantes. Caput parte deflexa deorsum et paullo antrorsum vergens. Pronotum lateribus rectis vel rotundatis, callo sat magno, retrorsum ad

quartam basalem partem subextenso. Hemielytra locis sericeo-nigris destituta. Membrana area prima basi $^2/_5$ vel dimidio basali ante basin secundae producta, apice etiam in macropteris supra hujus apicem posito, secunda quam tertia apice haud altius posita; membrana saepe abbreviata. Alae plerumque abbreviatae vel nullae. Figg. 2 et 3.

2. **Sciodopterus** A. et S.

4. Antennae crassae, dense pubescentes, parcius pilosae, articulo primo longo, parte dimidia sua apicali clypeum superante, secundo primo $^2/_3$—$^3/_4$ longiore. Ocelli subcontigui. Pronotum lateribus rectis vel obsolete subsinuatis, callo magno, fortiter convexo, retrorsum longe extenso, limbo laterali saltem inferne toto albido. Acetabula antica limbis latis antico et externo albidis. Meso- et metasterna postice late alba. Hemielytra locis sericeo-nigris variegata. Membrana area prima magis quam dimidio basali ante aream secundam producta, apice longe supra hujus apicem posita, etiam area secunda apice quam tertia altius posita. Fig. 4.

3. **Calacanthia** Reut.

3. Membrana area prima vel interiore basi ante aream proximam leviter vel haud magis quam tertia sua parte producta, apice quam secunda altius posita vel hujus apicem attingente. Caput subverticale. Antennae sat graciles. Pectus saepe saltem margine antico acetabulorum anticorum testaceo vel albido. Hemielytra saepe locis sericeo-nigris variegata. Membrana et alae magis minusve explicatae vel abbreviatae. Figg. 5—10.

4. **Acanthia** in sp. Reut.

1. Pronotum nitidum, versus apicem valde angustatum, strictura apicali distincta, lateribus rectis vel sinuatis, ad sulcum transversalem antice obtusiusculis, callo totam latitudinem pronoti occupante retrorsum brevius extenso, impressionibus callum antice et postice terminantibus rugulis longitudinalibus instructis, sulco pone callum profundo, parum vel paullo pone medium (strictura apicali excepta) posito. Caput verticale. Oculi valde exserti ab apice pronoti distantes. Ocelli valde appropinquati vel subcontigui, in elevatione positi. Hemielytra opaca, clavi apice guttula, corio limbo laterali toto vel ad maximam partem guttisque duabus adjacentibus ante medium, altera ante alteram posita, pallide flaventibus vel albidis, mox ante apicem gutta albida, interdum cum limbo laterali confluente; corio medio et angulo interiore macula glaucescente. Figg. 11 et 12.

5. **Chartoscirta** Stål.

B.

Dispositio specierum.

Subg. 1. **Chiloxanthus** Reut.

1'. Antennae articulis duobus primis flavotestaceis, primo saepe inferne nigropiceo, secundo raro piceo, apice testaceo, ultimis fuscis vel nigris. Pedes flavo-testacei, femoribus nigrovariegatis, tibiis nigrospinulosis, apice interdumque etiam basi nigris, tarsorum articulo tertio apice nigro.

2'. Corpus superne oleo-micans. Pronotum lateribus leviter rotundatis, limbo laterali latius sordide testaceo vel albido. Hemielytra colore variantia. Mesosternum utrinque macula magna laterali albida.

3'. Corpus pilis longis erectis pilosum. Hemielytra adhuc griseo-pubescentia. Long. $4\,{}^{2}/_{5}$—6 mm.

1. **pilosus** Fall.

3. Corpus pilis erectis destitutum, solum capite pilis quatuor erectis. Hemielytra tenuiter nigricanti-pubescentia. Long. $4\,{}^{1}/_{4}$—$4\,{}^{3}/_{4}$ mm. An varietas pilis destituta praecedentis?

2. **arcticus** J. Sahlb.

2. Corpus superne opacum, flavescenti-sericans. Pronotum lateribus rectis, limbo angusto laterali anterius abbreviato testaceo. Hemielytra coriacea, haud punctata, basin versus fortius ampliata et explanata. Variat mesosterno utrinque macula majore albida. Long. 5—$7\,{}^{1}/_{2}$ mm.

3. **borealis** Stål.

1. Antennae nigrae, graciles, setis longis nigris instructae, articulo secundo primo triplo longiore, tertio secundo duplo breviore et quarto aeqve longo. Pedes sat graciles, longi, nigri, tarsis fuscescentibus. Corpus superne nigrum, opacum, subtilissime punctulatum, pube cinerascente tenuissima. Hemielytra valde dilatata, squamulis argenteis vestita; sutura late nitida; membrana maculis ferrugineis. Pronotum breve, postice transversim rugulosum. Corpus inferne nigrum, tenuissime dense cinereo-pubescens. Prostethium limbo antico albo. Long. 5 ½ mm. (Sec. Jakovleff). Mihi ignota.

4. **suturalis** Jak. [1]

Subg. 2. **Sciodopterus** Am. et Serv.

1′. Corpus nigrum, nitidum, metallicum, aeneo-micans, superne subtiliter aureo-pubescens. Pronotum lateribus latis fortiter reflexis, transversim rugosis, callo magno. Hemielytra nigra, parce punctata, aureo-pubescentia, membrana incompleta, aenescente. Antennae flavescentes, articulo primo basi nigro. Pedes flavescentes, femoribus medio, tibiis tarsisque fuscescentibus. Long. 5 ½ mm. (Sec. Jakovleff). Mihi ignota.

1. **micans** Jak.

1. Corpus haud metallicum.

2′. Corpus superne nitidum, dense cinereo-pubescens, setis nigris semierectis. Hemielytra opaca, mesocorio punctis tribus flavescentibus, etiam endocorio punctis nonnullis flaventibus, membrana nigro-fusca. Pronotum breve, lateribus rectis. Caput inter oculos punctis flavis in seriem positis. Antennae nigrae, longae, gracillimae, articulis ultimis pilosis. Pedes longi, gracillimi, nigricantes, femoribus apice sordide albidis, tibiis apice tarsisque fuscotestaceis, tibiis nigro-spinulosis. Long. 5 ½ mm. (Sec. Jakovleff). Mihi ignota.

2. **gracilipes** Jak.

2. Corpus superne setis nigris destitutum.

3′. Corpus superne opaculum, pube brevi sericeo-fulva magis minusve dense vestitum. Hemielytra crebre subtiliter punctulata. Antennae articulis duobus primis flavo vel fusco-testaceis, primo inferne nigro. Pedes ad maximam partem flavo-testacei (♂♀).

---

[1]) Verisimiliter hujus subgeneris. Ocelli lati distantes. Pronotum lateribus rectis, margine apicali capite cum oculis vix angustiore, callo leviter convexo. Hemielytra dilatata, membranae area prima apicem secundi haud attingente, quarta abbreviata.

4'. Pronotum lateribus subrectis vel apicem versus levius rotundatis, basi formae brachypterae capite cum oculis dimidio vel $^2/_3$ latius, formae macropterae capite vix duplo latius. Corium medio guttulis tribus testaceis in seriem positis, interdum totis deficicientibus. Long. 5—6 $^1/_2$ mm.
3. **litoralis** Lin.

4. Major et latior. Pronotum lateribus versus apicem fortiter arcuatis, basi formae brachypterae capite cum oculis magis quam duplo latius. Corium guttis testaceis destitutum, limbo costali fortius dilatato et reflexo. Long. 6 $^1/_4$—8 mm. An species propria? 3 a. var. **adriatica** Horv.

3. Corpus nitidum, nigrum, glabrum vel omnium remotissime et subtilissime pubescens. Corium immaculatum. Membrana plerumque abbreviata et tota coriacea, nigra, nitida.

5'. Hemielytra crebre minus subtiliter punctata, corii area externa tamen remote parcius punctata. Pronotum lateribus subrectis (forma macroptera) vel leviter rotundatis (f. brachyptera). Pedes maris pallide flavo-testacei, feminae obscuriores, fuscescenti-testacei, femoribus apice excepto nigris. Tibiae apice nigro. Tarsi articulo ultimo apice vel toto fusco. Long. 5—7 $^2/_3$ mm. 4. **Muelleri** Gmel.

5. Hemielytra laevigata, punctis rarissimis adspersis, clavo coriiqve areis interna et media fortius nitentibus. Pronotum antice fortius angustatum, lateribus subrectis, callo fortiter convexo, foveola sat obsoleta. Pedes flavo-testacei, femoribus marginibus vel ad magnam partem nigro-piceis (♂), vel fusco-testacei, femoribus ipso apice excepto nigris (♀). Tibiae apice nigrae. Tarsi toti vel articulo ultimo fusci. Long. 5—7 mm.
5. **morio** Zett.

Subg 3. **Calacanthia** Reut.

1. Species unica. Antennae articulis duobus primis in mare glabris, albis. Corpus superne dense et longe erecte nigro-pilosum. Hemielytra signaturis albis magis minusve dilatatis variegata. Long. 3 $^1/_2$—4 $^1/_4$ mm. *Var. a:* Pronotum lateribus usque ad basin sat late albis. *Var. b, alpicola* J. Sahlb.: Pronotum lateribus posterius angustissime albidis.
1. **Trybomi** J. Sahlb. [1]).

---

[1]) Mas e sibiria a mare *S. alpicolae* J. Sahlb. non nisi pronoti lateribus postice paullo latius albis (character variabilis) divergit. Antennae marium *alpicolae* iis marium *Trybomi* ne minime quidem angustiores.

Subg. 4. **Acanthia** in spec. Reut.

1′. Tarsi postici articulo tertio secundo parum vel paullulum breviore. Limbus lateralis pronoti rarissime latius albus. Pectus numquam fere totum album. Hemielytra sublaevia vel levissime punctulata.

2′. Hemielytra tota opaca, disco immaculata, limbo laterali discolore. Membrana apice subacuminato-rotundata, area interiore apice distinctissime supra apicem areae proximae posita. Antennae breviusculae, articulis duobus primis testaceis, secundo primo vix duplo longiore. Pronotum apice capite cum oculis multo angustius, lateribus rectis vel ante apicem subsinuatis. Pedes testacei.

3′. Femora infra medium annulo lato piceo. Hemielytra pube argenteo-cinerea brevi minus densa. Corium limbo laterali, basi apiceque exceptis, testaceo, hoc limbo in tertia apicali parte nigro-interrupto, apice cum gutta interiore testacea conjuncto. Long. $2\frac{1}{2}$—$2\frac{2}{3}$ mm.

1. **marginalis** Fall.

3. Femora tota flavo-testacea. Hemielytra densius breviter canoargenteo-pubescentia. Corium limbo laterali, basi ipsoque apice exceptis, testaceo-flavo, haud interrupto, sed basi et apice latiore. Long. $1\frac{3}{4}$—$2\frac{4}{5}$ mm.

2. **fennica** Reut.

2. Hemielytra rarissime tota opaca et disco immaculata (in hoc casu autem limbo laterali concolore, antennae longiores), plerumque magis minusve oleo-micantia et saepe locis sericeo-nigris (saltem ad apicem clavi) variegata.

4′. Membrana formae brachypterae et macropterae area interna apice distinctissime supra apicem areae proximae posita. Hemielytra locis sericeo-nigris variegata. Pronotum apice capite cum oculis angustius, lateribus rectis. Antennae articulo secundo primo triplo vel fere triplo longiore. Pedes plerumque maxima parte pallidi. Corpus plerumque magis minusve obovatum. Ocelli subcontigui.

5′. Corium ante medium ad marginem externum macula magna irregulari aliaque minore ante apicem nec non guttulis anguli interioris albidis, clavus ante apicem guttula cuneiformi albida. Epipleura prothoracis plerumque pone medium albida. Antennae articulis duobus basalibus sordide albidis, nigro-lineatis, primo raro toto nigro. Tibiae superne nigro-maculatae.

6'. Acetabula antica et intermedia limbo antico late albida. Corpus ovale (♂) vel *late* obovatum (♀), superne cum hemielytris dense aureo-sericeum. Femora pallida, seriatim nigropunctata. Variat pronoto macula marginali posteriore flavo-albida. Long. $4\frac{1}{2}$—$5\frac{1}{2}$ mm.

3. **bifasciata** Thoms.

6. Acetabula solum antica limbo antico late albido, intermedia solum margine antico tenuiter albido. Corpus oblongo-ovale (♂) vel oblongo-obovatum (♀), hemielytris parum aureo-sericeis. Variat capite toto nigro vel maculis anteocularibus (ut in praecedente) flavo-albidis, antennis articulo primo nigro vel late albo-vittato. Femora antica fere tota, posteriora versus apicem late nigra. Corpus distincte angustius quam in praecedente. Long $4\frac{1}{2}$—$5\frac{2}{5}$ mm.

4. **Branczìki** Reut.

5. Corium solum ante apicem macula majore subquadrata marginem exteriorem attingente, guttulis discoidalibus 3—4 ante medium guttulisqve 2—3 ad suturam membranae albidis. Antennae nigrae, solum articulo primo interne sordide albido vel articulis duobus primis sordide testaceis, primo externe vel inferne nigro.

7'. Corpus superne longe et dense nigro-setosum, parce aureo-sericeum. Oculi maximi, breviter parce setulosi. Antennae articulo secundo primo fere triplo longiore, pilis nigris exsertis, una media interiore longissima. Pronotum et scutellum fortius nitida, illud basi, hoc versus apicem strigosum; callus pronoti alte convexus, latus. Prostethium limbo antico acetabulorum latius vel (var. *Reuteri* Jak.) tenuiter albo. Long. 4—$5\frac{3}{5}$ mm.

5. **nobilis** Horv.

7. Corpus superne longius aureo-sericeum, pilis erectis destitutum. Antennae articulo secundo primo saltem triplo longiore, pilis exsertis nullis. Pronotum et scutellum leviter nitidula, illud callo modice elevato. Prostethium totum nigrum vel margine antico acetabulorum tenuiter testaceo. Long. 4—6 mm.

6. **riparia** Fall.

4. Membrana formae macropterae area interiore apice apicem areae proximae attingente vel subattingente, raro (in *rivularia* et *Sahlbergi* interdum) altius posita, formae brachypterae nonnumquam superius sita (in hoc casu hemielytra tota nigra, opacula vel vitta percurrente corii sericeo-nigra aut

sericeofusca vel demum antennae articulo secundo primo ad summum duplo longiore).

8′. Hemielytra tota opaca vel tota oleo-micantia, locis sericeo-nigris destituta, limbo laterali corii plerumque concolore. Antennae articulo secundo primo $2\,^2/_3$ vel triplo longiore. Pronotum apice capite cum oculis angustius. Pectus totum nigrum. Corpus oblongo-ovale.

9′. Antennae nigrae, solum articulo primo saepe apice vel (♂) superne aut interne latius flavo. Pronotum lateribus rectis vel subrectis. Femora nigra, apice et saepe margine superiore pallida, vel flavo-testacea, magis minusve praecipue inferne nigro-vittata. Tibiae nigrae vel fusco-testaceae, annulo anteapicali pallido, apice nigro. Tarsi nigri vel fusci, articulo secundo pallido.

10′. Clavus et corium unicolora, nigra. Membrana vena exteriore areae externae cum limbo coriaceo nigro confluente vel subconfluente. Corpus superne cum hemielytris sub-opacum, brevius fusco- et flavo-sericeum. Long. $4\,^1/_2$—5 mm.

7. **rivularia** J. Sahlb.

10. Hemielytra albosignata vel flavo-guttata et interdum vittata.

11′. Membrana vena exteriore areae externae cum limbo coriaceo nigro tota confluente, ab illo ne minime quidem distingvenda. Hemielytra opacula, corio ante medium macula exteriore majore aliaque ante apicem subquadrata saepe didyma albidis, plerumque guttis 3—4 interioribus albidis.

12′. Corpus superne pilis erectis destitutum. Long. $4\,^2/_3$—$5\,^3/_4$ mm.

8. **variabilis** H. S.

12. Corpus superne pilis modice longis semierectis nigris vestitum. Long. $4\,^2/_3$—$5\,^1/_3$ mm.

8 a. var. **connectens** Horv.

11. Membrana vena exteriore areae externae bene distincta, a limbo externo distingvenda. Hemielytra gutta ad apicem clavi (interdum etiam clavo guttula parva basali) guttisque corii, duobus mesocorii ante medium, altera pone alteram posita, 2—4 supra suturam membranae et 1—2 anguli interioris corii, saepe etiam vitta vel macula externa ante medium venae exterioris corii testaceis, guttis saepe ad partem obsoletis vel deficientibus.

13′. Corpus superne tenuiter cinereo-pubescens, pilis nigris erectis destitutum. Hemielytra opacula.

14′. Antennae articulo secundo primo circiter triplo longiore. Femora pallide testacea, maculis vel punctis superioribus ante apicem vittaque inferiore

nigris. Tibiae fusco-testaceae, apice nigro, annulo anteapicali pallido. Corium ut superne describitur, guttula basali mesocorii oblonga, limbo laterali vitta ante medium aliaque breviore ante apicem testaceis vel luteis. Color pedum et hemielytrorum verisimiliter variabilis. Long. 6 $^1/_4$ mm.

9. **oblonga** Stål.

14. Antennae articulo secundo primo vix plus quam 2 $^2/_3$ longiore Femora nigra, apice pallido. Tibiae nigrae, annulo ante apicem pallido. Hemielytra ut in 11 describitur, limbo exteriore concolore nigro vel vena corii externa ante medium externe longe flavo-marginata. Long. 6—7 $^1/_2$ mm. A praecedente vix nisi articulo secundo antennarum breviore et fortius curvato divergere videtur. Long. 6—7 $^1/_2$ mm.

10. **Jakovleffi** Reut.

13. Corpus superne cum hemielytris longe erecte nigro-pilosum, sat dense cinereo-pubescens. Antennae articulo secundo primo fere triplo longiore, pilis nonnullis exsertis instructo. Signaturae corii magis minusve distinctae vel obsoletae. Variat (var. *vittuligera* mihi) ectocorio vitta obliqua leviter arcuata prope basin usqve ad medium marginis lateralis producta testacea, guttulis exterioribus apicalibus confluentibus maculam majorem anteapicalem formantibus, margine ipso laterali tamen nigro. Long. 4—6 $^1/_2$ mm.

11. **scotica** Curt.

9. Antennae articulis duobus primis flavotestaceis, primo basi saepeque superne, secundo apice nigro, hoc primo vix magis quam $^2/_3$ longiore. Pedes flavo-testacei, femoribus punctis seriatis nigris, tibiis geniculis vel solum apice nigris, tarsis apice articulorum, articulo ultimo dimidio apicali nigro. Corpus cum hemielytris totis fortius oleo-micans, clavo guttula ante apicem, corio guttulis circiter decem flavotestaceis vel luteis. Membrana limbo laterali externo saltem usqve ad medium coriaceo, fusco, basi macula lutea notato. Pronotum (♀) lateribus usque ad apicem leviter rotundatis. Long. 5 $^2/_3$ mm.

12. **Henschi** Reut.

8. Hemielytra locis sericeo-nigris vel sericeo-fuscis variegata, saltem clavo circa vel supra guttulam apicalem sericeo-nigro. Membrana vena exteriore areae externae cum limbo coriaceo confluente, hoc limbo nigro aut fusco, basi macula lutea signata, vel albido, apice nigro.

15'. Major. Hemielytra oleomicantia, clavo dimidio apicali corioque vitta media percurrente usque a basi usque in suturam membranae oblique ducta retrorsum sensim dilatata sericeo-fuscis vel-nigris. Corpus superne aureo-sericeum. Corium guttis duabus anguli interioris, vitta utrinque juxta venam principalem limboque laterali vitta media et gutta ante apicem testaceis vel luteis, margine exteriore autem sat late nigro. Antennae nigrae, articulo primo interne pallido, secundo primo circiter $2\frac{2}{3}$ longiore. Pedes pallide testacei. Variat antennarum articulo secundo fusco-testaceo. Long. $4—5\frac{1}{2}$ mm.

13. **Sahlbergi** Reut.

15. Minores. Clavus saltem circa vel mox supra guttam apicalem sericeo-niger. Corium saltem apice area plerumque cuneiformi sericeo-nigra, in varietatibus obscuris non nisi rarissime deficiente, in varietatibus corio magis minusve albido haud distingvenda. Antennae breviusculae.

16'. Corium nigrum, fortiter nitens, parte basali endo- et mesocorii, macula parva rotundata mesocorii pone medium, macula consimili ad medium ectocorii nec non macula magna apicali rotundata meso- et ectocorii communi sericeo-opacis, hac macula vittula pallida destituta, ectocorio fascia vel macula rhomboidali obliqua mox ante maculam mediam sericeo-opacam flavicanti-albida, marginem exteriorem haud attingente, in mesocorium haud prolongata, puncto parvo pone maculam apicalem sericeo-nigram flavicanti-albido; mesocorio signatura ocelliformi ante medium obsoletissima; clavo opaculo, basi maculaque mox supra guttulam apicalem minutam sericeo-opacis. Statura ovalis. Caput, pronotum et scutellum valde nitentia, nigra. Pronotum basi quam apice parum magis qvam duplo latius, apice lateribus fere latiore et capite cum oculis paullo angustiore, breve. Antennae articulo secundo primo duplo longiore, primo vitta pallidiore, secundo apice fuscescente, quarto tertio paullo longiore. Acetabula antica margine concolore. Femora nigra, apice pallide flaventia. Tibiae pallide flaventes, omnes basi et apice nigrae, anteriores etiam annulo completo nigro-fusco, posticae externe nigro-fuscae, mox ante apicem annulo pallido. Tarsi pallide flaventes, articulo ultimo nigro. Long. $2\frac{3}{4}$ mm.

14. **amoena** Reut.

16. Corium varietatum obscuriorum apice inter furcationem venae principalis area cuneiformi sericeo-nigra, $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{5}$ apicales occupante, vittam vel

guttas duas testaceas ferente, rarissime deficiente, in varietatibus corio magis minusve late albido haud distingvenda.

17''''. Pedes lutei, tibiis *solum basi et apice* nigris. Acetabula antica margine apicali *late* albo. Antennae nigrae, articulis *tribus* ultimis pilis longis exsertis, secundo primo duplo — fere duplo et dimidio longiore, tertio quarto breviore. Pronotum lateribus rectis usque ad annulum collarem sensim angustatis, apice angulos haud formantibus, margine apicali capite cum oculis angustiore, disco subaenescenti-micans. Hemielytra luteo-guttata, maculis plurimis sericeo-nigris, limbo laterali *solum ante apicem* macula lutea. Long. $3\frac{1}{2}$— (forma macropt.) $4\frac{2}{3}$ mm. Fig 5.

15. **orthochila** Fieb.

17'''. Pedes lutei, femoribus nigro- vel fusco-variegatis, tibiis anterioribus *basi, apice vittulaque media marginis antici*, a basi et apice remota, nigris, hac vitta rarissime in tibiis anticis linea tenui fusca cum basi conjuncta (*c-album* var.). Acetabula antica tota nigra vel margine apicali tenuissime albido. Antennae articulo *secundo pilis longis exsertis destituto*, primo vix duplo vel ad summum paullulum magis quam duplo (character variabilis) longiore, raro toto nigro, plerumque saltem apice, interdum toto luteo. Hemielytra guttis luteis vel pallido-testaceis, mesocorio ante medium macula lutea ocelliformi, interdum obsoleta, in hoc casu autem saltem oleo-micante. Pronotum lateribus rectis (praecipue ♂) vel rotundatis (character in eadem specie sat variabilis), *usque ad annulum collarem sensim angustatis, angulos prominulos ultra annulum haud formantibus*, margine apicali capite cum oculis angustiore, disco haud aenescente. Fig. 6.

18'. Antennae *totae nigrae* vel solum extremo apice articuli secundi ferrugineo, hoc articulo primo duplo longiore, tertio primo aeque longo, quarto tertio paullo longiore. Pronotum latum, transversim subsemilunare, lateribus feminae *fortius arcuatis,* limbo laterali utrinque ad callum quam in sequentibus multo *latiore et fortius reflexo*, basi margine laterali magis quam duplo latiore. Hemielytra opaca, locis plurimis sericeo-nigris variegata, *limbo laterali toto nigro*, ectocorio solum guttulis duabus parvis luteis, altera pone medium, altera ante apicem posita, signatura ocelliformi mesocorii obsoleta, solum nitore oleo perspicua, guttulis nonnullis versus angulum interiorem. A var. *luctuosa* Westh. *A. pallipedis*, cui colore simillima, antennarum articulo tertio primo haud longiore, quarto

tertio distincte longiore, structura pronoti ampliati signaturaque tibiarum, nec non corio magis sericeo-signato divergens. Long. $4\frac{2}{3}$—$4\frac{3}{4}$ mm.

16. **amplicollis** Reut.

18. Antennae rarissime totae nigrae, articulo primo magis minusve, *secundo typice apice vel* in quibusdam speciebus *saepe toto luteo.* Pronotum lateribus minus ampliatum. Hemielytra typice *limbo laterali vitta longiore ante medium aliaque breviore anteapicali,* ectocorio guttulis tribus in seriem positis, prima longius ante medium, mesocorio ante medium signatura ocelliformi magis minusve completa guttulisque nonnullis versus angulum interiorem luteis.

19′. Corium vitta limbi lateralis anteriore cum guttulis ectocorii *haud vel tenuissime* confluente.

20′. Hemielytra maculis typicis et adhuc basi vel macula subbasali clavi, corio basi, disco ocelli, parte infra ocellum vittulaque anguli interioris sericeo-nigris. Corpus formae macropterae et brachypterae *ovale.* Antennae articulo primo tertio solum paullulum breviore, tertio quarto paullo breviore, secundo primo $\frac{3}{4}$ — vix duplo longiore, nigro, apice testaceo, omnium rarissime toto nigro. Pronotum fortius transversum, basi capite duplo vel paullo magis quam duplo latius, margine laterali margine postico $\frac{3}{5}$— $\frac{3}{7}$ — fere duplo breviore. *Variat* signaturis hemielytrorum obscure ferrugineis, vitta anteriore limbi corii brevi, posteriore interdum obsoleta vel fere nulla, guttulis corii interioribus obsoletis. Interdum vena corii principali etiam externe luteoterminata. Long. $3\frac{1}{2}$—$4\frac{2}{5}$ mm. Fig. 6.

17. **saltatoria** L.

20. Hemielytra ad magnam partem opacula, plerumque (non tamen semper) solum *maculis duabus typicis sericeo-nigris* distinctis. Corpus formae brachypterae (hactenus solae cognitae) saltem ♀ sat late *obovatum,* latitudine maxima ad summum duplo longius, membrana apicem abdominis haud vel parum superante. Antennae articulo primo tertio $\frac{1}{4}$—$\frac{1}{3}$ breviore, duobus ultimis longitudine aequalibus, secundo primo circiter duplo vel fere paullo magis quam duplo longiore, *saepe toto luteo.* Pronotum (f. brach.) basi capite minus quam duplo latius, margine laterali margine basali paullo minus quam duplo vel ad summum duplo breviore. A praecedente praecipue corpore formae brachypterae ♀ late obovato, hemielytris magis opacis articuloque secundo antennarum saepissime luteo, a sequente vitta anteriore limbi lateralis corii cum maculis ectocorii raris-

sime et in hoc casu *anguste* confluente, pronoto latiore, magis transverso et lateribus plerumque (♀) distinctius rotundato divergere videtur. Long. $3\,^{1}/_{3}$—$3\,^{1}/_{2}$ mm.

18. **fucicola** J. Sahlb.

19. Corium vitta anteriore limbi lateralis cum guttis sat dilatatis ectocorii *late* confluente (rarissime ab iis linea tenui disjuncta), cum iis lituram biangulatam aut c-formem vel maculam magnam mesocorium attingentem, medio maculam nigram ferentem, formante; signaturis pallido testaceis, guttula anteapicali ectocorii saepe albida. Antennae articulo primo tertio $^{1}/_{4}$ vel plerumque $^{1}/_{3}$ breviore, secundo primo saepe paullo magis quam duplo longiore, saepe toto luteo, duobus ultimis longitudine subaequalibus. *Forma macroptera* oblongo-ovalis, pronoto fortius transverso, transversim sub-lunari, lateribus sat rotundatis, margine laterali margine basali circiter $^{4}/_{7}$ breviore, basi capite duplo vel magis quam duplo latiore; vitta anteriore limbi lateralis corii fere semper linea tenuissima juxta marginem currente cum vitta posteriore conjuncta, illa cum guttis anterioribus ectocorii late confluente et cum iis maculam, medio maculam nigram ferentem mesocorium attingentem, formante, vitta posteriore saepe cum gutta ectocorii conjuncta. Long. $3\,^{4}/_{5}$—$4\,^{1}/_{2}$ mm. *Forma brachyptera* brevior et praecipue ♀ fere obovata, latitudine vix duplo longior, pronoto minus transverso, lateribus rectis vel leviter rotundatis, margine laterali margine basali duplo vel solum $^{3}/_{7}$ breviore, hoc capite ad summum duplo latiore; margine laterali corii fortius arcuato, signatura corii marginali anteriore plerumque solum antice ad mesocorium extensa. Long. $2\,^{4}/_{5}$—4 mm. *Variat* forma macropt. femoribus posticis interdum fere totis nigris; tibiis anticis interdum margine antico linea a basi ultra medium ducta *tenui* fusca, intermediis autem typice signatis; pubescentia aurea magis minusve densa.

19. **c-album** Fieb.

17″. Pedes pallide flaventes vel testacei, femoribus nigris, solum apice pallide flaventibus, vel rarius pallide flaventibus, seriatim fusco et nigro-punctatis, inferne saepe nigro-vittatis; *tibiis anterioribus basi et apice* nigris, *medio annulo completo* a basi et apice remoto *fusco,* saepe autem sat obsoleto vel deficiente. *Hemielytra* opaca, etiam disco ocelli mesocorii sericeo-nigro, *signaturis albidis*, corio ante medium fascia lata a margine laterali usque ad ocellum valde dilatatum mesocorii ducta, macula magna exteriore anteapicali mesocorium attingente, marginibus venae principalis guttulisque

tribus anguli interioris, his saepe magis minusve confluentibus vel magis minusve obsoletis. *Corpus breviter ovale*, basin et apicem versus sat fortiter angustatum. Antennae articulo primo tertio circiter $^1/_4$ breviore, secundo primo duplo longiore, tertio quarto fere $^1/_5$ breviore. Pronotum breve, lateribus leviter arcuatis, margine laterali margine basali duplo vel magis qvam duplo breviore, basi capite cum oculis vix duplo latiore. Long. $2\,^4/_5$—$3\,^1/_2$ mm.

20. **melanoscela** Fieb.

17'. Pedes lutei, femoribus plerumque fusco- vel nigro-punctatis, interdum inferne nigris, *tibiis anterioribus solum apice* vel *basi et apice* nigris, non nisi raro linea marginis anterioris tenuissima fuscescente. Acetabula antica nigra vel margine apicali anguste albido. *Clavus ad maximam partem sericeo-niger*, aureo-sericans, solum ipsa basi limboque angusto extra venam nitidulis. *Corium* solum area apicali cuneiformi sericeo-nigra vel etiam hac nitidula, *limbo toto laterali*, basi ipsoque apice exceptis, *luteo vel albido*, non nisi raro in tertia apicali parte nigro-interrupto, margine tamen angusto exteriore luteo; ectocorio gutta anteapicali saepe albida. Antennae articulo secundo primo ad summum duplo longiore. Pronotum lateribus rectis vel leviter curvatis, *usque ad* angulum collarem sensim angustatis, angulos obtusos juxta annulum *haud vel vix formantibus*. Corpus oblongo-ovale. Fig. 7.

21'. *Corpus minus anguste ovale*. Hemielytra opacula. Corium signaturis albidis, limbo laterali albido cum vitta adjacente ectocorii et ocello mesocorii magis minusve confluente *maculam magnam formante*, hoc ocello interne incompleto; *apice limbi* albidi interne dilatato et *cum gutta apicali ectocorii confluente*, angulo interiore corii guttulis 1—2; area cuneiformi apicali sericeo-nigra. Membrana parte coriacea limbi lateralis fere tota albida. Antennae articulis duobus primis pallide flaventibus, primo tertio $^1/_3$ breviore, secundo primo vix magis qvam $^2/_3$ longiore, tertio et quarto longitudine aeqvalibus. Pronotum lateribus rectis vel levissime subrotundatis, apice capite cum oculis paullo angustiore, basi capite cum oculis circiter $^2/_3$ latiore, margine laterali margine basali fere $^3/_5$ breviore. Pedes pallide flaventes vel testacei, tibiis solum apice anguste nigris. Long. $2\,^3/_4$—$2\,^4/_5$ mm.

21. **ornatula** Reut.

21. *Statura angustius oblongo-ovalis*. Corium *limbo laterali non* nisi rarissime ante medium cum macula adjacente nec apice cum guttula apicali ectocorii

confluente, in hoc casu autem *ad maximam partem pallidum* vel late pallido-vittatum.

22'. *Corpus* superne capite, pronoto, scutello hemelytrisque *longe nigro-pilosis. Antennae articulis duobus primis flavo-testaceis*, articulo secundo pilis nonnullis longioribus exsertis, primo vix duplo — duplo longiore, primo tertio breviore, inferne nigro. Caput, pronotum et scutellum nitida. *Pronotum* lateribus versus apicem fortius angustatis, rectis, apice capite multo angustius, *margine laterali* margine basali duplo breviore, *longe ciliato*, callo fortius convexo. Hemielytra oleo-micantia, clavo supra guttam apicalem sericeo-nigro, *corio toto oleomicante*, *area cuneiformi* apicali *haud sericeo-nigra*, limbo laterali, ipsa basi margineque apicali exceptis, testaceo, ectocorio pone medium guttis duabus pallidis, anteapicali albicante, vena principali apicem versus utrinque, externe etiam basin versus testaceo-marginata, guttis 2—3 anguli interioris saepeque etiam sutura clavi testaceis, signatura ocelliformi mesocorii ante medium posita distincta, *margine laterali breviter ciliato.* Pedes flavo-testacei, femoribus utrinque serie punctorum fuscorum, tibiis solum apice fusco. Long. 3 ½ mm.

22. **setulosa** Put.

22. Corpus superne *pilis erectis destitutum.*

23'. *Antennae totae nigrae*, solum articulo *primo* plerumque apice magis minusve testaceo, secundo non nisi omnium rarissime apicem versus testaceo-fusco (*opacula* var. *nitidula*, 1 specim), articulo secundo longitudine sat variabili, tertio quarto aequelongo vel paullo breviore. *Pronotum* versus apicem magis minusve angustatum, *margine apicali laterali breviore*, lateribus totis rectis vel leviter praecipue basin versus arcuatis. Hemielytra magis minusve oleo-nitidula, corio pube aurea destituto. Pedes pallidi, femoribus nigro-punctatis, inferne saepe nigro-vittatis, tibiis anterioribus basi et apice nigris, interdum linea tenuissima a basi ducta fuscescente.

24'. *Caput, pronotum et scutellum nigra,* nitida, haud metallice micantia. *Clavus solum extrema basi limboque angustissimo* juxta suturam clavi *oleo-nitidulis*, cetero sericeo-niger, aureo-sericans. *Variat a*, typica: corio linea marginem exteriorem venae principalis terminante, alia interiore medium attingente saepe obsoleta, vitta maculae apicalis cuneiformae sericeo-nigrae, saepe etiam ectocorio pone medium guttulis duabus anguloqve interiore guttulis 2—3 obscure flavo-ferrugineis, his signaturis interdum totis obsoletis, corio fere toto nigro. Long. 2 ¾—3 ¾ mm. — Var. *b*, *marginella* Put. (nec Fieb.): praecedenti major, signaturis hemielytrorum pallidius

flaventibus, magis dilatatis, signatura ocellari mesocorii bene distincta, saepe juxta hanc linea endocorii venam terminante aliaque suturam clavi terminante pallide flaventibus, guttula posteriore ectocorii (interdum deficiente) guttulaque postica anguli interioris corii plerumque albis; limbo laterali flavo rarissime fere in tertia apicali parte nigro-interrupto (1 ex.). Long. $3\,{}^{3}/_{4}$—$4^{3}/_{5}$ mm. Fig. 7.

23. **opacula** Zett.

24. *Caput, pronotum et scutellum aenescentia. Clavus basi latius* oleo-micante, hoc nitore externe versus medium *oblique* extenso. Corium ut in var. *marginella* Put. superne descripta signatum. Pronotum lateribus rectis, versus apicem fortius angustatis, apice capite cum oculis multo angustiore. Long. $3\,{}^{3}/_{4}$—4 mm.

23 a var. vel subsp. **nitidula** Put.

23. *Antennae articulis duobus primis flavotestaceis*, primo vitta inferiore, secundo solum margine extremo apicali nigro, hoc primo duplo longiore et latitudini calli pronoti fere aequelongo, primo tertio breviore, quarto tertio aequelongo. Pronotum apice capite cum oculis paullo angustius, lateribus sat leviter rotundatis, interdum in mare subrectis, *margine apicali laterali saltem aequelongo*, hoc basali magis qvam duplo breviore. Hemielytra colore variantia, limbo pallido laterali saepe ad tertiam apicalem partem tenuiore, sed numquam ibi interrupto (ut in *pallipede*), ectocorio puncto ante apicali albo. Membrana parte coriacea limbi externi apice interne fusco. Pedes flavo-testacei, femoribus obsolete fuscopunctatis, tibiis basi externe apiceqve anguste nigris, *anticis* interdum margine antico linea tenuissima fusca a basi ultra medium ducta. Long. $3\,{}^{1}/_{2}$—4 mm. — *Variat a*, typica: hemielytris nigris, signatura typica ocelliformi mesocorii, lineis longitudinalibus juxta venas limboque laterali, basi apiceque exceptis, pallide flavo-testaceis; — *b*, ut supra, sed signaturis pallidis maxime dilatatis; — *c*, *imitator* m.: hemielytris pallide flavo-testaceis, clavo, gutta apicali excepta, corio basi, margine interiore maculisqve tribus venae externae in seriem longitudinalem positis, his saepe conjunctis.

24. **mutabilis** Reut.

17. Pedes flavicantes, femoribus nigro-punctatis saepeque inferne nigris, *tibiis anterioribus margine antico a basi longe ultra medium nec non apice nigro.* Hemielytra clavo solum circa guttulam apicalem maculaque cuneiformi corii apicali sericeo-nigris, hac in varietatibus corio pallido instructis haud

perspicua; signaturis plerumque (exc. *A. palustri*) albidis, valde variabilibus, interdum valde reductis, saepe autem valde dilatatis, in hoc casu corio ad maximam partem pallido, clavo semper tamen nigro, solum guttula apicali vel apice albo. Pronotum plerumque (exc. *pallidipenni*) lateribus versus apicem minus fortiter angustatis, ante annulum apicalem subito fortius curvatis et plerumque angulos obtusos magis minusve distinctos formantibus, margine apicali capite cum oculis aeque lato vel fere aequelato. Fig. 8.

25′. Corpus dense argenteo-sericans, capite, pronoto, scutello, *clavo* et *corio toto* sat dense *longe nigro-pilosis*, pilis corii illis pronoti, scutelli et clavi longitudine aequalibus. *Antennae pilosae*, *articulis duobus primis flavescentibus*, articulo primo tertio aeque longo, tertio quarto distinctissime breviore. *Pedes longe albo-pubescentes*, pallidoflaventes, *tibiis anterioribus* margine antico *pilis tenuibus fuscis exsertis*, his pilis pubescentia saltem duplo longioribus. Acetabula antica et intermedia limbo apicali latius albido. *Pronotum* fortiter transversum, transversim planiusculum, lateribus rectis vel ad ipsum apicem leviter rotundatis, apicem versus minus fortiter angustatis, margine apicali capiti aeqvelato, basi qvam apice minus quam duplo latiore, *margine laterali ciliato* margine basali magis qvam duplo breviore. Hemielytra apice clavi corioque, basi et summo angulo apicali exceptis, sordide albidis. Membrana parte coriacea limbi externi pallida, limbo apicali nigricante. Long. ♂ $3\,{}^4/_5$, ♀ $4\,{}^1/_2$ mm.

25. **hirsuta** Reut.

25. Pronotum margine laterali *non ciliatum*. Pedes subtilissime vel *vix pubescentes*-

26′. Corpus capite, pronoto, scutello, *clavo corioque interne pilis nigris* sat brevibus *suberectis pilosis*, corio externe et apice subtiliter nigricanti-pubescente. Antennae nigrae, articulo primo ad partem secundoque ad apicem flaventibus, *quarto tertio paullulum longiore*. Pronotum lateribus plerumque totis rectis, haud usque ad annulum apicalem sensim angustatis, sed angulos anticos obtusos utrinque juxta annulum formantibus, margine apicali capiti cum oculis aequelato et margine laterali fere longiore, hoc basali duplo breviore. Corium sordide flavicanti-album, basi, limbo corii juxta clavum extremoque angulo apicali nigris. Long. $3\,{}^1/_2$—$4\,{}^1/_2$ mm.

26. **pilosella** Thoms.

26. Corpus superne pilositate suberecta totum destitutum. *Clavus et corium pubescentia adpressa nigricante.*

27′. Pronotum lateribus versus apicem minus fortiter angustatum, marginibus ante annulum subito fortiter curvatis et plerumque angulos obtusos magis minusve distinctos formantibus (his angulis rarissime (2 exx.) *pallipedis* parum distingvendis, margine laterali tamen apice oblique rotundato), margine apicali capiti cum oculis aeqvelato vel fere aequelato et margini laterali longitudine aeqvali vel fere aeqvali. Antennae articulo secundo typice ante apicem annulo testaceo vel ferrugineo, interdum toto nigro, rarissime (*pallipes,* specimen unicum) toto testaceo. Femora testacea, seriatim nigropunctata vel inferne latius (rarissime tota) nigra.

28′. Hemielytra signaturis typice sordide *albidis, raro flaventibus, in hoc casu oleo-micantia.* Pronotum basi capite cum oculis duplo vel magis qvam duplo latius.

29′. Pronotum margine laterali concolore.

30′. *Corium* praecipue varietatum obscuriorum *distincte oleo-micans*, typice vitta anteriore limbi lateralis, guttis ectocorii et signatura ocelliformi mesocorii haud confluentibus. Corpus alutaceo-pubescens. Antennae articulis duobus ultimis aequelongis. Pronotum lateribus magis minusve rotundatis, rarius (♂♀) totis rectis. Tibiae posticae plerumque solum basi et apice nigris, cetero flavo-testaceae, rarissime (unicum spec.) omnes nigrae, annulo anteapicali testaceo. Variat colore hemielytrorum: *a*, *luctuosa* Westh.: corio limbo laterali toto nigro, ectocorio pone medium guttulis duabus, altera anteriore, altera posteriore, linea externa juxta partem apicalem venae principalis, vitta areae sericeo-nigrae apicalis, signatura ocelliformi mesocorii guttulisque duabus versus angulum interiorem obscure *flavo-ferrugineis*, his signaturis saepe obsoletis, interdum fere omnibus evanescentibus, solum ectocorio guttula apicali guttulaque parva areae apicalis sericeo-nigrae ferrugineis; haec varietas *A. palustri* Dougl. similis, differt tamen statura magis oblonga corioque oleo-micante, ab. *A. saltatoria* L. ejusque affinibus signatura tibiarum anticarum mox distincta, cum *pallipede* cohabitans; Long. $3\frac{3}{4}$—$4\frac{1}{3}$ mm. — *b*, typica, *ocellata* Costa: corio limbo laterali vitta media aliaque breviore ante apicem, ectocorio guttis tribus in seriem positis, duabus anterioribus, quarum posteriore (quam apicem signaturae ocelliformi mesocorii inferius posita) cum vitta anteriore limbi lateralis saepe confluente, etiam gutta anteapicali cum vittula laterali posteriore saepe confluente, linea externa juxta venam principalem, signatura typica ocelliformi mesocorii, vitta areae apicalis nigro-sericeae, linea interiore juxta ocellum guttulisque tribus magis minusve confluentibus anguli interioris albidis. Long. $3\frac{1}{3}$—$4\frac{1}{4}$ mm.; — *c*, *confluens* m.:

apice clavi, corio fascia anteriore medium longitudinis superante, puncta duo transversim posita ferente, usque ad suturam clavi ducta ibique retrorsum juxta eam ad apicem ejus prolongata, nec non macula magna transversali apicali interne in aream cuneiformem ducta albis. Long. 3 3/4 mm.; — *d*, *dimidiata* Curt.: hemielytris albis vel sordide albido-flaventibus, clavo, guttula apicali excepta, corio basi anguloque exteriore apicali vel etiam limbo juxta suturam clavi nec non maculis duabus lateralibus nigris, posteriore mox infra tertiam apicalem partem corii posita et saepe usque in marginem extensa. Long. 3 4/5—4 1/3 mm. Fig. 8.

27. **pallipes** Fabr.

30. *Corium opaculum,* vix oleo-micantulum, typice *fascia* ante medium *lata* alba vel albido-flavente. Corpus quam in praecedente fere *paullo latius*, superne argenteo, raro aureo-sericans, opaculum. Antennae articulo secundo primo vix duplo — distinctissime magis quam duplo longiore, quarto tertio aeque longo vel saepe fere breviore. Tibiae posticae plerumque *margine interno nigro-piceae.* Long. 3 4/5—4 1/3 mm. Variat colore hemielytrorum: *a*, typica: corio nigro, fascia ante medium lata, gutta limbi lateralis ante apicem, ectocorio guttula mox pone fasciam saepe cum hac conjuncta, guttula juxta guttulam limbi lateralis saepe cum illa confluente maculam majorem subquadratam subapicalem conformante, guttula parva ad apicem venae principalis (externe saepe pallido-marginatae), endocorio postice guttulis quatuor cruciatim positis albis, etiam area apicali sericeo-nigra guttulam albam ferente; — *b*, *connectens* m., var. *confluenti A. pallipedis* similis, sed fascia antica corii punctis nigris destituta, angulo interiore corii albo; — *c, simulator* m.: apice clavi corioque albidis, hoc basi sat anguste, macula oblonga marginali in tertia parte apicali limbi lateralis posita ipsoque angulo apicali exteriore nigris.

28. **arenicola** Scholtz.

29. Pronotum margine laterali luteo. Corpus pube griseo-albida vel leviter lutescente. Hemielytra sordide albida, clavo, apice excepto, basi corii, macula limbi lateralis mox pone medium anguloque exteriore apicali corii nec non apice limbi coriacei lateralis membranae nigris. Antennae articulis duobus ultimis longitudine fere aequalibus, secundo primo duplo longiore. Tibiae etiam posticae saepe margine exteriore late nigrae.

31′. Pronotum lateribus anguste flavo-marginatis, limbo hoc pallido lineari, basi articuli secundi antennarum aeque lato. Long. 3 3/4 mm.

29. **xanthochila** Fieb.

31. Pronotum marginibus lateralibus latius pallido-limbatis, limbo hoc pallido femoribus anticis fere aeque lato. Corium macula basali quam in praecedente minore. Long. 3 mm.

29 a var. **limbosa** Horv.

28. *Corium totum opacum,* area cuneiformi apicali sericeo-nigra, *signaturis flavo-ferrugineis.* Statura quam in praecedentibus distincte *brevior.* Antennae articulo secundo primo fere duplo longiore, duobus ultimis aeque longis. Pronotum lateribus versus apicem levissime rotundatis vel subrectis, mox ante apicem tamen subito obtusangulariter fortius rotundatis, angulos magis minusve distinctos formantibus, apice a tergo viso capiti cum oculis latitudine subaequali, margine laterali margine basali circiter $^4/_7$ breviore, basi capite minus quam duplo — fere duplo latiore. Long. 2 $^4/_5$—3 $^2/_3$ mm. Variat colore hemielytrorum: *a,* typica: corio nigro, limbo laterali vitta media guttulaque ante apicem marginis exterioris, ectocorio guttis duabus pone medium, marginibus venae principalis apicem versus, signatura ocelliformi mesocorii magis minusve dilatata, guttula versus angulum internum interdumque etiam vittula interiore juxta ocellum mesocorii pallide ferrugineis, membrana parte coriacea limbi lateralis pallide flavo, dimidio apicali nigro, raro areis tribus interioribus vittis mediis nigris destitutis (var. *apicalis* J. Sahlb.); primo intuitu *A. saltatoriae* L. similis, differt autem lateribus pronoti versus apicem minus angustatis, ante annulum apicalem angulos obtusos formantibus vel saltem subito fortius curvatis, tibiis anticis aliter pictis, corio solum area apicali cuneiformi sericeo-nigra; — *b, sordidipennis* m.: hemielytris sordide pallide flavoalbidis, clavo, gutta apicali excepta, corio basi, limbo sat angusto juxta suturam clavi, maculis duabus lateralibus anguloque exteriore apicali nigris, interdum etiam pupillo signaturae typicae ocelliformis mesocorii maculaque supra medium marginis apicalis nigricantibus; a varietati *dimidiata* Curt. *A. pallipedis,* cui colore similis, vix nisi statura distincte breviore corporeque minore distingvenda.

30. **palustris** Dougl.

27. Pronotum lateribus versus apicem fortius angustatum, marginibus lateralibus rectis vel usque ad annulum apicalem sensim leviter rotundatis, *ante annulum haud fortius curvatis* angulosque ne minime quidem formantibus, apice capite cum oculis angustiore, basi capite cum oculis circiter duplo latiore. Antennae articulo quarto tertio aeque longo vel hoc paullo longiore. Corium ut in var. *dimidiata* Curt. *A. pallipedis* coloratum. Tibiae

posticae solum basi et apice nigrae. *A. pallipede* Fabr. simillima, sed *multo minor*, structura pronoti distincta videtur. *A. melanoscelae* Fieb. magnitudine similis, pictura tibiarum autem longe alia divergens (olim ut ejus varietas descripta). Long. 3—3 ½ mm. Fig. 9.

31. **pallidipennis** Reut.

1. Tarsi postici articulo tertio secundo saltem ⅓ breviore. Prostethium totum album vel limbo lato exteriore et anteriore acetabulorum anticorum albidis vel eburneis. Pronotum antrorsum minus angustatum, apice capiti latitudine subaeqvali, lateribus rectis. Hemielytra distincte crebre punctulata. Corpus plerumque obovatum, superne nitidulum vel nitens, brevissime et tenuissime pubescens vel glabrum. Antennae pallide flaventes, articulis ultimis fuscis, primo saepe nigro-vittato, articulo secundo primo magis quam duplo longiore. Pedes pallide flaventes, femoribus interdum fusco-vittatis. Var. *a, concolor* Put.: Caput, pronotum, scutellum et hemielytra tota nigra, nitidissima, glabra, raro macula marginali ad apicem corii albida. ♂ — *b, fallax* Verh.: superne tota nigra, corio basi, macula marginali ad apicem commissuraque clavi albidis. — *c, lateralis* Fall.: Pronotum limbo laterali modice lato albido. Scutellum nigrum. Hemielytra limbo laterali ad vel ultra medium maculaque marginali ad apicem corii, saepe etiam maculis obsoletis interioribus commissuraque clavi albidis. ♂♀. — *d, pulchella* Curt.: Pronotum lateribus late albidis. Scutellum nigrum vel guttis duabus apicalibus albidis. Hemielytra sordide albida, nigro-maculata, semper macula marginali in tertia apicali parte corii posita nigra vel nigro-fusca. — *e, eburnea* Fieb.: Pronotum limbo laterali plerumque late albido, basi late dilatato. Scutellum nigrum vel parte apicali albida. Hemielytra tota sordide albida. ♀. Fig. 10.

32. **lateralis** Fall.

Species hujus subgeneris mihi ignotae, sedis incertae:

33. **A. Bergrothi** Jak.: Corpus ovale, nigrum, opacum, superne aureo-tomentosum, inferne argenteo-sericeum. Antennae tenuissimae, articulo secundo duobus ultimis simul sumtis breviore, quarto tertio vix longiore; primo et secundo flavo-ferrugineis, hoc apice ultimisque nigris. Rostrum nigrum, articulo secundo fuscescente. Caput antice flavescens. Pronotum longitudine duplo latius, antice angustatum, lateribus rotundatis. Hemielytra nigra, limbo late-

rali flavo, basi et apice nigro, pone medium macula nigra notato; clavo apice macula pallida. Membrana completa, venis quatuor. Segmentum ultimum niveum. Pedes flaventes, femoribus basi albidis, tibiis apice fuscescenti. Long. $2\frac{3}{4}$ mm. *A. marginali* affinis videtur.

34. **A. gamma** Fieb.: *A. c-album* Fieb. affinis, fascia marginali corii gammaformi (*Γ*-formi), ramo superiore transversali nonnihil undulato venam principalem corii attingente, vitta marginali apice obliqua, ad apicem ejus guttula albida. Corium ante apicem macula marginali oblongo-quadrangulari, brevi, ad angulum ejus superiorem gutta parva quadrata, inferne stria transversali albidis; mesocorio signatura ocelliformi interne oblongo-quadrangulari, inferne striolis quatuor pallidis in qvadratum positis, angulo interiore guttula albida. Antennae nigrae, articulo primo flavo, inferne nigro, secundo apice ferrugineo. Pedes testacei, subtiliter albido-pubescentes, femoribus omnibus postice vitta nigra, superne et inferne vitta integra nigra, antice serie brevi apicali punctorum fuscorum. Coxae apice flavae. Acetabula margine antico flavo. Fulcra flava apice fusca. Tibiae basi et apice fuscae, medio externe vittula nigra, posticae annulis duobus mediis pallide fuscis, spinulis nigris. Tarsi flavi, articulis duobus primis apice, tertio dimidio apicali fusco. Segmentum ventrale ultimum albo-limbatum. Corpus late ovatum, nigrum, subtiliter et dense orichalceo-pubescens. Long. ♀ $1\frac{5}{6}$ lin. (Sec. Fieber).

Ab *A. c-album* differre videtur signaturis magis albidis distinctioribus, fascia laterali corii gammae-formi, h. e. linea longitudinali medium marginis occupante et antice sub angulo recto ramum usque ad medium corii emittente, acetabulis et coxis ad magnam partem flavis (Puton).

35. **A. quadrilineata** Jak.: Corpus nigrum. Caput, pronotum et scutellum nitida. Prothorax superne subtiliter aureo-sericeum, inferne argenteo-pubescens, callo fovea magna. Hemielytra opaca, clavo pube aurea toto vestito, apicem versus vitta pallida, corio limbo externo vitta sat lata testacea, basin haud attingente, stria transversali suturae membranae a membrana disjuncta; vitta alia multo angustiore juxta venam mediam corii, juxta suturam membranae extrorsum curvata; inter has vittas maculis duabus ovalibus testaceis, altera pone alteram posita; macula elongata juxta vittam interiorem guttulaque minore anguli interioris testaceis. Pedes testacei, femoribus inferne nigro-vittatis, tibiis basi nigris, tarsis articulo ultimo nigro. Long. $1\frac{1}{2}$—$1\frac{3}{4}$ lin.

Varietates hujus subgeneris elytris maximam ad partem albidis hoc modo distinguendae:

1. **A. mutabilis** var. *imitator* m.: corpore angustius ovali, antennis articulo secundo semper flavo-testaceo et latitudine calli pronoti parum breviore, pronoto minus transverso, apice capite cum oculis paullo angustiore, tibiis anterioribus linea marginis superioris fusca tenuissima plerumque obsoletissima, corio limbo laterali numquam ante apicem nigro-interrupto.

2. **A. hirsuta** Reut.: corpore latius ovali; pronoti margine laterali ciliato, capite, pronoto, scutello, clavo et corio totis longe nigro-pilosis, antennis pilosis, articulis duobus primis flavescentibus, tibiis anterioribus pilis exsertis mox distincta.

3. **A. pilosella** Thoms.: corpore latius ovali; antennis nigris, primo ad partem secundoque ad apicem flaventibus, articulo secundo pilis nonnullis exsertis, quarto tertio paullulum longiore, capite, pronoto, scutello, clavo corioque interne pilis nigris sat brevibus suberectis pilosis; tibiis anterioribus superne a basi ultra medium nigris.

4. **A. pallipes** var. *dimidiata* Curt.: Praecedenti statura, magnitudine signaturaque tibiarum similis, differt hemielytris non nisi tenuiter fusco-pubescentibus, antennis articulis duobus ultimis aeque longis.

5. **A. arenicola** var. *simulator* m.: Praecedenti signatura tibiarum anteriorum magnitudineque similis, statura fere paullo latiore, tibiis posticis margine interiore nigro-piceis.

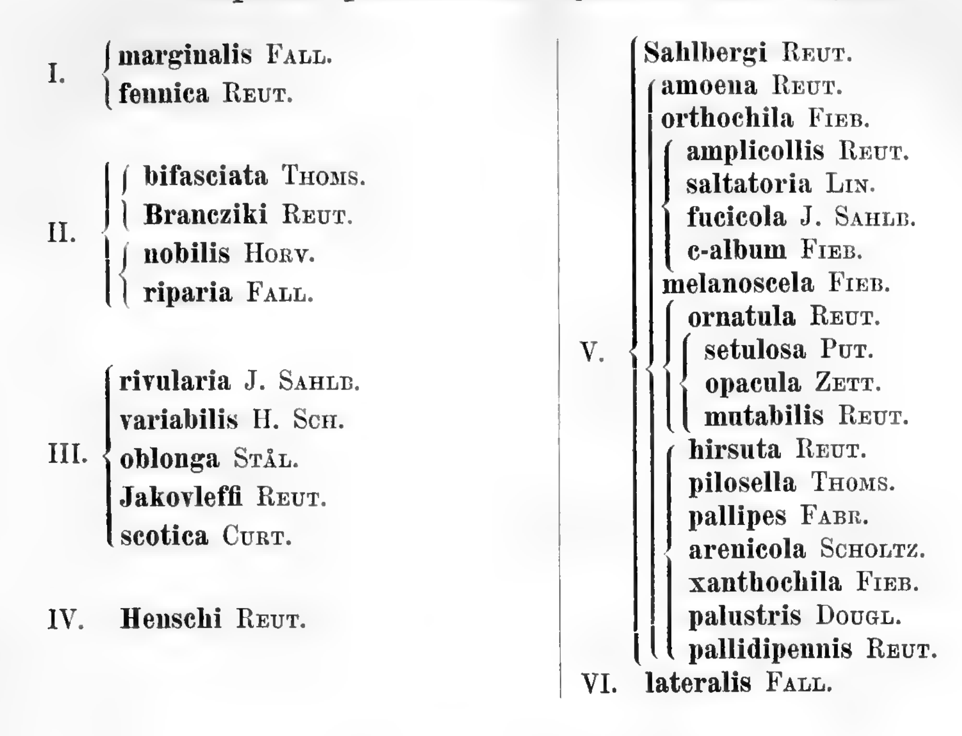
6. **A. xanthochila** Fieb.: praecedentibus statura, magnitudine signaturaque tibiarum similis, margine autem laterali pronoti flavo mox distincta.

7. **A. palustris** var. *sordidipennis* m.: ab *A. pallipede* var. *dimidiata* vix nisi corpore minore staturaque brevius ovali distingvenda.

8. **A. pallidipennis** n. sp. a praecedentibus pronoto lateribus usque ad annulum sensim aequaliter rotundatis, apice capite distincte angustiore magnitudineque minore divergens.

9. **A. lateralis** var. *eburnea* Fieb. statura obovata, prostethio ad maximam partem limboque pronoti laterali late sordide albidis, hemielytris evidenter crebre punctatis, tarsis articulo tertio secundo saltem $^1/_3$ breviore.

Dispositio specierum mihi cognitarum hujus subgeneris:



I. **marginalis** FALL., **fennica** REUT.

II. **bifasciata** THOMS., **Branczíki** REUT.; **nobilis** HORV., **riparia** FALL.

III. **rivularia** J. SAHLB., **variabilis** H. SCH., **oblonga** STÅL., **Jakovleffi** REUT., **scotica** CURT.

IV. **Henschi** REUT.

V. **Sahlbergi** REUT.; **amoena** REUT., **orthochila** FIEB.; **amplicollis** REUT., **saltatoria** LIN., **fucicola** J. SAHLB., **c-album** FIEB.; **melanoscela** FIEB.; **ornatula** REUT.; **setulosa** PUT., **opacula** ZETT., **mutabilis** REUT.; **hirsuta** REUT., **pilosella** THOMS., **pallipes** FABR., **arenicola** SCHOLTZ., **xanthochila** FIEB., **palustris** DOUGL., **pallidipennis** REUT.

VI. **lateralis** FALL.

Subg. 5. **Chartoscirta** STÅL.

1'. Caput et pectus nigra. Pedes flavescentes, tibiis apice articuloque tertio tarsorum dimidio apicali nigris vel fuscis.

2'. Antennarum articulus secundus niger vel nigro-fuscus, tertio longior, primus niger, apice albidus.

3'. Corpus superne pilis erectis destitutum. Hemielytra aureo-sericea. Corium limbo pallido marginali basi nigro, interdum ante apicem anguste nigro-interrupto. Antennae graciles. Long. 4 mm.

1. **cincta** H. SCH.

3. Corpus superne longe nigro-setosum. Corium limbo laterali usque in basin pallido. Antennae crassiusculae. Var. *Flori* DOHRN: Antennae articulo quarto toto vel ad partem albido. Long. 3½—4 mm.

2. **elegantula** FALL.

2. Antennarum articulus secundus totus vel ad magnam partem albidus vel flavo-testaceus. Corpus cum hemielytris superne nigro-pilosum.

4'. Antennae longiores, articulo secundo flavo-testaceo, tertio secundo saltem $^1/_4$ breviore, ultimis sat leviter vel parum incrassatis; articulus antennarum primus niger, apice albido.

5'. Antennae longae, articulo primo secundo saltem $^2/_5$ breviore, hoc concolore vel ipso apice leviter fuscescente. Hemielytra nigra, membrana pallida, venis maculisque nigro-fuscis. *Variat* antennarum articulo quarto toto nigro vel albido, apice fusco. Long. $3\,^1/_2$—4 mm.

3. **longicornis** Jak.

5. Antennae articulo primo secundo solum circiter $^1/_3$ breviore, hoc tertia parte apicali obscure fusco. Hemielytra fusco-ferruginea, membrana fusca, ad suturam membranae oblique pallida. Long. $3\,^2/_3$ mm.

4. **dilutipennis** Reut.

4. Antennae breviores et crassiores, articulo secundo albido-flavente, duobus ultimis fortius incrassatis et fusiformibus, tertio secundo parum vel paullulum breviore.

6'. Corpus superne dense nigro-pilosum. Antennae articulo primo apice secundoque albido-flaventibus, hoc basi anguste nigro, tertio secundo fere $^1/_5$ breviore. Corium limbo pallido haud interrupto. Long. 3—4 mm.

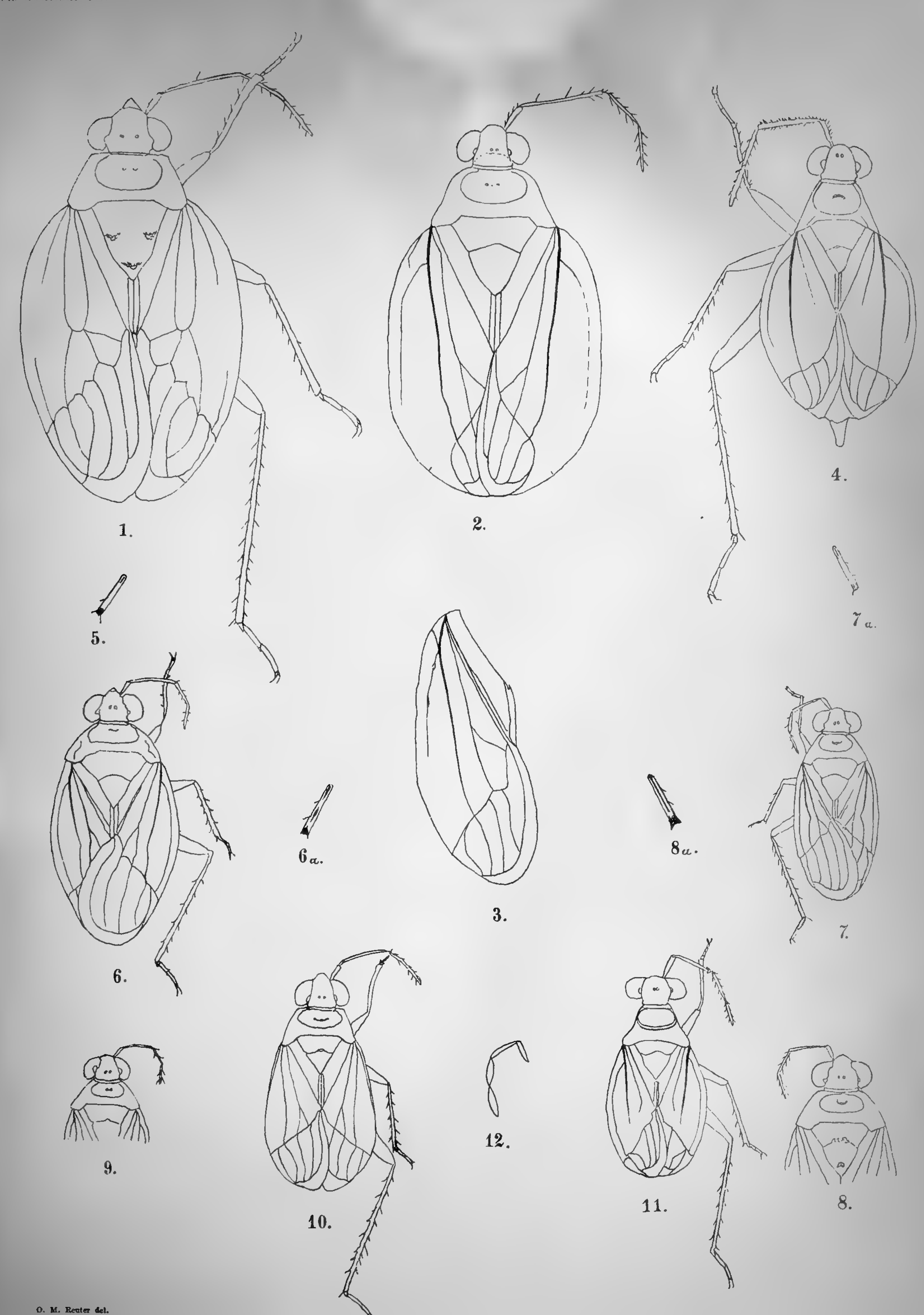
5. **Cooksii** Curt.

6. Corpus superne remote nigro-pilosum. Antennae articulis duobus primis totis pallido-flaventibus, solum apice secundi angustissime infuscato, tertio secundo vix breviore. Corium limbo pallido in tertia apicali parte sat late nigro-interrupto. Long. $2\,^1/_2$—3 mm. Var. *venustula* Scott: Antennae articulo quarto medio flavo-annulato. Variat etiam (sec. Puton) apice femorum fuscescente, corpore superne fere glabro.

6. **geminata** Costa.

1. Corpus fusco-nigrum, superne subtilissime aureo-pubescens. Caput antice et inferne pallide flavum. Oculi breviter setulosi. Antennae longae, articulo primo secundo duplo breviore, flavo-ferrugineo, subtus (basi?) nigro, secundo fusco-ferrugineo, subtus (basi?) obscuriore. Pronotum lateribus anguste flavicantibus. Hemielytra fusca, clavo saepe nigro-fusco, corio basi et apice macula magna exteriore alba, limbo albo. Pedes rufo-ferruginei, tibiis apice tarsisque articulo ultimo nigris. Pectus flavo-ferrugineum, mesostethio lateribus nigro. Long. $4\,^1/_4$—$4\,^1/_2$ mm. (Sec. Jakovleff). Mihi ignota.

7. **Roborowskii** Jak.



O. M. Reuter del.

II.

Pars synonymica et geographica.

ACANTHIA Fabr., Latr.

Acanthia pars Fabr., Syst. Ent. p. 693 (1775). Ent. Syst. IV, p. 67 (1794). *Acanthia* Latr., Préc. car. gen. d. Ins. p. 85 (1797)! Hist. Nat. III, 248 (1802). Gen. Crust. et Ins. III, p. 142 (1807). Lap., Ess. class. syst. p. 52 (1832). Spin., Ess. p. 52 (1832). Westw., Introd. II, Syn. p. 119 (1840). Stål, En. Hem. III, p. 148 (1872). Reut., Ent. Monthl. Mag. XVI, p. 172 (1880). Wien. Ent. Zeit. I, p. 303 (1882). Rev. Syn. N:o 301—306 (1888).

Salda pars Fabr. Syst. Rh. p. 113 (1803). Fall., Mon. Cim. Sv. p. 28 (1807). *Salda* Fall., Hem. Sv. p. 71 (1829)! Burm., Handb. II, p. 215 (1835). Zett., Ins. Lapp. p. 267 (1840). Blanch., Hist. Ins. p. 94 (1840). F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. p. 149 (1848). Fieb., Wien. Ent. Mon. III (1859). Flor., Rh. Livl. I, p. 703 (1860). Fieb. Eur. Hem. p. 144 (1861). Dougl. et Sc., Br. Hem. p. 516 (1865). Stål, Hem. Fabr. p. 90 (1868). Öfv. Vet. Ak. Förh. p. 387 (1868). Thoms., Op. ent. IV, p. 403 (1871). Saund., Syn. Brit. Hem. p. III, p. 629 (1875). Vollenh., Inl. Hem. VII, p. 4 (1878). Put., Syn. Het. France p. 193 (1880). Dougl., Ent. Monthl. Mag. XIX, p. 203 (1883). Saund., Hem. Het. Brit. Isl. p. 173 (1892).

Salda et *Sciodopterus* Am. et Serv., Hist. Ins. Hem. p. 404 (1843).

Typus generis: *A. saltatoria* Lap., Ess. class. syst. p. 52 (1832). Westw. Intr. II, Syn. p. 119 (1840).

Species hujus generis carnassoriae, victum jactantes, praecipue loca paludosa et litora praediligentes, magis minusve velociter saltantes et volitantes.

Species solum maritimae et halophilae, in litoribus maris et in salinis viventes, sunt sequentes: *Chiloxanthus pilosus* Fall., *Acanthia pilosella* Thoms., *A. lateralis* Fall.

Species praecipue maritimae et halophilae, sed etiam hydrophilae: *Sciodopterus litoralis* L., *Acanthia marginalis* Fall., *A. fennica* Reut., *A. fucicola* J. Sahlb., *A. mutabilis* Reut., *A. pallipes* Fabr., *A. arenicola* Scholtz.

Species praecipue hydrophilae, sed etiam halophilae et maritimae: *Sciodopterus Muelleri* Gmel., *Sc. morio* Zett., *Acanthia scotica* Curt., *A. saltatoria* Linn., *A. opacula* Zett., *A. xanthochila* Fieb.

Species hydrophilae et paludicolae, locis humidis, in paludibus, ad ripas lacuum et fluviorum viventes: *Acanthia riparia* Fall., *A. rivularia* J. Sahlb., *A. variabilis* H. Sch., *A. Sahlbergi* Reut., *A. c-album* Fieb., *A. melanoscela* Fieb., *A. palustris* Dougl., *Chartoscirta cincta* H. Sch., *Ch. elegantula* Fall., *Ch. longicornis* Jakovl., *Ch. Cooksi* Curt., *Ch. geminata* Costa.

Species aridicolae, loca sicca et sterilia, saepe lapidosa habitantes: *Calacanthia Trybomi* J. Sahlb., *Acanthia bifasciata* Zett., *A. orthochila* Fieb.

Species arenicolae et lapidicolae: *Chiloxanthus arcticus* J. Sahlb., *Calacanthia Trybomi* J. Sahlb., *Acanthia bifasciata* Zett., *A. variabilis* H. Sch., *A. scotica* Curt., *A. orthochila* Fieb., *A. melanoscela* Fieb., *A. arenicola* Scholtz, *A. xanthochila* Fieb.

Species limicolae et arenicolae: *Sciodopterus litoralis* Lin., *Acanthia saltatoria* Lin., *A. pallipes* Fabr.

Species limicolae et argillicolae (interdum sphagnicolae) *Chiloxanthus pilosus* Fall., *Ch. borealis* Stål, *Sciodopterus Muelleri* Gmel., *Sc. morio* Zett., *Acanthia marginalis* Fall., *A. fennica* Reut., *A. riparia* Fall., *A. Sahlbergi* Reut., *A. c-album* Fieb., *A. opacula* Zett., *A. pilosella* Thoms., *A. palustris* Dougl., *A. lateralis* Fall., *Chartoscirta cincta* H. Sch., *Ch. elegantula* Fall., *Ch. longicornis* Jak., *Ch. Cooksi* Curt.. *Ch. geminata* Costa.

Species arcticae: *Chiloxanthus arcticus* J. Sahlb., *Ch. borealis* Stål, *Calacanthia Trybomi* J. Sahlb., *Acanthia bifasciata* Thoms., *A. rivularia* J. Sahlb., *A. fucicola* J. Sahlb.

Species boreales: *Sciodopterus morio* Zett., *Acanthia marginalis* Fall., *A. fennica* Reut., *A. Sahlbergi* Reut., *A. palustris* Dougl.

Species orientales: *Chiloxanthus suturalis* Jak., *Sciodopterus micans* Jak., *Sc. gracilipes* Jak., *Acanthia Bergrothi* Jak., *A. nobilis* Horv., *A. oblonga* Stål, *A. Jakovleffi* Reut., *A. Henschi* Reut., *A. amoena* Reut., *A. quadrilineata* Jak., *Chartoscirta longicornis* Jak., *Ch. dilutipennis* Reut., *Ch. Roborowski* Jak.

Species meridionales: *Sciodopterus litoralis* var. *adriatica* Horv., *Acanthia variabilis* var. *connectens* Horv., *amplicollis* Reut., *A. gamma* Fieb., *A. ornatula* Reut., *A. setulosa* Put., *A. opacula* var. *nitidula* Put., *A. mutabilis* Reut., *A. hirsuta* Reut., *A. xanthochila* Fieb., *A. pallidipennis* Reut., *Chartoscirta geminata* Costa.

Species per magnam vel maximam partem regionis distributae: *Chiloxanthus pilosus* Fall., *Sciodopterus litoralis* L., *Sc. Muelleri* Gmel., *Acanthia riparia* Fall., *A. variabilis* H. Sch., *A. scotica* Curt., *A. orthochila* Fieb., *A. saltatoria* Linn., *A. c-album* Fieb., *A. melanoscela* Fieb., *A. opacula* Zett., *A. pilosella* Thoms., *A. pallipes* Fabr., *A. arenicola* Scholtz, *A. lateralis* Fall., *Chartoscirta cincta* H. Sch., *Ch. elegantula* Fall., *Ch. Cooksii* Curt.

Species monticolae et alpicolae: *Calacanthia Trybomi* J. Sahlb., *Acanthia Brancziki* Reut., *A. variabilis* H. Sch., *A. scotica* Curt.

Subg. 1. **Chiloxanthus** Reut.

Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, p. 145 (1891).

Typus: *Ch. pilosus* Fall.

1. **A. (Ch.) pilosa** Fall.

Salda pilosa Fall., Mon. Cim. Sv. 29, 3 (1807). Hem. Sv. I, 74, 5 (1829).
Acanthia pilosa Germ., Faun. Ins. Eur. 10, 15.
Salda sericans Stål, Stett. Ent. Zeit. XIX, 191, 79 (1858) = specimina majora.
Salda pilosa Fieb., Wien. Ent. Monatschr. III, 233, 1 (1859). Eur. Hem. 144, 1 (1861). Dougl. et Sc., Brit. Hem. 518, 1 (1865). Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 392, 11 (1868). Thoms., Op. ent. IV. 404, 6 (1871). Stål, Enum. Hem. III, 148, 2 (1873).
Salda pilosa var. *borealis* Reut., Pet. nouv. ent. VII, 527 (1875).
Salda pilosa Saund., Syn. Brit. Hem. III, 630, 1, T. XII, f. 11 (1876). Voll., Inl. Hem. 296 (1878). Put., Syn. Het. Franec, 202, 15 (1880).
Salda pilosa var. *hirsuta* Verh., Berl. Ent. Zeit. XXXVI, 201 (1891).
Salda pilosa Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 174, T. XVI, f. 3 (1892).

Species maritima et halophila. Lapponia et Karelia rossica usque ad 66° (J. Sahlberg); Svecia meridionalis (Stål) et occidentalis in litore maris sat r. (Thomson); Dania in litoribus salinis fr. (Schioedte); Germania borealis ad litora maris: Schleswigia-Holsatia sub fuco ejecto ubique haud r. (Wuestnei), Mecklenburgia inter Salicornia (Raddatz), insulae Norderney (Verhoeff) et Juist

(Alfken); Anglia r. (Saunders); Batavia passim ad litora maris, Zierikzee (Fokker); Gallia: Somme fr., Dunkerque (Puton); Saxonia in litoribus lacuum salinorum (Verhoeff), „Salzsee bei Halle“ (Burmeister), „Salzsee bei Mansfeld“ (Fieber). — Kamtschatka (Stål).

2. **A. (Ch.) arctica** J. Sahlb.

Salda arctica J. Sahlb., K. Vet. Ak. Handl. XVI, n:o 4, 33, 149 (1878).

Sibiria in territorio frigido locis denudatis terae arenosae circa flumen inferius Jenisei (J. Sahlberg); Peninsula Tschuktschorum (J. Sahlberg).

3. **A. (Ch.) borealis** Stål.

Salda borealis Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 391, 9 (1868). Thoms., Op. ent. IV, 405, 7 (1871).
Salda latifrons J. Sahlb., K. Vet. Ak. Förh. XVI, N:o 4, 32, 148 (1878).
Salda borealis J. Sahlb., Christ. Vid. Selsk. Forh. N:o 9 (1880).

Inter folia decidua salicum locis humidis limosis, in *Hypno sarmentoso* etc., in alpibus (J. Sahlberg). Lapponia media (Stål); Norvegia arctica in alpibus (J. Sahlberg); Sibiriae regio arctica in insula Nikandorovska fluminis inferiores Jenisei; Peninsula Tschuktschorum (J. Sahlberg).

4. **A. (Ch.) suturalis** Jak.

Salda suturalis Jak., Horae Soc. Ent. Ross., XXIV, 342, 24 (1890).

Amuria, ad flumen Zeja (Jakovleff).

Subg. 2. **Sciodopterus** Am. et Serv.

Hist. Ins. Hém. p. 404 (1843).

Typus: *Sc. flavipes* A. et S. (= *Muelleri* Gmel.)

5. **A. (Sc.) micans** Jak.

Salda micans Jak., Horae Soc. Ent. Ross. XXIII, 68, 12 (1889).

Sibiria: Kultuk. (Jakovleff).

6. **A. (Sc.) gracilipes** Jak.

Salda gracilipes Jak., Horae Soc. Ent. Ross. XII, 151 (1879).

Caucasus: Kurutsch (Jakovleff).

7. A. (Sc.) litoralis Lin.

Cimex litoralis Lin., Syst. Nat. Ed. X, 442, 10 (1758). Faun. Sv. 246, 915 (1761). Houtt. Nat. Hist. I, X, 339, 12 (1765). De Geer, Mém. III, 278, 21, T. XXIV, ff. 17, 18 (1773). Muell., Linn. Nat. V, 481, 14 (1774). Fabr. Syst. Ent. 694, 4 (1775). Fisch., Nat. Livl. 142, 306 (1778).
Acanthia pellucens Fabr., Reise Norw. p. 234 (1779) forte.
Acanthia litoralis Cederh. Fn. Ingr. 269, 845 (1798). Latr., Hist. Nat. III, 248 (1802). XII, 249, 2 (1804). Lam., Hist. Nat. III, 508, 2 (1816).
Salda litoralis Fall., Mon. Cim. Svec. 28, 1 (1807). Spec. nov. Hem. disp. (1814). Zett., Faun. Lapp. 477, 1 (1828). Fall., Hem. Svec. 71, 1 (1829).
Salda Zosterae Burm., Handb. II, 216, 1 (1835).
Salda littoralis Zett., Ins. Lapp. 267, 1 (1840).
Salda Zosterae Blanch., Hist. Ins. 94, 1 (1840). F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 150, 1 (1848).
Salda flavipes Fieb., Wien. Ent. Mon. III, 238, 15 (1859).
Salda littoralis Flor, Rh. Livl. I, 709, 2 (1860).
Salda flavipes Fieb., Eur. Hem. 147, 14 (1861).
Salda littoralis Dougl. et Scott, Brit. Hem. 528, 9 (1865). Stål, Hem. Fabr. 90, 1 (1868).
Salda littoralis var. a Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 387, 1 (1868).
Salda littoralis Thoms., Op. ent. IV, 403, 1 (1871). Saund., Syn. Brit. Hem. 631, 4, T. XII, f. 1 (1875).
Salda Zosterae Snell. v. Voll., Inl. Hem. 292 (1878).
Salda littoralis Put., Syn. Het. France 194, 1 (1880).
Acanthia litoralis Reut., Rev. Syn., 337, 302 (1888).
Salda flavipes Verh., Ent. Nachr. XVII, p. 344, et *var. alata*, p. 345 (1891).
Salda littoralis Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 177, T. XVI, f. 8 (1892).

Species halophila et hydrophila; velocissime cursitat (Fallén). Lapponia rossica (Mus. Hels.); Fennia usque ad 70° frequentiss. (J. Sahlberg); Provinciae balticae fr. (Flor); Svecia fr. (Thomson); Finmarkia et Norvegia (Siebke); Britannia fr. (Douglas et Scott); Dania fr. (Schioedte); Germania borealis: Mecklenburgia fr. (Raddatz); Schleswigia-Holsatia ad litora maris fr. (Wuestnei), Borussia (Brischke), insula Juist (Alfken), Guestphalia r. (Westhoff); Batavia fr. (Fokker); Belgium (Horvath); Gallia r. (Puton), Calais sat fr. (Lethierry); Lusitania (Mus. Holm); Helvetia frequentiss. usque in 7000′

(Frey-Gessner); Tirolia solum in alpibus, 6—8000′, haud r. (Gredler); Silesia in vallibus rariss. (Assmann), Thueringia r. (Kellner); Austria (Schrank); Hungaria: Pressburg (Sobransky); Halicia (Lomnicki); Ager tridentinus (Bezzi); Calabria (Costa); Sicilia (Ragusa); Graecia (Chicote). Rossia: Moskva (Oschanin), Sarepta (Jakovleff), ad litora Maris Caspici et Maris Nigri (Kolenati); Caucasus (Kolenati). — Sibiriae occidentalis territoria montosum et frigidum (J. Sahlberg); Tobolsk (Reuter), Irkutsk (Oschanin); Amuria, Kamtschatka (Oschanin), Ochotsk (Mus. Holm). — Insula Faeroeensis (Hansen). — America borealis: Illinois, Utah (Uhler), Canada (Provancher).

Var. **adriatica** Horv.

Salda littoralis var. adriatica Horv., Rev. d'Ent. VI, p. 72 (1887).
Illyria: Monfalcone (Horvath).

8. **A. (Sc.) Muelleri** Gmel.

Cimex oculatus Muell., Zool. Dan. 105, 1188 (1776) nec Fabr.
Cimex Muelleri Gmel., Syst. Nat. XIII, 2125, 13 (1788).
Acanthia flavipes Fabr., Ent. Syst. IV, 68, 3 (1794).
Salda flavipes Fabr., Syst. Rhyng. 114, 3 (1803).
Acanthia saltatoria Latr., Hist. Nat. XII, 242, 3 (1804) forte.
Cimex saxonius Turt., Syst. Nat. II, p. 609 (1806).
Salda littoralis var. b. Fall., Mon. Cim., 28 (1807). Hem. Svec. 72 (1829).
Salda littoralis var. H. Sch., Wanz. Ins. IV, 41, f. 599 (1842) = ♀.
Sciodopterus flavipes Am. et Serv., Hist. d. Hém. 404, 1 (1843) ut *typus*.
Salda zosterae var. 1 F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 151 (1848).
Salda flavipes Boh., K. Vet. Ak. Handl. p. 256 (1849).
Salda litoralis var. morio Flor, Rh. Livl. I, 710 (1860) partim.
Salda littoralis varr b. et *c* Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 387, 1 (1868).
Salda flavipes Thoms., Op. ent. IV, 403, 2 (1871). Put., Syn. Het. France 194, 2 (1880).
Acanthia Muelleri Reut., Rev. Syn. 320, 301 (1888).
Salda morio Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 178 (1892) ♀, sec. spec.

Species halophila et hydrophila, locis limosis. Karelia rossica (Mus. Fenn.); Fennia sat r., usque ad 63° 40′ (J. Sahlberg); Svecia haud fr. (Thomson); Norvegia arctica (J. Sahlberg), Dovre (Siebke); Dania (Mueller); Germania borealis: Danzig (Herrich-Schaeffer); Belgium (Horvath, ut *A. morio*); Anglia (Saunders); Gallia rariss.: Vosges (Puton); Austria, Hungaria: Kesmark,

Béla (coll. Horvath); Moldavia (Montandon, ut *A morio*); Graecia: Attika (Reuter); Turkestan: Dschiptik (Mus. Mosc).

9. **A. (Sc.) morio** Zett.

Salda morio Zett., Ins. Lapp. 267, 3 (1840).
Salda littoralis var. morio Flor, Rh. Livl. I, 710 (partim).
Salda morio Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 388, 2 (1868). Thoms., Op. ent. IV, 403, 3 (1871). Saund., Syn. Brit. Hem. 631, 5, T. XII, f. 4 (1876), sec. spec.
Salda morio ♂ Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 178, T. XVI, f. 7 (1892).

In paludibus limosis et ad littora. Lapponia umensis (Zetterstedt); Fennia r., usque ad 63° 40′ (J. Sahlberg); Karelia rossica, 64° (J. Sahlberg); Provinciae balticae (Flor); Svecia borealis et media r. (Thomson); Germania borealis: Mecklenburgia r. (Raddatz), Schlesvigia r. (Reuter); Anglia (Saunders), Iria (Halbert). — Sibiria: Irkutsk (Jakovleff).

Subg 3. **Calacanthia** Reut.

Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, p. 145 (1891).

Typus: *C. Trybomi* J. Sahlb.

10. **A. (C.) Trybomi** J. Sahlb.

Salda Trybomi J. Sahlb., K. Vet. Ak. Handl. XVI, N:o 4, 35, 158 (1878).
Salda alpicola J. Sahlb., Christ. Vid. Selsk. Forh. N:o 9, 8 (1880).

Locis siccis et sterilibus lapidosis, inter *Carices nardinas*, *Gymnomitria* etc., (J. Sahlberg). Lapponia rossica, Svjätoinos 68° (J. Sahlb.); Norvegia borealis in summo jugo alpis „Båtfjället“ (J. Sahlb.); Sibiriae territorium frigidum, Dudinka, Obdorsk (J. Sahlb.).

Obs. *S. alpicola* J. Sahlb. solum est varietas obscurior, signaturis albidis obsoletioribus et angustioribus; specimina sibirica iis in Norvegia lectis simillima in Museo Holmiae examinavi.

4. **Acanthia** in sp. Reut.

Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII. p. 145 (1891).

Typus: *A. saltatoria* Lin.

11. **A. (A.) marginalis** Fall.

Salda marginalis Fall., Mon. Cim. Svec. 30, 6 partim. Hem. Svec. 75, 8 (1829) partim. Dougl. et Sc., Brit. Hem. 524, 6 (1865). Thoms., Op. ent.

IV, 405, 9 (1871). Saund. Syn. Brit. Hem. 633, 9, T. XII, f. 6 (1876). Hem. Het. Brit. Isl. T. XVI, f. 10 (1892).

Svecia media: Vestrogothia (Fallén); Anglia r. (Douglas et Scott).

12. **A. (A.) fennica** Reut.

Salda marginalis Fall., Hem. Svec. 75, 8 (1829) partim. F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 154, 9 (1848).
Salda opacula Flor, Rh. Livl. I, 719, 8 (1860) nec Zett.
Salda costalis Thoms., Op. ent. IV, 406, 10 (1871) nec F. Sahlb.
Salda marginalis var. Reut., Berl. Ent. Zeit. XXV, 2, p. 185, 2 (1881).
Salda fennica Reut., Ent. Tidskr. V, p. 171 (1884). Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XIII, p. 171 (1886). Rev. d'Ent. IX, 250, 26 (1890).

Species halophila et hydrophila, interdum sphagnicola. Fennia meridionalis usque ad 61° (J. Sahlberg); Provinciae balticae in paludibus r. (Flor); Lapponia (Thomson).

13. **A. (A.) Bergrothi** Jak.

Salda Bergrothi Jak., Horae Soc. Ent. Ross. XXVII, p. 304 (1893).

Sibiria orientalis: Irkutsk (Jakovleff).

14. **A. (A.) bifasciata** Thoms.

Salda riparia Zett., Faun. Lapp. 478, 3 a (1828). Ins. Lapp. 267, 5 (1840) nec Fall.
Salda riparia var. 1 F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 151, 2 (1848).
Salda riparia Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 388, 3 (1868).
Salda bifasciata Thoms., Op. ent. IV, 404, 5 (1871).
Salda serior J. Sahlb., K. Vet. Ak. Handl. XVI, N:o 4, 33, 150 (1878).

Regio arctica, locis sterilibus lapidosis, tarde nec alte saltat (J. Sahlberg), ad ripas arenosas: Lapponia fennica (J. Sahlberg); Lapponia borealis ad flumina r., in Lapponia meridionali fr. (Zetterstedt). — Sibiria in territorio frigido (J. Sahlberg); Irkutsk (Jakovleff).

Obs. False a Hueber, Faun. Germ. p. 457 ut incola Tiroliae citata; species a Gredler citata = *A. variabilis* H. Sch.

15. **A. (A.) Branczik**i Reut.

*Acanthia Branczik*i Reut., Rev. d'Ent. X, 20, 1 (1891).

Hungaria: Carpathes (Reuter); Halicia: Tatra (Lomnicki).

16. **A. (A.) riparia** FALL.

Salda riparia FALL., Suppl. Mon. Cim. II, 1—2 (1826). Hem. Sv. 72, 2 (1829).
Salda affinis ZETT., Ins. Lapp. 267, 2 (1840).
Salda luteipes H. SCH., Wanz. Ins. VI, 40, f. 507 (1842).
Salda riparia F. SAHLB., Mon. Geoc. Fenn. 151, 2 (1849) partim. KOL., Bull. Soc. Nat. Mosc. IV, 452, 240 (1856) dubiose.
Salda luteipes FIEB., Wien. Ent. Mon. III, sp. 17 (1859). Eur. Hem. 147, 17 (1861).
Salda affinis STÅL, Öfv. Vet. Ak. Förh. 389, 5 (1868).
Salda riparia THOMS., Op. ent. IV, 404, 4 (1871).
Salda conspicua DOUGL. et SC., Ent. Monthl. Mag. IV, T. I. SAUND., Syn. Br. Hem. 632, 8 (1876).
Salda riparia PUT., Syn. Het. France 195, 3 (1880). SAUND., Hem. Het. Brit. Isl. 175, T. XVI, f. 5 (1892).

In silvis locis humidis, supra truncos arborum saltans (J. SAHLBERG). Lapponia rossica 68° (J. SAHLBERG); Fennia sat r.; Svecia borealis et media (THOMSON) r. (STÅL); Norvegia r. (SIEBKE); Scotia r. (SAUNDERS); Belgium r. (FOKKER); Gallia rr. (PUTON); Austria (HERRICH-SCHAEFFER); Hungaria: Tatra (coll. HORVATH); Caucasus (KOLENATI; dubiose, forsitan species sequens). — Sibiria orientalis: Irkutsk (JAKOVLEFF).

17. **A. (A.) nobilis** HORV.

Salda nobilis HORV., Term. Füzet. VIII, P. 4, 317, 16 (1884).
Salda Reuteri JAK., Horae Soc. Ent. Ross. XXIII, 66, 11 (1889).

Hungaria borealis: Kesmark (HORVATH). — Sibiria orientalis: Irkutsk (JAKOVLEFF); Amuria (REUTER).

18. **A. (A.) rivularia** SAHLB.

Salda rivularia J. SAHLB., K. Vet. Ak. Handl. XVI, N:o 4, 34, 151 (1878).

Celerrime cursitat, saltitat et volitat (J. SAHLBERG). Sibiriae territorium frigidum in litoribus fluminis inferioris Jenisei (J. SAHLBERG); Irkutsk (JAKOVLEFF).

19. **A. (A.) variabilis** H. SCH.

Salda riparia HAHN, Wanz. Ins. II, 82, f. 167 (1834) nec FALL.
Salda variabilis H. SCH., Nomencl. ent. 61 et 67 (1835).

Salda riparia Fieb., Wien. Ent. Mon. III, sp. 16 (1859). Eur. Hem. 147, 16 (1861) nec Fall.
Acanthia nigricornis Reut., Ann. Soc. Ent. France Ser. V, T. IV, p. 566 (1874).
Salda nigricornis Put., Syn. Het. France, 196, 5 (1880).
Salda variabilis Reut., Berl. Ent. Zeit. XXV, 186, 52 (1881).
Salda fenestrata Jak., Horae Soc. Ent. Ross., XII, 152 (1879).

In litoribus arenosis fluviorum alpinorum (Assmann), ad saxa (Ferrari); species montana et alpina (Puton). Gallia (Puton); Belgium (Lethierry); Helvetia: Jura usque ad 3000′, Rigiklösterli 4260′ fr. (Frey-Gessner); Tirolia (*S. bifasciata* Gredler nec Thoms.); Bavaria (Hahn, Kittel), Silesia (Assmann); Styria (Eberstaller), Bohemia (Duda), Moldavia (Montandon), Halicia (= *S. quadrimaculata* Fieb. (in litt., sec. spec. in Mus. Windob.), Novicky); Hungaria: Trencsin (Branczik); Dalmatia (Reuter); Illyria (Montandon); Liguria (Ferrari); Ager pedemontanus (Mur. Berol.); Liguria (Mus. Gen.); Sicilia (Ragusa). Armenia rossica (Horvath). — Biskra (Puton).

Var. **connectens** Horv.

Acanthia variabilis var. connectens Horv., Rev. d'Ent. VII, 179, 14 (1888).

Hungaria: Zilah, Bezi'as (Horvath); Graecia: Olympos, Taygetos (coll. Reut.).

Obs. Verisimiliter = *S. riparia* Chic. in Ann. Soc. Ent. Belg. XXVI, p. 89.

20. **A. (A.) oblonga** Stål.

Salda oblonga Stål, Stett. Ent. Zeit. XIX, 191, 80 (1858).
Acanthia oblonga Stål, En. Hem. III, 149, 7 (1873).

Sibiria: Irkutsk (Stål); Amuria (Oschanin).

21. **A. (A.) Jakovleffi** Reut.

Acanthia Jakovleffi Reut., Rev. d'Ent. X, 22, 2 (1891).

Turkestan (Reuter).

22. **A. (A.) scotica** Curt.

Salda scotica Curt., Brit. Ent. XII, p. 548 (1835).
Salda hirsutula Flor, Rh. Livl. I, 708, 1 (1860). Fieb., Wien. Ent. Mon. VII, 62 (1863).

Salda litoralis Fieb., Wien. Ent. Mon. III, 238, 15 (1859). Eur. Hem. 147, 15 (1861).
Salda riparia Dougl. et Scott, Brit. Hem. 530, 10 (1865).
Salda scotica Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 389, 4 (1868). Thoms., Op. ent. IV, 406, 11 (1871). Saund., Syn. Brit. Hem. 631, 3, T. XII, f. 8 (1876). Put., Syn. Het. France, 196, 4 (1880). Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 177, T. XVI, f. 6 (1892).

Species monticola et borealis. In litoribus fluviorum et maris ad saxa. Velocissime longeque saltat et volitat. Lapponia et Karelia rossica usque ad 68⁰ ad litora maris Albi (J. Sahlberg); Lapponia (Thomson); Norvegia usque ad Dovre, r. (Siebke); Provinciae Balticae: insula Filsand prope Oesel (Flor); Britannia (Douglas); Batavia (Fokker); Belgium (Horvath); Gallia r. (Puton); Helvetia pass., ad 6000′ in Engaddin fr. (Frey-Gessner); Tirolia r. (Gredler); Thueringia r. (Kellner); Bohemia (Duda); Hungaria: Trencsin (Branczik); Halicia (Lomnicky); Moldavia (Montandon). — Sibiria orientalis: Irkutsk (Jakovleff).

23. A. (A.) **Henschi** Reut.

Acanthia Henschi Reut., Rev. d'Ent. X, 23, 3 (1891).
Hungaria: Kesmark (Reuter).

24. A. (A.) **Sahlbergi** Reut.

Salda Sahlbergi Reut., Not. F. et Fl. Fenn. XI, 330, 4 (1870).
In sphagnetis et paludibus. Fennia r., usque ad 61⁰ 40′ (J. Sahlberg).

25. A. (A.) **amoena** Reut.

Salda amoena Reut. in Mäkl., Öfv. Finska Vet. Soc. Förh. 1876—1877, 31, 77 (1876). K. Vet. Ak. Handl. XVIII, N:o 4, 47, 34 (1881).
Acanthia amoena Reut., Rev. d'Ent. IX, 250, 27 (1890).
Sibiria: Krasnojarsk (Reuter).

26. A. (A.) **orthochila** Fieb.

Salda riparia var. c. Zett., Faun. Lapp. 478, 3 (1828). Ins. Lapp. 268 (1840).
Salda orthochila Fieb., Wien. Ent. Mon. III, 234, 6 (1859).
Salda luteipes Flor, Rh. Livl. I, 717, 6 (1860) nec H. Sch.

Salda orthochila Fieb., Eur. Hem. 145, 6 (1861). Dougl. et Sc., Brit. Hem. 521, 4 (1865). Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 390, 6 (1868). Thoms., Op. ent. IV, 406, 12 (1871). Saund., Syn. Brit. Hem. 632, 7, T. XII, f. 3 (1876). Put., Syn. Hem. France, 197, 7 (1880).

Salda saltatoria varr. *vittata*, *distincta* et *irregularis* Westh., Jahresb. Westf. Prov. Ver. VIII, 62, 7 (1880), forte.

Acanthia orthochila Reut., Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, p. 152 (1891).

Salda orthochila Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 176 (1892).

Sub muscis et inter radices graminum in collibus et montibus, locis siccis; locis aridis saepe ab aquis distantibus (Saunders), sub Erica (Edwards). Lapponia rossica 69° (Mus. Fenn.); Karelia rossica (Mus. Fenn.); Fennia et Lapponia usque ad 68° (J. Sahlberg); Svecia tota (Thomson); Norvegia arctica (J. Sahlberg) — Dovre (Siebke); Provinciae balticae r. (Flor); Dania pass. (Schioedte); Germania borealis: Schleswigia-Holsatia (Wuestnei), Berlin (Mus. Berol.); Iria borealis (Johnson); Scotia, Anglia (Saunders); Belgium (Fokker); Gallia: Vogeses, Alpes, Pyreneae (Puton); Helvetia in alpibus (Frey-Gessner); Ager tridentinus (Bezzi); Italia (Mus. Genov.); Tirolia in vallibus et alpibus, usque ad 6000′ (Gredler); Styria (Eberstaller); Bohemia (Duda); Hungaria: Trencsin (Branczik); Krakovia (Stobiecki); Halicia (Lomnicki); Moldavia (Montandon); Rossia: Orel (Assmuss), Kasan (Jakovleff); Caucasus (Jakovleff); Transcaucasia (Horvath); Turkestan: Magian (Mus. Mosc.); Sibiriae territorium silvosum (J. Sahlberg).

27. A. (A.) amplicollis Reut.

Acanthia amplicollis Reut., Rev. d'Ent. X, 25, 5 (1891).

Hispania: Escorial (coll. Bolivar); Liguria: Serravalle, Stazzano (Mus. Gen.); Graecia: Morea (Reuter); Asia minor (Horvath = *saltatoria* „*var.* magna maculis pallidis hemielytrorum diminutis"), Syria ad fontes fluminis Barrada (Puton, ut *saltatoria var.* magna).

28. A. (A.) saltatoria Lin.

Cimex saltatorius Lin., Syst. Nat., Ed. X, 448, 63 (1758). Faun. Svec. 254, 953 (1761).

Cimex alpinus Scop., Ent. Carn. 129, 374 (1763).

Cimex saltatorius Houtt., Nat. Hist. I, X, 567, 63 (1765). Muell., Linn. Nat. V, 500, 93 (1774). Fabr. Syst. Ent. 725, 140 (1775).

Cimex littoralis Fabr., Ent. Syst., IV, 72, 18 (1794) nec Linn.

Lygaeus saltatorius Fabr. Ent. Syst. IV, 176, 147 (1794). Wolff, Ic. Cim. II, 77, 74, T. VIII, f. 74 (1801).
Salda littoralis Fabr., Syst. Rh. 115, 13 (1803).
Lygaeus saltatorius Fabr., Syst. Rhynch. 335, 184 (1803).
Acanthia maculata Latr., Hist. Nat. XII, 243, 6 (1804). Lam., Hist. Nat. III, 508, 1 (1816).
Salda saltatoria Fall., Mon. Cim. 29, 2 (1807). Zett., Faun. Lapp. 479, 4 (1828) forte. Fall., Hem. Svec. 73, 3 (1829).
Acanthia saltatoria Lap., Ess. class. syst. p. 52 (1832) ut *typus*.
Salda saltatoria Hahn, Wanz. Ins. II, 83, f. 167 (1834). H. Sch., Nom. Ent. p. 61 (1835).
Salda litoralis Burm., Handb. II, 216, 3 (1835) veris.
Salda saltatoria Spin., Ess. p. 77 (1837).
Acanthia saltatoria Westw., Intr. Ent. II, Syn. p. 119 (1840) ut *typus*.
Salda zosterae Am. et Serv., Hist. Hém. 405, 2 (1843).
Salda littoralis Costa, Cim. Regn. Neap. Cent. II, 8, 2 (1843).
Salda saltatoria F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 151, 3 (1848). Fieb., Wien. Ent. Mon. 235, 7 (1859). Flor, Rh. Livl. I, 713, 4 (1860). Fieb., Eur. Hem. 145, 7 (1861).
Salda marginella Fieb., Eur. Hem. 145, 8 (1861) = Var. ♂.
Salda saltatoria Dougl. et Sc., Brit. Hem. 522, 5 (1865). Stål, Hem. Fabr. I, 91, 3 (1868).
Salda saltatoria var. a Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 390, 7 (1868).
Salda saltatoria Thoms., Op. ent. IV, 407, 14 (1871). Saund., Syn. Brit. Hem. 635, 14 (1876) partim. Snell. v. Vollenh., Inl. Hem. 294 (1878). Put., Syn. I, 199, 11 (1880) partim.
Salda saltatoria cum *var. conjuncta* Westh., Jahresb. Westf. Prov. Ver. VIII, 62, 7 (1880).
Salda saltatoria Reut., Berl. Ent. Zeit. XXV, 186, 51 (1881). Rev. Syn. 338, 303 (1888).
Acanthia saltatoria Reut., Rev. d'Ent. IX, 251, 28 (1890).
Salda saltatoria var. Westhoffi Verh., Berl. Ent. Zeit. XXXVI, p. 200 (1891).
Acanthia saltatoria Reut., Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, p. 152 (1891).
Salda saltatoria Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 180 (1892).

Species hydrophila et halophila. Europa tota fr. (Fieber). Lapponia rossica 69° (Mus. Fenn.); Lapponia (Zetterstedt); Fennia fr. (J. Sahlberg); Svecia fr. (Thomson); Norvegia fr. (Siebke); Dania fr. (Schioedte); Provinciae balticae fr. (Flor); Germania borealis: Schlesvigia-Holsatia fr. (Wüstnei), Meck-

lenburgia fr. (Raddatz); Borussia (Brischke); Scotia et Anglia fr. (Saunders); Iria borealis (Johnson); Batavia fr. (Fokker); Belgium (Horvath); Gallia ubique (Puton); Helvetia usque ad 3000′ (Frey-Gessner: specimina majora, obscuriora, magis opaca et nigra in Engaddin usque ad 7000′); Ager Tridentinus (Bezzi); Tirolia pass. (Gredler); Bavaria (Brischke); Silesia in vallibus et alpibus haud r. (Assmann); Styria in alpibus (Eberstaller); Thueringia ubique haud r. (Kellner); Bohemia (Duda); Moravia (Spitzner); Austria inferior r. (Schleicher); Hungaria (Branczik, Horvath); Krakovia (Stobiecki); Halicia (Lomnicki); Moldavia (Montandon); Carniolia (Scopoli), Liguria (Ferrari), Italia (Costa), Sardinia (Spinola), Sicilia (Ragusa); Aegyptus (Mus. Holm.); Graecia (coll. Erber). Rossia: Moskva (Oschanin), inter Volga et Ural (Eversmann), Charkov (Jaroscheffski), Caucasus (Kolenati), Transcaucasia (Horvath). — Sibiria in territoriis silvoso et montoso (J. Sahlberg), Leusch (Reuter), Verchne Sujetuk (Reuter), Irkutsk (Jakovleff). — Sitka? (Burmeister); Respublica boreali-americana (Uhler), Canada (Uhler).

29. **A. (A.) fucicola** J. Sahlb.

Salda fucicola J. Sahlb., Not. Soc. F. et Fl. Fenn. XI, 301, 162 (1870).
Salda lapponica J. Sahlb., Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. VII, 85, 315 (1881) = ♂.
Acanthia fucicola Reut., Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, 153 (1891).
Salda saltatoria var. Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 180 (1892) forte.

Rossia borealis: Archangelsk (J. Sahlberg); Lapponia et Karelia rossica in litore Maris Albi sub fuco ejecto (J. Sahlberg); Lapponia fennica usque ad 68° (J. Sahlberg). Britannia (dubiose).

30. **A. (A.) c-album** Fieb.

Salda c-album Fieb., Wien. Ent. Mon. III, 236, sp. 10 (1859).
Salda arenicola Flor, Rh. Livl. I, 718, 7 (1860) nec Scholtz.
Salda c-album Fieb., Eur. Hem. 146, 10 (1861).
Salda stellata Dougl. et Sc., Brit. Hem. 525, 7 (1865) nec Curt.
Salda vestita Dougl., Ent. Monthl. Mag. XI, 11 (1874) = forma macropt.
Salda c-album Saund., Syn. Brit. Hem. 633, 11, T. XII, f. 2 (1876). Put., Syn. Het. France 198, 8 (1880).
Acanthia dubia Reut., Öfv. Finska Vet. Soc. Förh. XXVI, 27, 67 (1883) = forma macr.
Acanthia c-album Reut., Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, p. 153 (1891).

Salda c-album Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 178, T. XVI, f. 9 (1892) = forma brachypt.

Salda saltatoria var. Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 180 (1892) = forma macroptera.

In litoribus argillosis fluviorum, in muscis humidis (Lethierry). Lapponia et Karelia rossica (J. Sahlberg); Fennia orientalis et borealis: Kemijärvi (J. Sahlberg); Provinciae balthicae r. (Flor); Britannia tota (Saunders); Belgium r. (Lethierey); Gallia pass. (Puton); Lusitania (coll. Oliveira); Helvetia etiam in alpibus (Frey-Gessner); Tirolia usque ad 6000′ (Gredler); Guestphalia rariss. (Westhoff); Bavaria (Kittel), Thueringia in alpibus r. (Kellner); Austria inferior rariss. (Schleicher); Moravia (Spitzner); Hungaria (Branczik, Horvath), Pressburg (Sobranskij); Krakovia (Stobiecki); Halicia (Lomnicki); Moldavia (Montandon); Italia (Mus. Gen.); Graecia: Tinos (Erber); Turkestan: Samarkand (Mus. Mosc.); Sibiria ad inferius flumen Irtisch, Tobolsk (Reuter), in litoribus fluminis Ob ad Schukova, Ostnatjennaja (Reuter).

Obs. *S. vestita* Dougl. et *A. dubia* Reut. formam macropteram hujus speciei nec varietatem *A. saltatoriae* L. certe constituunt. In Scotia a me, in Fennia orientali a J. Sahlberg et in Sibiria multoties in societate cum forma brachyptera inventae.

31. **A. (A.) gamma** Fieb.

Salda gamma Fieb., Wien. Ent. Mon. VIII, N:o 7 (1864). Put., Syn. Het. France 199, 9 (1880).

Gallia meridionalis (Fieber).

32. **A. (A.) melanoscela** Fieb.

Salda melanoscela Fieb., Wien. Ent. Mon. III, sp. 11 (1859).

Salda pallipes var. I Flor, Rh. Livl. I, 116 (1860) forte.

Salda melanoscela Fieb., Eur. Hem. 146, 11 (1861).

Salda brachynota Fieb., Eur. Hem. 146, 13 (1861) = var. (veris).

Salda melanoscela Put., Syn. Het. France, 198, 10 (1880).

Acanthia melanoscela Reut., Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, 155 (1891).

Ad litora fluviorum, locis arenosis (Frey-Gessner). Fennia in Karelia ladogensi rariss. (J. Sahlberg); Provinciae balthicae rariss. (Flor); Germania borealis: Schlesvigia-Holsatia r. (Wuestnei); Batavia r. (Fokker); Belgium (Lethierry); Gallia r. (Puton), Alsacia minus r. (Reiber); Helvetia ubique usque in 7000′ (Frey-Gessner); Tirolia haud r. (Gredler); Bavaria (Kittel); Austria inferior rariss. (Schleicher); Hungaria (Branczik, Horvath); Halicia

(Lomnicki); Illyria (Horvath); Liguria (Ferrari); Sicilia (Ragusa); Hispania: Alcala (coll. Bolivar); Rossia: Charkov (Jaroscheffski), Mohilev (Jakovleff); Turkestan: Taschkent (Mus. Mosc.); Sibiria: Verchne Sujetuk (Reuter), Irkutsk (Jakovleff).

33. **A. (A.) ornatula** Reut.

Salda ornatula Reut., Berl. Ent. Zeit. XXV, 2, p, 160, 15 (1881).
Aegyptus (coll. Signoret); Nubia superior (Reuter).

34. **A. (A.) setulosa** Put.

Salda opacula var. setulosa Put., Syn. Hét. France, 197, 6 (1880).
Gallia: Béziers (Puton); Africa borealis: Tetuam et Esmir (Saunders).

35. **A. (A.) opacula** Zett.

Salda opacula Zett., Ins. Lapp. 268, 8 (1840).
Salda costalis F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 152, 5 (1848).
Salda marginalis H. Sch., Wanz. Ins. IX, 130, f. 943 (1853) nec Fall. Flor, Rh. Livl. I, 712, 3 (1860). Fieb., Wien. Ent. Mon. VII, 62 (1863). Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 391, 8 (1868).
Salda opacula Thoms., Op. ent. IV, 407, 13 (1871). Dougl., Ent. Monthl. Mag. XI, 9 (1874). Saund., Syn. Brit. Hem. 633, 10, T. XII f. 13 (1876). Put., Syn. Het. France, 197, 6 (1880) cum var. *marginella.* Rey, Rev. d'Ent. VII, 195 (1888).
Acanthia opacula Reut., Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, 155 (1891).
Salda opacula Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 179 (1892).

In litoribus marium et paludum, etiam locis paludosis. Lapponia rossica: Kola, 69° (Mus. Fenn.); Lapponia (Zetterstedt); Fennia et Lapponia usque od 68° (J. Sahlberg); Svecia haud r. (Thomson); Norvegia (Siebke); Provinciae balthicae sat r. (Flor); Germania borealis: Danzig (Herrich-Schäffer), Berlin (Mus. Berol.); Scotia (Saunders); Belgium (Horvath); Gallia (Puton); Lotharingia (Reiber) et Puton); Ager tridentinus (Ferrari); Dalmatia (coll. Puton); Hungaria (coll. Horvath); Gibraltar (Saunders). — Sibiria in territoriis silvoso et arctico (J. Sahlberg); Irkutsk (Jakovleff). — America borealis Massachusets (coll. Montandon).

Var. **nitidula** Put.

Salda opacula var. nitidula Put., Syn. Het. France 197, 6 (1880). Rey, Rev. d'Ent. VII, 195 (1888).

Gallia meridionalis: Hyères, Fréjus (PUTON); Corsica (PUTON); Italia: Viareggio (Mus. Gen.); Sardinia (COSTA).

36. **A. (A.) mutabilis** REUT.

Salda bicolor COSTA, Cim. Regn. Neap. Cent. II, 9, 4, T. II, f. 6 (1843) forte [1]).
Acanthia mutabilis REUT., Rev. d'Ent. X, 23, 4 (1891).

Gallia: Arcachon (REUTER), Cette (coll. SIGNORET); Aegyptus (coll. SIGNORET).

37. **A. (A.) hirsuta** REUT.

Acanthia hirsuta REUT., Rev. d'Ent. VII, 60 (1888).

Illyria: Monfalcone (REUTER).

Obs. Verisimiliter a D:o MONTANDON in Rev. d'Ent. V, p. 109 nomine *A. pallipes* var. *pilosella* enumerata.

38. **A. (A.) pilosella** THOMS.

Salda pilosella THOMS., Op. ent. IV, 407, 16 (1871). DOUGL., Ent. Monthl. Mag. XII, 30 (1875). SAUND., Syn. Brit. Hem. 631, 6, T. XII, f. 12 (1876). SNELL v. VOLLENH., Tijdschr. v. Ent. XXII, p. 231.
Acanthia pilosella REUT., Ent. Monthl. Mag. XVII, p. 15 (1880).
Salda pallipes var. PUT., Syn. Het. France 200, 12 (1880). REUT., Berl. Ent. Zeit. XXV, 187, 53 (1881).
Acanthia pilosella REUT., Rev. d'Ent. IX, 251, 31 (1890). Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVI, 157 (1891).
Salda pilosella SAUND., Hem. Het. Brit. Isl. 181 (1892).

Species maritima et halophila. Fennia meridionalis usque ad 60° 20′ (J. SAHLBERG); Svecia: Scania-Holmia (REUTER); Dania (REUTER); Britannia m. fr. (SAUNDERS); Batavia sat fr., etiam ad Zierikzee (FOKKER); Belgium (HORVATH); Gallia: Somme (DUBOIS), Calais, Dunkerque (LETHIERRY), Moselle (BELLEVOYE), Loire inférieure (DOMINIQUE), Lotharingia in salinis (REIBER et PUTON); Hungaria (coll. HORVATH).

39. **A. (A.) pallipes** FABR.

Cimex pellucidus GOEZE, Ent. Beytr. II, 264, 56 (1778) veris. GEOFFR. in Fourcr., Ent. Par. 196, 7 (1785) verisim.

---

[1]) Obs. „Pedibus omnino pallidis"; „Antennis articulis duobus basalibus pallidis, primo infra, secundo basi fuscis"; „elytris niveis, basi suturaque scutellari nigris".

Acanthia pallipes Fabr., Ent. Syst. IV, 17, 17 (1794).
Acanthia littoralis Schrank, Faun. Boic. II, 63, 1085 (1881) veris.
Salda pallipes Fabr., Syst. Rh. 115, 11 (1803).
Lygaeus pallipes Latr., Hist. Nat. XII, 220, 31 (1804).
Lygaeus saltatorius Panz., Faun. Ins. Germ. T. 92, f. 13 (1805).
Acanthia striata Latr., Hist. Nat. XII, 243, 5 (1804).
Cimex marginalis Turt., Syst. Nat. II, p. 610 (1806).
Salda saltatoria var. 3 Fall., Mon. Cim. 29, 2 (1807).
Salda pallipes Zett., Faun. Lapp. 477, 2 (1828). Fall., Hem. Svec. 73, 4 (1829).
Salda saltatoria Guér., Icon. T. 93, f. 2 (1829—38).
Acanthia dimidiata Curt., Brit. Ent. XII, 548, 13 (1835) = Var.
Salda pallipes H. Sch., Nom. Ent. p. 30 (1835). Zett., Ins. Lapp. 267, 4 (1840). H. Sch., Wanz. Ins. VI, 43, f. 600 (1842). Costa, Cim. Neap. II, 5, T. II, f. 7 (1843) = var. *dimidiata.*
Salda ocellata Costa, Cim. Regn. Neap. II, 9, T. II, f. 5 (1843) = var. *typica.*
Salda pallipes F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 152, 4 (1848). Fieb., Wien. Ent. Mon. III, 237, 12 (1859). Flor, Rh. Livl. I, 715, 5 (1860), partim. Fieb., Eur. Hem. 146, 12 (1861). Dougl. et Sc., Brit. Hem. 527, 8 (1865).
Salda saltatoria var. pallipes Stål, Hem. Fabr. I, 91, 3 (1868).
Salda saltatoria var. c J. Sahlb., Not. F. et Fl. Fenn. XI, 301 (1870) = Var. *luctuosa.*
Salda pallipes Thoms., Op. ent. IV, 407, 15 (1871). Dougl., Ent. Monthl. Mag. XII, p. 30 (1875). Saund., Syn. Brit. Hem. 634, 13 (1875) partim. Snell v. Vollenh., Inl. Hem. 295 (1878). Put., Syn. Het. France 200, 12 (1880) partim.
Salda luctuosa Westh., Jahresb. Westf. Prov. Ver. VIII, p. 65 (1880) = Var.
Acanthia pallipes Reut., Rev. Syn. 339, 304 (1888). Rev. d'Ent. IX, 257, 30 (1890). Medd. Soc. F. Fl. Fenn. XVII, 157 (1891).
Salda pallipes Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 181 (1892).

Species halophila et hydrophila; praecipue ad litora maris. Lapponia rossica et fennica usque ad 68° 20′ (J. Sahlberg); Fennnia fr. (Reuter); Svecia fr. (Thomson); Norvegia (Siebke); Dania fr. (Schioedte); Provinciae balticae sat fr. (Flor); Germania borealis: Schleswigia-Holsatia r. (Wuestnei), Mecklenburgia pass. (Raddatz), Borussia (Brischke), insula Juist (Alfken), Guestphalia r. (Westhoff); Britannia frequentiss. (Saunders); Batavia fr.

(Fokker); Belgium (Horvath); Gallia fr. (Puton); Helvetia frequentiss. (Frey-Gessner); Alsacia (Reiber), Saxonia (Herrich-Schaeffer); Bavaria (Gistl); Silesia in vallibus et alpibus solitaria (Assmann); Bohemia r. (Duda); Tirolia r. (Gredler); Austria (Herrich-Schaeffer); Hungaria (Branczik, Horvath); Halicia (Lomnicki); Moldavia (Montandon), Dobroudja (Montandon); Graecia (Reuter); Ager tridentinus (Bezzi); Italia (Costa), Sicilia (Ragusa), Sardinia (Spinola); Hispania (Bolivar et Chicote), Lusitania (Lethierry); Insulae Canarienses (Noualhier); Madeira (coll. Reuter); — Rossia: Moskva (Oschanin), Charkov (Jaroscheffski), Astrachan, Sarepta, Kasan fr. (Jakovleff); Caucasus (Kolenati); Transcaucasia (Jakovleff); Turkmenia (Jakovleff); Transcaspia et Chiva (Oschanin), Turkestan (Mus. Mosc.); Persia septentrionalis (Mus. Gen.); Sibiria: Verchne Sujetuk (Reuter), Birussa (Assmuss), Irkutsk (Jakovleff). — Africa borealis: Tetuan et Esmir (Saunders), Tunisia (Puton: „specimina minora", an re vera haec species?). — America borealis, insulae Haiti et Cuba (Uhler).

40. A. (A.) arenicola Scholtz.

Salda arenicola Scholtz, Arb. u. Ver. Schles. Ges. p. 6, 5 (1846). Fieb., Wien. Ent. Mon. III sp. 9 (1859). Thoms., Op. ent. IV, 408, 17 (1871). Saund., Syn. Brit. Hem. 634, 12, T. XII, f. 5 (1876). Put., Syn. Het. France 201, 13 (1880).

Acanthia arenicola Reut., Rev. d'Ent. IX, 251, 32 (1890). Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, p. 157 (1891).

Salda arenicola Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 182 (1892).

In litoribus arenosis; species halophila et hydrophila; quam *A. pallipes* multo longius et magis velociter saltat et volitat (J. Sahlberg, Reuter). Fennia meridionalis (J. Sahlberg); Svecia: Lapponia — Scania (Thomson); Norvegia: Dovre (Siebke); Anglia r. (Saunders); Batavia r. (Fokker); Belgium (Horvath); Gallia sat r. (Puton); Alsacia, Lotharingia r. (Reiber et Puton); Helvetia r. (Frey-Gessner); Silesia r. (Assmann); Styria (Eberstaller), Thueringia r. (Kellner), Moravia (Spitzner); Hungaria (Branczik, Horvath); Krakovia (Stobiecki), Halicia (Lomnicki); Rossia: Chvalynsk fr. (Jakovleff), Sarepta, Astrachan (Jakovleff); Liguria (Ferrari), Italia: Genova, Torino (Mus. Gen.), Napoli (coll. Signoret); Sicilia (Ragusa); Gibraltar (Saunders), Hispania (Bolivar et Chicote); Lusitania (Lethierry); Insulae canarienses (Noualhier). — Biskra (Lethierry et Puton).

41. A. (A.) xanthochila Fieb.

Salda xanthochila Fieb., Eur. Hem. 145, 5 (1861).
Salda striata Stål, Hem. Fabr. I, 91, 2 (1868), vix Fabr.
Salda xanthochila Put., Syn. Het. France 202, 14 (1880).

In litoribus arenosis (Reiber et Puton). Germania (Fieber); Alsacia (Reiber); Gallia r. (Puton); Bavaria (Kittel); Helvetia ad litora fluminis Aare (Frey-Gessner); Tirolia in vallibus et alpibus (Gredler); Ager tridentinus (Bezzi); Sicilia (Ragusa); Gibraltar (Saunders), Hispania (Lethierry); Algeria (Mus. Genov.); Rossia: Astrachan (Jakovleff).

Var. **limbosa** Horv.

Acanthia xanthochila var. limbosa Horv., Rev. d'Ent. X, p. 80 (1891).

Helvetia ad litora fluminis Aare (Varietas „mit deutlich breiter gelben Pronotumseitenrand und nahezu ganz weissen Halbdecken, ein verwaschener grauer Fleck über die Schlussnath": (Frey-Gessner). Armenia rossica (Horvath).

42. A. (A.) palustris Dougl.

Salda palustris Dougl., Ent. Monthl. Mag. XI, p. 10 (1874).
Salda pallipes var. Saund., Syn. Brit. Hem. 634, 13 (1876).
Salda saltatoria var. Put., Syn. Het. France p. 200 (1880).
Salda palustris J. Sahlb., Christ. Vid. Selsk. Forh. N:o 9, p. 8 (1880).
Acanthia pallipes var. Reut., Rev. d'Ent. IX, 251, 30 (1890).
Acanthia palustris Reut., Medd. Soc. F. et Fl. Fenn. XVII, p. 156 (1891).

Locis paludosis, ad ripas fluviorum. Scotia (Reuter); Anglia: Southampton, Bourmemoth (Douglas); Norvegia arctica: Bodö (J. Sahlberg); Karelia rossica (J. Sahlberg).

43. A. (A.) pallidipennis Reut.

Acanthia melanoscela var. pallidipennis Reut., Rev. d'Ent. VII, 226, 7 (1888). Berl. Ent. Zeit. XXXVI, 28 (1891).

Graecia: Elis (Reuter); Rossia meridionalis: Sarepta (Mus. Vindob.).

44. A. (A.) quadrilineata Jak.

Salda quadrilineata Jak., Ученыя Зап. Казанск Унив. 115, 40 (1864).

Rossia: Kasan (Jakovleff).

45. **A. (A.) lateralis** Fall.

Salda lateralis Fall., Mon. Cim. Svec. 30, 4 (1807). Hem. Svec. 74, 6 (1829).
Acanthia pulchella Curt., Brit. Ent. XII, 548 (1835).
Acanthia bicolor Curt., Brit. Ent. XII, 548 (1835).
Salda lateralis F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 153, 6 (1848).
Salda pulchella H. Sch., Wanz. Ins. IX, 131, f. 947 (1850).
Salda lateralis, *eburnea* et *pulchella* Fieb., Wien. Ent. Mon. III, 233 et 234, 2, 3 et 4 (1859). Eur. Hem. 144, 2, 3 et 4 (1861).
Salda lateralis et *pulchella* Dougl. et Sc., Brit. Hem. 519, 2 et 520, 3 (1865).
Salda lateralis Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 392, 10 (1868). Thoms., Op. ent. IV, 405, 8 (1871).
Salda halophila Jak., Horae Soc. Ent. Ross. XI, 229 (1875) = var. *eburnea* Fieb.
Salda eburnea, *lateralis* et *pulchella* Snell. v. Vollenh., Inl. Hem., 297, 298 et 299 (1878).
Salda lateralis Saund., Syn. Brit. Hem. III, 630, 1 (1876). Put., Syn. Het. France, 203, 16 (1880) cum varr. *eburnea*, *pulchella*, *lateralis* et *concolor*.
Salda Grenieri Sign., Ann. Soc. Ent. France, 6 Sér. T. III, XLII (1883). = var. *concolor* Put.
Salda maritima cum *var. nigroscutellata* Verh., Berl. Ent. Zeit. XXXVI, 202 (1891).
Salda versabilis Verh., Ent. Nachr. XVII, p. 340, cum varr. ♂: *nigroscutellata*, *pallida*, *lateralis*, *pulchella*, *nigra* p. 341, *maritima* p. 342, et ♀: *fallax*, *nigroscutellata*, *Reuteri*, *pulchella* et *maritima* p. 343 (1891).

Species maritima et halophila. Karelia et Lapponia rossica usque ad 66° (J. Sahlberg); Fennia ad litora maris usque ad Uleåborg, Tavastia in litoribus lacuum (F. Sahlberg); Svecia in litore maris haud r. (Thomson); Norvegia borealis (J. Sahlberg); Dania in litoribus salinis fr. (Schioedte); Germania borealis: Mecklenburgia h. fr. (Raddatz), Schlesvigia-Holsatia ad litora maris (Wuestnei), Norderney (Verhoeff), insula Juist (Alfken); Guestphalia in salinis (Westhoff); Batavia passim ad litora maris, Zierikzee (Fokker); Belgium (Horvath); Alsacia et Lotharingia in salinis (Reiber et Puton); Gallia ad litora maris, Paris (Puton); Italia (Mus. Gen.); Sardinia (Ferrari); Sicilia (Ragusa); Graecia (Chicote et Reuter); Dobroudja (Montandon); Caucasus (Jakovleff); Transcaucasia (Horvath); Transcaspia et Chiva (Oschanin). — Tunisia (Signoret, Ferrari).

Var *concolor* Put. praecipue in parte meridionali territorii: Gallia, Sardinia, Tunisia.

Subg. 5. **Chartoscirta** Stål.

Öfv. Vet. Ak. Förh. p. 393 (1868).

Typus: *Ch. elegantula* Fall.

46. **A. (Ch.) cincta** H. Sch.

Salda cincta H. Sch., Wanz. Ins. VI, 40, f. 598 (1842). F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 153, 7 (1848). Fieb., Wien. Ent. Mon. III, sp. 20 (1859).
Salda elegantula Flor, Rh. Livl. I, 722, 9 b (1860).
Salda cincta Flor, Rh. Livl. II, p. 620 (1861). Fieb., Eur. Hem. 148, 20 (1861). Dougl. et Sc., Brit. Hem. 531, 11 (1865). Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 393, 14 (1868). Thoms., Op. ent. IV, 409, 20 (1871). Saund., Syn. Brit. Hem. 636, 17, T. XII, f. 9 (1876). Put., Syn. Het. France 204, 18 (1880). Ferr., Hem. Lig. p. 95. Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 184, T. XVII, f. 2 (1892).

Species paludicola; in sphagnetis (J. Sahlberg), sub foliis deciduis locis humidis (d'Antessanty), ad litora fluviorum (Populus). Fennia et Karelia rossica usque ad 62° 20′ (J. Sahlberg); Svecia media sat fr. (Stål), Svecia meridionalis haud r. (Thomson); Dania parce (Schioedte); Provinciae balthicae (Flor); Germania borealis: Mecklenburgia r. (Raddatz), Schleswigia-Holsatia r. (Wuestnei), Guestphalia r. (Westhoff); Iria (Johnson), Scotia et Anglia (Saunders); Batavia r. (Fokker); Belgium (Lethierry); Gallia sat r. (Puton); Alsacia et Lotharingia r. (Reiber et Puton); Helvetia r. (Frey-Gessner); Thueringia r. (Kellner), Silesia solum in vallibus, r. (Assmann); Bohemia (Duda); Austria (Herrich-Schaeffer); Halicia (Lomnicki); Ager tridentinus (Ferrari); Illyria (Montandon); Italia: Viareggio (Mus. Genov.); Sardinia (Costa). Transcaucasia (Jakovleff). — Sibiria occidentalis in territorio silvoso (J. Sahlberg).

47. **A. (A.) elegantula** Fall.

Salda elegantula Fall., Mon. Cim. Sv. 30, 5 (1807). Humm., Ess. Ent. N:o 6, p. 15 (1826). Fall., Hem. Sv. 75, 7 (1829). Zett., Ins. Lapp. 268, 7 (1840). F. Sahlb., Mon. Geoc. Fenn. 153, 8 (1848). Kol., Bull.

Soc. Nat. Mosc. IV, 453, 241 (1856) dubiose. Flor, Rh. Livl. I, 720, 9 a (1860).
Salda Flori Dohrn, Stett. Ent. Zeit. XXIV, p. 395 (1863). = *var.*
Salda elegantula Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 393, 13 (1868). Thoms., Op. ent. IV, 408, 18 (1871). Saund., Syn. Brit. Hem. 635, 15, T. XII, f. 14 (1876). Put., Syn. Het. France 205, 19 (1880). Ferr., Hem. Lig. p. 95. Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 183, T. XVII, f. 1 (1892).

Species paludicola (Schioedte, Frey-Gessner, Assmann), in Sphagnetis (J. Sahlberg), ad litora fluviorum (Frey-Gessner). Fennia usque ad 63° 40′ (J. Sahlberg); Svecia (Stål); Norvegia: Dovre (Zetterstedt); Dania pass. (Schioedte); Germania borealis: Mecklenburgia r. (Raddatz), Borussia (Brischke); Anglia r. (Saunders); Belgium (Lethierry); Gallia rariss. (Puton); Bavaria (Kittel), Silesia (Assmann), Bohemia (?, Duda); Helvetia in vallibus (Frey-Gessner); Ager tridentinus (Ferrari); Italia: Monte Rosa (Mus. Genov.); Rossia: Moskva (Oschanin); Caucasus (Kolenati, dubiose, forsitan species sequens); Transcaucasia (Reuter). — Sibiria occidentalis in territorio silvoso (J. Sahlberg).

Obs. Fieber descripsit (Eur. Hem. p. 147) articulum secundum antennarum *S. elegantulae* flavum, solum apice nigricantem, quapropter hunc auctorem superne haud citavi.

48. A. (Ch.) longicornis Jak.

Salda longicornis Jak., Horae Soc. Ent. Ross. XIII (1882).

Transcaucasia: Derbent (Jakovleff); Caucasus (Leder in coll. Reuter).

49. A. (Ch.) dilutipennis Reut.

Acanthia dilutipennis Reut., Rev. d'Ent. X, 26, 6 (1891).

Turkestan: Taschkent (Reuter).

50. A. (Ch.) Cooksii Curt.

Acanthia Cooksii Curt., Brit. Ent. 348, 10 (1835).
Salda elegantula Hahn, Wanz. Ins. II, 84, f. 168 (1834). Spin., Ess. 77, 2 (1840).
Salda marginalis Germ. in Ahr., Faun. Insect. Eur., fasc. X, fig. XVI.
Salda geminata Fieb., Eur. Hem. 147, 18 (1861) nec Costa.
Salda elegantula Dougl. et Sc., Brit. Hem. 533, 12 (1865).

Salda geminata Stål, Öfv. Vet. Ak. Förh. 393, 12 (1868). Thoms., Op. ent. IV, 409, 19 (1871). Snell v. Vollenh., Inl. Hem. VII, 13, 9, T. VII, f. 9 (1878).
Salda Cooksii Saund., Syn. Brit. Hem. 636, 16, T. XII, f. 10 (1876). Put., Syn. Het. France 204, 17 (1880). Ferr., Hem. Lig. p. 35. Saund., Hem. Het. Brit. Isl. 183 (1892).

In sphagnetis (Saunders). Scania rariss. (Stål); Dania r. (Schioedte); Germania borealis: Schlesvigia-Holsatia rariss. (Wuestnei); Anglia (Saunders); Batavia r. (Fokker); Belgium (Horvath); Gallia (Puton); Lotharingia (Reiber et Puton); Guestphalia sat r. (Westhoff); Bavaria: Nürnberg (Hahn), Thueringia r. (Kellner); Tirolia r. (Gredler); Bohemia (Duda); Krakovia (Stobiecki), Halicia (Lomnicki), Moldavia (Montandon); Rossia: Astrachan (?, Jakovleff); Ager tridentinus (Ferrari), Illyria (Montandon), Liguria (Ferrari), Italia (Mella); Hispania (Chicote). — Africa borealis: Tetuan et Esmir (Saunders).

51. A. (Ch.) geminata Costa.

Salda geminata Costa, Cim. Regn. Neap. III, 7, 7, T. VI, f. 3 (1852).
Salda clavicornis Duf. in litt. sec. Amyot.
Salda venustula Scott, Ent. Monthl. Mag. VIII, p. 243 (1872) = *var.*
Salda Cooksi var. geminata Put., Syn. Het. France p. 204 (1880).
Salda geminata Ferr., Hem. Lig. p. 95.

Ad litora torrentium (Dubois), sub muscis et radicibus arborum (d'Antessanty). Gallia: Aube (d'Antessanty), Somme frequentiss. (Dubois), Oise fr. (Carpentier et Dubois), Yonne m. fr. (Populus), Loire inférieure (Dominique), Provence (Puton); Corsica (Scott, Puton); Sardinia (Costa); Hispania (Bolivar et (Chicote); Ager tridentinus (Bezzi); Liguria (Ferrari); Calabria (Costa); Rossia meridionalis: Sarepta, Astrachan (Jakovleff).

52. A. (Ch.) Roborowski Jak.

Salda Roborowski Jak., Horae Soc. Ent. Ross. XXIV, 242, 5 (1890).
Asia centralis (Jakovleff).



Explicatio tabulae.

Fig. 1. Acanthia (Chiloxanthus) borealis Stål ♀.
„ 2. A. (Sciodopterus) litoralis var. adriatica Horv. ♀.
„ 3. A. (Sciodopteri) Muelleri Gmel. hemielytron formae macropterae.
„ 4. A. (Calacanthia) Trybomi J. Sahlb. ♀.
„ 5. A. (Acanthia) orthochila Fieb., tibia antica.
„ 6. A. (Ac.) saltatoria L., *b:* tibia antica.
„ 7. A. (Ac.) opacula Zett., *b:* tibia antica.
„ 8. A. (Ac.) pallipes Fabr., caput et pronotum, *b:* tibia antica.
„ 9. A. (Ac.) pallidipennis Reut., caput et pronotum.
„ 10. A. (Ac.) lateralis Fall.
„ 11. A. (Chartoscirta) elegantula Fall.
„ 12. A. (Ch.) Cooksi Curt., antenna.



Corrigendum:

Pag. 8 lin. 9 infra legitur: in mare glabris, lege: in mare superne glabris.

Index alphabeticus.



ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXI. № 3.

SUR LA
REPRÉSENTATION CONFORME
DES AIRES PLANES

PAR

HJ. TALLQVIST.

SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES PLANES.

Le théorème fondamental relatif à la représentation conforme de deux aires planes à connexion simple l'une sur l'autre est dû, comme on sait, à Riemann. Quant aux applications, on ne connaît la solution du problème que pour quelques cas simples, qui dérivent directement de l'étude de fonctions particulières, et pour le cas bien important traité par M. Schwarz, où les aires planes sont limitées par des arcs de cercles ou des lignes droites. Les recherches de M. Schwarz ont donné lieu à un grand nombre d'applications à des cas particuliers, qui jouent un rôle important dans la physique mathématique et pour l'étude des surfaces minima.

La fonction qui donne la représentation conforme d'une aire plane S à connexion simple et dont le contour est formé par des arcs de cercles (ou des lignes droites), sur un demi-plan ou sur l'intérieur d'un cercle, dépend essentiellement de la forme des élements au voisinage des sommets du contour de S. On possède aussi des exemples, où les angles à ces sommets peuvent prendre la valeur zéro. Ainsi, le cas d'un triangle à trois angles nuls, formé par trois arcs de cercles tangents deux à deux, conduit à une équation différentielle connue, de Legendre. Le cas où les arcs de cercles en restant tangents deux à deux forment, dans l'intérieur de S, des angles multiples de π, a été, il nous semble, trop peu observé. La présente étude a pour but de combler en partie cette lacune en donnant des exemples de représentations conformes présentant cette espèce de singularité du contour. Dans le dernier de ces exemples, on est conduit à l'étude de quelques équations différentielles linéaires du second ordre.

1. Soit s la variable complexe qui est représentée géométriquement par un point du plan de l'aire S, $t = p + iq$ la variable complexe dans le plan de

T, région au-dessus de l'axe des p; σ et z deux variables complexes auxiliaires. Considérons avec M. Schwarz[1]) la fonction

$$(1) \qquad \sigma = \sigma(z) = z^{-m}\{1 + z\mathfrak{P}(z)\} + B_m \ln z ,$$

où m désigne un nombre entier positif ou nul, B_m une constante réelle, et $\mathfrak{P}(z)$ une série suivant les puissances positives, entières et croissantes de z, convergente aux environs de $z=0$ et à coefficients réels. Formons une équation différentielle

$$(2) \quad \{s,z\} = \frac{d^2}{dz^2}\ln\frac{ds}{dz} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\ln\frac{ds}{dz}\right)^2 = \frac{1-m^2}{2z^2} + \frac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + \cdots + a_n z^{n-1} + \cdots = F(z) ,$$

où les coefficients a du membre droit sont réels et où la série $a_1 + a_2 z + \cdots + a_n z^{n-1} + \cdots$ converge dans un cercle autour de $z=0$. On pourra alors déterminer le nombre B_m et les coefficients de la série $\mathfrak{P}(z)$ de (1) de manière que la fonction σ satisfasse à l'équation différentielle (2). Seul le coefficient de z^{m-1} en $\mathfrak{P}(z)$ reste indéterminé. On consultera pour plus de détails le mémoire cité de M. Schwarz.

Dans le cas $m=0$, le point $z=0$ sera toujours un point singulier essentiel de la fonction σ. Si m est un entier positif, $z=0$ pourra être un pôle; il faut pour cela qu'un certain déterminant D, formé par les coefficients a, s'annule identiquement (Schwarz l. c.).

Si nous prenons maintenant

$$s = \sigma^{-1} \quad \text{et} \quad z = t$$

$s=s(t)$ sera l'élément valable, dans le voisinage de $t=0$, d'une fonction qui représente d'une manière conforme le demi-plan T sur une aire S. Au point $t=0$ correspond le sommet $s=0$ du contour de S, formé par deux arcs de cercles qui se touchent et comprennent un angle $m\pi$ dans l'intérieur de S. Si $m>2$, le point $s=0$ est en même temps un point de ramification de l'aire S. Dans le cas particulier où le déterminant D est nul, les deux arcs de cercles qui se touchent ont aussi leurs centres communs.

La fonction s satisfait, ainsi que la fonction σ, à l'équation différentielle (2). L'intégrale générale de cette équation a la forme

$$(3) \qquad s = \frac{A\sigma + B}{C\sigma + D},$$

[1]) Zur Theorie der Gaussischen hypergeometrischen Reihe. Journal für reine und angewandte Mathematik, Band 75, ou Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band II, pag. 228.

où A, B, C et D sont des constantes complexes, et correspond à une aire S obtenue par la transformation circulaire de l'aire S considérée. De même on obtient par une transformation

$$t = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{4}$$

à coefficients réels, la représentation du demi-plan T sur lui-même.

L'intégrale particulière $\sigma = \sigma(t)$ donne la représentation conforme du demi-plan T sur une aire Σ, dans laquelle correspondent, au point $t=0$ un point à l'infini, et aux portions de l'axe des p qui se rencontrent en $t=0$, deux droites parallèles dont la distance est $B_m \pi$. Pour $m>2$ le point de l'infini est, pour l'aire Σ, un point de ramification.

$\sigma = \sigma(z)$ satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$E(z) = \frac{d}{dz} \ln \frac{d\sigma}{dz} = -\frac{1+m}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots. \tag{5}$$

Pour passer à l'aire Σ la plus générale de la forme indiquée, il faut prendre l'intégrale générale $\alpha\sigma + \beta$ de cette équation.

Ecrivons encore les développements de σ et des dérivées $E(z)$ et $\{\sigma, z\}$ de M. Schwarz, en admettant que le point singulier de σ corresponde au point de l'infini du contour de T. On a pour $z = \frac{1}{t}$

$$\begin{aligned} \sigma &= t^m \left\{1 + \frac{1}{t}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{t}\right)\right\} - B_m \ln t, \\ E(t) &= \frac{m-1}{t} + \frac{1}{t^2}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{t}\right), \\ \{\sigma, t\} &= \{s, t\} = \frac{1-m^2}{2t^2} + \frac{1}{t^3}\mathfrak{P}_3\left(\frac{1}{t}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ désignant les symboles des séries ordonnées suivant les puissances positives, entières et croissantes de $\frac{1}{t}$, dont les coefficients sont réels.

2. Considérons comme première application la fonction simple

$$\sigma = \frac{1}{t} + \ln t, \tag{7}$$

où l'on prend pour t réel et positif, la valeur réelle du logarithme. Cette fonction donnera la représentation conforme de la région supérieure T du plan des t (Fig. 1) sur une aire Σ, limitée par une parallèle à l'axe réel et par les deux bords d'une coupure s'étendant le long de cet axe, du point 1 jusqu'à l'infini (Fig. 2). Les angles aux sommets de Σ, correspondant aux points 0,

1 et ∞ sur le contour de T, ont les grandeurs respectives π, 2π et o. L'angle 2π seul se trouve dans la partie finie du plan; l'angle π est l'angle le plus remarquable. La distance entre la coupure et la droite illimitée du contour de Σ est égale à π. Nous avons construit, dans l'aire Σ, deux familles de courbes isothermes correspondant aux demi-cercles de T autour du point o, et à leurs rayons. Les deux systèmes de courbes isothermes sont choisis de façon à se laisser représenter d'une manière conforme sur deux séries de droites divisant le plan en carrés. Les courbes de la figure 2 sont transcendantes; on observera particulièrement la courbe faisant partie d'une cycloïde correspondant au demi-cercle du rayon 1 de T, et la courbe exponentielle, transformée de l'axe des q en T.

On passe, par la transformation circulaire (3) de l'aire Σ, à l'intérieur (ou l'extérieur) S d'un cercle présentant une coupure circulaire, tangente à ce cercle, et dont les angles sont aussi π, 2π et o (Fig. 3). Le réseau isotherme de S contient deux courbes qui sont les transformées par l'inversion de la cycloïde et de la courbe exponentielle.

La représentation conforme d'un demi-plan T limité par l'axe des p, sur un demi-plan Σ plus général avec une coupure rectiligne parallèle à la droite illimitée du contour, s'obtient par la fonction

$$\sigma = C_1 + \frac{C_2}{z} + C_3 \ln z ,$$

où

$$z = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$$

ses coefficients réels et où le quotient $C_2 : C_3$ est aussi réel.

3. Prenons à présent les fonctions

$$\sigma = \frac{1}{t^2} + 2 \ln t \tag{8}$$

et

$$\sigma = -\frac{1}{t^2} + 2 \ln t . \tag{9}$$

Si nous introduisons une nouvelle variable τ en posant

$$t^2 = \tau ,$$

l'équation (8) devient

$$\sigma = \frac{1}{\tau} + \ln \tau ,$$

et nous sommes, par suite, ramenés au cas que nous venons d'étudier. Il s'ensuit que la fonction (8) donne la représentation conforme d'un quart de plan,



région des coordonnées p et q positives, sur le demi-plan Σ_1 de la figure 2. Le demi-plan T supérieur est représenté lui-même sur une aire Σ, formée par Σ_1 et sa région symétrique Σ_2 par rapport à la droite illimitée du contour, c. à. d. sur un plan entier présentant deux coupures rectilignes parallèles (Fig. 4) [1]). Au voisinage du point $t=0$ de T correspond l'élément singulier à l'infini de Σ, limité par deux droites parallèles et présentant un angle 2π dans son intérieur.

Au moyen d'une fonction plus générale

$$\sigma = C\left\{\frac{1}{t^2} + \frac{a}{t} + b\ln t\right\} + C' \tag{10}$$

on représente le même demi-plan T d'une manière conforme, sur une aire Σ quelconque formée par un plan entier avec deux coupures rectilignes, qui s'étendent du même coté vers l'infini. a et b sont ici des constantes réelles et b est positif. Les deux points singuliers non essentiels du contour de T, lesquels correspondent aux bouts des coupures de Σ, se déterminent par l'équation du second degré

$$\frac{t}{C}\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2}{t^2} - \frac{a}{t} + b = 0.$$

La fonction (9)

$$\sigma = -\frac{1}{t^2} + 2\ln t$$

donne la représentation conforme du demi-plan T au-dessus de l'axe réel sur une aire Σ, qui se compose d'une aire Σ_1 de la même espèce que dans la figure 2 et de son aire symétrique Σ_2 par rapport à la droite le long de laquelle s'étend la coupure. Le contour de Σ est donc formé par deux droites parallèles illimitées, la bande entre ces deux droites étant doublement couverte. Cette bande a la largueur 2π; le point de ramification correspond à l'argument $t=i$, et le sommet de l'angle 2π à l'infini, à la valeur 0 de t, comme dans les cas précédents (Fig. 5).

Une représentation plus générale d'une aire Σ de la même espèce est donnée par la fonction

$$\sigma = C\left\{-\frac{1}{t^2} + \frac{a}{t} + b\ln t\right\} + C', \tag{11}$$

---

[1]) J'ai trouvé plus tard cette figure chez M. F. Bennecke: Untersuchung der stationären elektrischen Strömung in einer unendlichen Ebene für den Fall, dass die Zuleitung der beiden verschiedenen Elektricitäten in zwei parallelen geradlinigen Strecken erfolgt. Inaugural-Dissertation. Berlin 1886. Les aires que considère M. Bennecke, sont construites dans un plan simple, mais à connexion double et représentées sur un anneau circulaire par une fonction bien générale. On trouve dans le même mémoire un grand nombre d'applications intéressantes.

où les constantes doivent satisfaire aux mêmes conditions que dans la formule (10).

On pourrait continuer de cette manière, en examinant par exemple l'aire Σ, à laquelle conduit la fonction

$$\sigma = \frac{1}{t^3} + 3 \ln t .$$

Cette aire s'obtient par deux répétitions symétriques de l'aire de la figure 2 et contient un angle 3π à l'infini etc. Cependant, au lieu de pousser plus loin ces études directes, nous passerons maintenant au cas inverse, où l'aire Σ ou S est donnée. Il s'agit alors de chercher la fonction qui réalise la représentation conforme de cette aire sur un demi-plan.

4. Soit d'abord une aire Σ formée par le plan entier où l'on a tracé deux coupures rectilignes, parallèles et de directions opposées. Notre aire Σ contient alors deux angles π à l'infini, correspondant aux points singuliers essentiels de la fonction cherchée, et deux angles 2π à distance finie, pour lesquels la fonction doit présenter des singularités non essentielles. Pour trouver cette fonction $\sigma(t)$, qui représentera l'aire Σ d'une manière conforme sur un demi-plan T (Fig. 6), on forme d'abord la dérivée $E(t)$ de M. Schwarz. En faisant correspondre aux points $t=0$ et $t=\infty$, de T, les points de l'infini du contour de Σ, et aux points $t=\alpha$ et $t=\beta$, où $\alpha>0$ et $\beta<0$, les sommets de Σ qui se trouvent à distance finie, on aura pour la fonction rationnelle $E(t)$ l'expression

$$E(t) = \frac{d}{dt} \ln \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{t-\alpha} + \frac{1}{t-\beta} - \frac{2}{t} .$$

On tire de là en intégrant

$$\sigma = C \left\{ t - (\alpha+\beta) \ln t - \frac{\alpha\beta}{t} \right\} + C' . \tag{12}$$

Prenons par exemple

$$-C(\alpha+\beta) = 1 , \quad \alpha\beta = -1 , \quad C' = 0$$

et

$$\ln \alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} ,$$

d'où

$$\alpha = 3.3191 , \qquad \beta = -0.30129$$

et

$$\sigma = \ln t - 0.33137 \left(t + \frac{1}{t} \right) .$$

Alors les deux coupures de Σ seront la partie négative de l'axe réel et une parallèle à cet axe qui en est distante de π, et qui aboutit à l'axe ima-

ginaire. La division isotherme de l'aire Σ, que nous avons effectuée dans la fig. 7 par les deux familles de courbes correspondant aux rayons et demi-cercles de T, est facilitée par ce fait que cette figure admet le point $\sigma = \frac{1}{2} i \pi$ comme centre.

En transformant l'aire Σ par une inversion dont le centre est situé hors des coupures rectilignes, on obtient un plan simple S avec une coupure formée par deux arcs de cercles, qui se touchent au point singulier essentiel (Fig. 8). Le centre de Σ étant choisi pour centre de l'inversion, l'aire S aura aussi un centre (Fig. 9).

5. Considérons à présent une surface Σ de Riemann formée par deux feuilles qui ont pour contour deux droites parallèles et qui sont réunies entre elles suivant une ligne droite, aboutissant à un point de ramification dans l'intérieur de Σ (Fig. 10). L'aire Σ contient alors deux éléments à côtés parallèles et formant un angle π à l'infini. Si nous faisons correspondre à ces points les valeurs -1 et $+1$ sur le contour d'un demi-plan T (Fig. 1) et au point de ramification, l'argument $t = ia$, nous obtenons un arrangement symétrique de la figure Σ par rapport à une normale aux droites du contour, que nous prendrons pour axe imaginaire.

D'après ce qui précède, $E(t)$ aura la forme

$$E(t) = \frac{d}{dt} \ln \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{t - ia} + \frac{1}{t + ia} - \frac{2}{t-1} - \frac{2}{t+1} =$$

$$= \frac{2t}{t^2 + a^2} - \frac{4t}{t^2 - 1} .$$

L'intégration donne

$$\sigma = C \left\{ (a^2 + 1) \frac{2t}{1 - t^2} + (a^2 - 1) \ln \frac{1+t}{1-t} \right\}, \tag{13}$$

la constante additive étant déterminée de manière que les zéros des deux plans se correspondent. Il faut prendre pour $0 < t < 1$ la valeur réelle du logarithme. Nous supposons C réel et positif; la distance mutuelle des deux droites du contour de Σ est alors

$$b = C \, | a^2 - 1 | \, \pi ,$$

et la distance d du point de ramification à l'axe réel

$$d = 2 \, C \, | a + (a^2 - 1) \operatorname{arc tg} a \, | .$$

Les familles de courbes isothermes de la fig. 10, images des rayons et demi-cercles concentriques de T, correspondent aux valeurs numériques

$$b = \pi, \qquad d = 3\pi,$$

$$a = 1.13779 \quad \text{et} \quad C = 3.3949\,.$$

La figure 11 montre la surface S de Riemann, obtenue de l'aire Σ par la transformation circulaire. Le contour est formé par deux cercles qui se touchent au point singulier. Le centre de l'inversion a été choisi de manière que le point de ramification coïncide avec le centre du plus petit cercle, dont le rayon est la moitié du rayon du plus grand cercle.

6. Désignons par Σ' une aire à connexion simple que l'on a construite dans un plan simple de l'une des trois manières suivantes: 1) on mène un nombre fini de coupures rectilignes et parallèles et on les réunit à l'infini à un seul contour, 2) on trace une droite illimitée et l'on mène dans l'un des demi-plans ainsi obtenus un nombre fini de coupures rectilignes et parallèles à la droite et l'on construit un contour simple ou 3) on trace deux droites parallèles et l'on construit dans la bande obtenue un nombre fini de coupures rectilignes et parallèles à ces droites, et l'on réunit ensuite à l'infini les droites et les bords des coupures à un contour simple. Ces aires Σ' pourront présenter, à l'infini des angles 0, π ou 2π, à côtés parallèles et, dans la partie finie du plan, des angles 2π à côtés coïncidants. On représente une aire Σ' d'une manière conforme sur le demi-plan supérieur Z', région d'une variable z, par une fonction de la forme

$$\sigma = C\left\{R_1(z) + \sum_i C_i \ln (z - z_i)\right\} + C'\,. \tag{14}$$

Ici $R_1(z)$ désigne une fonction rationnelle à coefficients réels, les C_i et les z_i sont des constantes réelles, C et C' des constantes complexes. La formule (14) découle immédiatement du fait que la dérivée $E(z)$ est une fonction rationnelle de z de la forme

$$E(z) = \sum_i \frac{n_i}{z - z_i},$$

les n_i désignant des nombres entiers.

En effectuant maintenant un nombre fini de répétitions symétriques de Σ' par rapport aux coupures ou aux droites du contour, on est conduit à une surface Σ de Riemann à connexion simple, située dans le plan des σ, et dont le contour est formé par des droites illimitées parallèles et par des coupures rectilignes parallèles à ces droites. Cette aire peut contenir des points de ramification dans son intérieur et sur le contour. Par la répétition correspondante de l'aire Z', on obtient une autre surface Z de Riemann à connexion simple,

composée d'un certain nombre de demi-plans, et dont le contour se trouve entièrement sur l'axe réel.

Le problème de la représentation conforme de la surface Σ considérée sur un demi-plan T, est donc ramené à la représentation de Z sur T. Soit t la variable complexe du plan de T. La fonction z de t, qui représente l'aire Z sur l'aire T sera alors, comme on sait, rationnelle en t, c. à. d. qu'on aura

$$z = \Re(t)\,, \tag{15}$$

en notant par $\Re$ une fonction rationnelle donnant des valeurs réelles de la fonction pour des valeurs réelles de l'argument. On connaît une foule d'exemples de représentations conformes de cette espèce [1]). Pour trouver enfin la fonction σ de l'argument t qui donnera la représentation de Σ sur le demi-plan T, on substitue l'expression (15) de z dans la formule (14), ce qui ne change pas la forme générale de σ. On obtient

$$\sigma = C\left\{R(t) + \sum_i A_i \ln (t - t_i)\right\} + C'\,. \tag{16}$$

La même forme de fonction convient encore dans le cas plus général, où l'aire Σ est une surface de Riemann à plusieurs feuilles, mais à connexion simple, dont le contour est formé par des lignes droites parallèles et par des coupures rectilignes parallèles à ces droites, et qui contient, dans son intérieur ou sur le contour, des points de ramification arbitraires.

Pour former effectivement la fonction $\sigma = \sigma(t)$ correspondant à une aire Σ donnée on aura avantage, dans un grand nombre de cas, d'étudier directement cette fonction dont on connaît d'avance la forme. Prenons un exemple.

Considérons une aire Σ' (Fig. 12), dont le contour consiste en une droite et deux coupures rectilignes, parallèles à cette droite et de directions opposées, et effectuons une répétition symétrique de cette aire par rapport à la coupure qui aboutit au point (H) de la figure 12. Nous obtiendrons de cette manière une aire Σ à deux feuilles (Fig. 13), dont il s'agit de trouver la représentation conforme sur un demi-plan T. Cette aire Σ est limitée par deux droites parallèles situées dans des feuilles différentes et à la distance 2π l'une de l'autre, et par les bords de deux coupures le long de ces droites, mais dans

---

[1] Voir: E. R. Neovius: Ueber einige durch rationale Functionen vermittelte conforme Abbildungen. Acta Societatis Scientiarum Fennicae. T. XVII.

E. R. Neovius: Ueber Minimalflächenstücke deren Begrenzung von drei geradlinigen Theilen gebildet word. I. Acta Soc. Scient. Fenn. T. XVI, et II. Acta Soc. Scient. Fenn. T. XIX.

Einar Stenius: Ueber Minimalflächenstücke, deren Begrenzung von zwei Geraden und einer Ebene gebildet wird. Dissertation inaug. Helsingfors 1892.

l'autre feuille. Choisissons l'une des droites pour axe des σ réels et faisons aboutir les coupures sur l'axe des σ purement imaginaires. Les deux feuilles de la surface de Riemann couvrent doublement la bande formée par les deux droites du contour, et sont réunies entre elles aux points $\sigma = i\pi$ et $\sigma = \infty$, qui sont des points de ramification du premier ordre. Le contour a pour sommets: les points où aboutissent les coupures et où, par suite, la fonction doit présenter des singularités non essentielles; les points (D), (C) et (E), qui appartiennent à des éléments situés à l'infini comprennant l'angle 0, et enfin le point (A), où se trouve le sommet d'un angle 2π aussi à l'infini. Dans la figure 13 nous avons marqué par un trait un contour continu qui se trouve entièrement dans la partie finie des feuilles, mais qui peut s'étendre de manière à coïncider avec le contour véritable. Désignons encore, pour plus de clarté, par l'index I les points de la feuille inférieure, et par l'index II les points de la feuille supérieure de l'aire Σ. La symétrie de Σ nous permet maintenant de construire un demi-plan T (Fig. 14), sur lequel nous voulons représenter Σ, avec la correspondance suivante des points remarquables:

(17)	D	E	F	A	B	C	D	H	H'
t:	$-\infty$,	-1,	$-\alpha$,	0,	$+\alpha$,	$+1$,	$+\infty$,	$i\beta$,	$-i\beta$,
σ:	$-\infty+2i\pi_{II}$, $-\infty_{I}$,	$+\infty_{I}$, $+\infty+2i\pi_{I}$,	$2i\pi_{I}$,	$+\infty+2i\pi_{I}$, $+\infty_{II}$,	0_{II},	$+\infty_{II}$, $+\infty+2i\pi_{II}$,	$-\infty+2i\pi_{II}$, $-\infty_{I}$,	$i\pi$,	$-i\pi$.

α et β désignent ici deux nombres positifs qui seront calculés dans la suite.

Pour former à présent la fonction σ, prenons dans la formule (16), $C=1$ et C' réel, ce qui est évidemment permis ici, et cherchons d'abord les termes logarithmiques, contenant resp. en facteur $\ln t$, $\ln(t-1)$ ou $\ln(t+1)$. Pour trouver le coefficient de $\ln t$ je fais décrire à la variable t un demi-cercle d'un rayon très-petit ε, du point $+\varepsilon$ au point $-\varepsilon$, dans l'intérieur de T. $\ln t$ s'accroît alors de $i\pi$, tandis que l'accroissement de la partie imaginaire de σ doit être $2i\pi$; donc 2 est le coefficient cherché. En déterminant de même les autres coefficients et en faisant la somme des termes logarithmiques, celle-ci deviendra

$$2\ln t - 2\ln(t-1) - 2\ln(t+1) = 2\ln\frac{t}{(t-1)(t+1)}.$$

La fonction σ a donc la forme

$$\sigma = R(t) + 2\ln\frac{t}{(t-1)(t+1)} + C'.$$

Le pas prochain sera la détermination de la fonction rationnelle $R(t)$. A cet effet nous écrivons ci-dessous les développements que doivent présenter les fonc-

tions $R(t)$ et $\sigma(t)$ aux environs des points remarquables du plan des t, en employant d'une manière générale le symbole $\mathfrak{P}$ pour désigner une série à puissances entières, positives et croissantes. Ces développements sont

pour $t = 0$	$R(t) = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \mathfrak{P}(t)$,	$\sigma(t) = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + 2\ln t + \mathfrak{P}(t)$,
„ $t = 1$	$R(t) = \mathfrak{P}(t-1)$,	$\sigma(t) = -2\ln(t-1) + \mathfrak{P}(t-1)$,
„ $t = -1$	$R(t) = \mathfrak{P}(t+1)$,	$\sigma(t) = -2\ln(t+1) + \mathfrak{P}(t+1)$,
„ $t = \alpha$	$R(t) = \mathfrak{P}(t-\alpha)$,	$\sigma(t) = (t-\alpha)^2\,\mathfrak{P}(t-\alpha)$,
„ $t = -\alpha$	$R(t) = \mathfrak{P}(t+\alpha)$,	$\sigma(t) = (t+\alpha)^2\,\mathfrak{P}(t+\alpha)$,
„ $t = i\beta$	$R(t) = \mathfrak{P}(t-i\beta)$,	$\sigma(t) = (t-i\beta)^2\,\mathfrak{P}(t-i\beta)$,
„ $t = -i\beta$	$R(t) = \mathfrak{P}(t+i\beta)$,	$\sigma(t) = (t+i\beta)^2\,\mathfrak{P}(t+i\beta)$,
„ $t = \infty$	$R(t) = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{t}\right)$,	$\sigma(t) = 2\ln\frac{1}{t} + \mathfrak{P}\left(\frac{1}{t}\right)$,

où nous n'avons pas tenu compte de la constante additive de $\sigma(t)$. Il s'ensuit que la fonction $R(t)$ a le seul pôle $t=0$, où elle devient infini du second ordre. On a donc

$$R(t) = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + c$$

avec c indéterminé. Quant à la constante a, nous pouvons conclure d'après la p. 7 qu'elle doit être positive, résultat qui se vérifie dans la suite. De l'expression

$$\sigma = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + 2\ln\frac{t}{(t-1)(t+1)} + C'$$

il suit

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{2a}{t^3} - \frac{b}{t^2} + \frac{2}{t} - \frac{2}{t-1} - \frac{2}{t+1} = -\frac{2t^4 + bt^3 + 2(1+a)t^2 - bt - 2a}{t^3(t-1)(t+1)}.$$

D'autre part, comme $\frac{d\sigma}{dt}$ doit s'annuler du premier ordre aux points $\alpha, -\alpha, i\beta$ et $-i\beta$, le numérateur de $\frac{d\sigma}{dt}$ aura la forme

$$k(t-\alpha)(t+\alpha)(t-i\beta)(t+i\beta) = k(t^2-\alpha^2)(t^2+\beta^2).$$

La comparaison des deux expressions donne

$$k = -2, \qquad b = 0,$$

$$a = \alpha^2\beta^2, \qquad 1 + a = \beta^2 - \alpha^2,$$

d'où l'on tire

$$\beta = \sqrt{\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}}$$

et

$$a = \frac{\alpha^2 (1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2}.$$

En déterminant encore la constante additive par la condition que $t = \alpha$ donne $\sigma = 0$, on trouve pour la fonction σ cherchée l'expression

$$\sigma = \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \frac{\alpha^2 - t^2}{t^2} + 2 \ln \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \frac{t}{1 - t^2}. \tag{18}$$

Pour des valeurs réelles et positives de t, comprises dans l'intervalle $0 < t < 1$, il faut prendre la valeur réelle du logarithme. Il ne nous reste plus qu'à déterminer la constante α. Observons à cet effet que le point de ramification (II) de l'aire Σ doit être situé sur l'axe imaginaire. Il suit de là que α^2 est la racine positive inférieure à l'unité de l'équation transcendante

$$\ln \frac{(1 - r)^3 (1 + r)}{4r} = \frac{1 + 2r - r^2}{1 - r}.$$

Cette racine a la valeur

$$r = 0.065210,$$

d'où il suit

$$\alpha = 0.25536, \qquad \beta = 1.06748$$

et

$$\sigma = \frac{0.074308}{t^2} + 2 \ln \frac{t}{1 - t^2} + 1.4558.$$

La figure 14 montre les régions de T qui correspondent aux deux demi-plans et aux quatre bandes parallèles de l'aire Σ, que l'on obtient en prolongeant les coupures et l'axe de symétrie jusqu'à l'infini.

7. Prenons dans un plan simple trois cercles tangents deux à deux. On pourra former dans ce plan, de différentes manières des aires S limitées par trois arcs de cercles et ayant pour sommets les points de tangence. Les angles aux sommets peuvent avoir les valeurs $0, \pi$ et 2π. Parmi ces aires S, on distinguera quatre types essentiels caractérisés par la grandeur des angles:

$$(19) \qquad \begin{array}{cccc} I & 0, & 0, & 0, \\ II & 0, & \pi, & \pi, \\ III & 2\pi, & \pi, & \pi, \\ IV & 2\pi, & 2\pi, & 2\pi. \end{array}$$

On obtient d'une aire S donnée, une aire quelconque du même type par la transformation circulaire. Nos figures 15, 16, 17 et 18 montrent ces quatre types, un des sommets étant choisi à l'infini. Dans ce qui suit nous excluons toutefois le type à trois angles zéro, traité par M. A. Genetz [1]).

---

[1]) Till teorin för de Fuchs'ska funktionerna. Dissertation. Helsingfors 1889.

Le problème de la représentation conforme des aires S décrites sur un demi-plan T (Fig. 19), où nous pouvons prendre d'ailleurs les points 0, 1 et ∞ de l'axe des p comme correspondant aux sommets de S, est un cas limite du problème de la représentation conforme d'un triangle quelconque dont le contour est formé par trois arcs de cercles. On sait former dans ce cas général la dérivée $\{s, t\}$ de M. Schwarz et établir l'équation différentielle du troisième ordre, dont une intégrale particulière donne la représentation conforme cherchée. L'intégration de l'équation du troisième ordre se simplifie eu égard au fait connu [1]), qu'il est possible de donner à son intégrale générale la forme d'un quotient de deux intégrales d'une équation linéaire et homogène du second ordre. Dans le cas d'un triangle formé par trois arcs de cercles on est conduit à l'équation différentielle de Kummer:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)t}{t(1-t)}\frac{dz}{dt} - \frac{\alpha\beta}{t(1-t)}z = 0 \tag{20}$$

à laquelle satisfait la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, t)$. Soient $\lambda\pi$, $\mu\pi$ et $\nu\pi$ les angles aux sommets de S qui correspondent aux arguments 0, ∞ et 1 resp. On aura alors

$$\begin{aligned} \pm\lambda &= 1-\gamma, & \alpha &= \tfrac{1}{2}\{1\mp\lambda\pm\mu\mp\nu\},\\ \pm\mu &= \alpha-\beta, & \beta &= \tfrac{1}{2}\{1\mp\lambda\mp\mu\mp\nu\},\\ \pm\nu &= \gamma-\alpha-\beta, & \gamma &= 1\mp\lambda. \end{aligned} \tag{21}$$

L'équation (20) subsiste encore ainsi que les relations (21), dans les cas particuliers que nous voulons examiner, mais on ne peut plus employer les systèmes fondamentaux d'intégrales particulières aux environs des points critiques, que l'on a trouvées dans le cas général, où les quantités $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$ et $\alpha-\beta$ ne sont ni nulles, ni des nombres entiers. On consultera pour le cas limite, où une ou plusieurs de ces quantités sont nulles ou des nombres entiers, un travail de M. Ernst Lindelöf [2]), où l'on trouvera aussi cités les travaux antérieurs de Gauss et de M.M. Tannery, Jordan et Goursat sur l'équation de Kummer.

II. Revenons maintenant sur le second cas du tableau (19), et prenons, en nous servant des signes supérieurs dans les relations (21),

---

[1]) H. A. Schwarz: Ueber einige Abbildungsaufgaben, Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 70, et Gesammelte mathematische Abhandlungen. Bd. II. pag. 80.

[2]) Sur l'intégration de l'équation différentielle de Kummer. Acta Societatis Scientiarum Fennicae. Tom. XIX. Ce mémoire contient une nouvelle série remarquable $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, t)$, dont M. Lindelöf a déterminé aussi la valeur pour l'argument $t = 1$ dans quelques cas, où la série est convergente et où les nombres α, β, γ satisfont à des conditions particulières.

$$\lambda = 1, \qquad \mu = 1 \quad \text{et} \quad \nu = 0.$$

d'où il suit

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \quad \beta = -\tfrac{1}{2}, \quad \gamma = 0.$$

L'équation différentielle dont il s'agit sera alors

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{1}{1-t}\frac{dz}{dt} + \frac{1}{4t(1-t)}z = 0 \tag{22}$$

Soit au moyen des formules du mémoire de M. Lindelöf (p. 16), soit directement, on établit les systèmes fondamentaux d'intégrales particulières relatives aux différents points critiques. Prenons

$$\begin{cases} z_{01} = tF\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, t\right), \\ z_{02} = 4\mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, t\right) - \ln t \cdot z_{01}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{11} = F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1-t\right), \\ z_{12} = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1-t\right) - \ln(1-t) \cdot z_{11}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{\infty 1} = t^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{1}{t}\right), \\ z_{\infty 2} = t^{\frac{1}{2}} 4\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{1}{t}\right) - \ln\left(\frac{1}{t}\right) \cdot z_{\infty 1}. \end{cases}$$

Sur la série $\mathfrak{F}$ voir ci-après, p. 23. Changeons ici les notations en posant

$$\varphi(t) = F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, t\right) = 1 + \sum_{1}^{\infty} {}_n \alpha_n t^n,$$

$$\alpha_n = \left(\frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \frac{2n+1}{n+1}.$$

$$\chi(t) = \mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, t\right) = 1 + \frac{1}{4}Nt + \frac{1}{4}t\sum_{1}^{\infty} {}_n \beta_n \alpha_n t^n,$$

$$\beta_n = N - \frac{4.2}{1.3} + \frac{3}{1.2} - \frac{4.4}{3.5} + \frac{5}{2.3} - \frac{4.6}{5.7} + \frac{7}{3.4} - \cdots - \frac{4.2n}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{4.(2n+1)}{2n(2n+2)},$$

$$N = \frac{4.2}{1.3} - \frac{3}{1.2} + \frac{4.4}{3.5} - \frac{5}{2.3} + \frac{4.6}{5.7} - \frac{7}{3.4} + \cdots + \frac{4.2n}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{4.(2n+1)}{2n(2n+2)} + \cdots.$$

$$\psi(t) = F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, t\right) = 1 - \sum_{1}^{\infty} {}_n \gamma_n t^n,$$

$$\gamma_n = \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \frac{1}{2n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{4n}.$$

$$\omega(t) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, t\right) = N' - \sum_{1}^{\infty}{}_n \delta_n \gamma_n t^n,$$

$$\delta_n = N' - * + \frac{2}{1} - \frac{4.2}{1.3} + \frac{2}{2} - \frac{4.4}{3.5} + \frac{2}{3} - \cdots - \frac{4.(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)} + \frac{2}{n},$$

$$N' = * - \frac{2}{1} + \frac{4.2}{1.3} - \frac{2}{2} + \frac{4.4}{3.5} - \frac{2}{3} + \cdots + \frac{4.2n}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{2}{n+1} + \cdots.$$

Nos systèmes fondamentaux deviendront alors

$$\begin{cases} z_{01} = t\,\varphi(t), \\ z_{02} = 4\,\chi(t) - t\,\varphi(t)\ln t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{11} = \psi(1-t), \\ z_{12} = \omega(1-t) - \psi(1-t)\ln(1-t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{\infty 1} = t^{-\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{1}{t}\right), \\ z_{\infty 2} = t^{\frac{1}{2}}.4\,\chi\left(\frac{1}{t}\right) - t^{-\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\ln\left(\frac{1}{t}\right). \end{cases}$$

Les intégrales de ces systèmes sont des fonctions multiformes. On les rend uniformes en traçant dans le plan des t les coupures de Riemann $-\infty$ —— 0 et $+1$ —— ∞, et en assignant, sur la partie 0 —— $+1$ de l'axe réel, aux logarithmes, des valeurs réelles, et à la puissance $t^{-\frac{1}{2}}$ sa valeur réelle et positive. Les régions de convergence des diverses séries, connues d'avance grâce à la connaissance des points singuliers, sont, pour les séries en t, l'intérieur T_0 d'un cercle de rayon 1 autour de l'origine, pour les séries en $1-t$, l'intérieur T_1 d'un cercle du même rayon au centre $t=1$, et pour les séries en $\frac{1}{t}$, l'extérieur T_∞ du cercle T_0. Pour l'étude complète des intégrales de l'équation (22), il est encore nécessaire de déterminer les coefficients numériques des relations linéaires qui lient entre elles les intégrales de nos systèmes fondamentaux. Soient ces relations:

$$z_{11} = A_1 z_{01} + A_2 z_{02}, \qquad z_{\infty 1} = B_1 z_{11} + B_2 z_{12},$$
$$z_{12} = A_3 z_{01} + A_4 z_{02}. \qquad z_{\infty 2} = B_3 z_{11} + B_4 z_{12}.$$

$$z_{\infty 1} = C_1 z_{01} + C_2 z_{02},$$
$$z_{\infty 2} = C_3 z_{01} + C_4 z_{02}.$$

En employant, pour cette détermination, la méthode dont s'est servi M. Lindelöf (p. 28 & 29), on trouve

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = \frac{1}{2\pi},$$
$$A_3 = \frac{\pi}{2}, \qquad A_4 = \frac{\omega(1)}{4}.$$
$$B_1 = \mp 2i - \omega(1), \qquad B_2 = \frac{2}{\pi},$$
$$B_3 = 2\pi, \qquad B_4 = 0.$$
$$C_1 = 1, \qquad C_2 = \mp \frac{i}{\pi},$$
$$C_3 = 0, \qquad C_4 = 1.$$

Il faut prendre le signe supérieur dans la moitié supérieure, et le signe inférieur dans la moitié inférieure du plan des t. En même temps que ces coefficients on trouve la relation

$$\chi(1) = \mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, 1\right) = \frac{\pi}{2},$$

mais le nombre transcendant

$$\omega(1) = \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1\right)$$

reste inconnu. Cependant on peut démontrer par une autre voie que ce nombre $\omega(1)$ est nul. A cet effet nous avons déduit ci-après au n:o 8 la formule plus générale

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, 1) = 0,$$

qui a lieu pour $\alpha + \beta = 0$.

Les relations entre les intégrales particulières de l'équation (22) sont donc

$$\begin{cases} z_{11} = \frac{1}{2\pi} z_{02}, \\ z_{12} = \frac{\pi}{2} z_{01}. \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{\infty 1} = z_{01} \mp \frac{i}{\pi} z_{02}, \\ z_{\infty 2} = z_{02}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{\infty 1} = \mp 2 i z_{11} + \frac{2}{\pi} z_{12}, \\ z_{\infty 2} = 2\pi z_{11}, \end{cases}$$

où le signe double se détermine comme il a été dit plus haut.

Un quotient de deux intégrales particulières quelconques de l'équation (22), qui ne se réduit pas à une constante, donne la représentation conforme du demi-plan T sur une aire S, limitée par trois arcs de cercles tangents deux à deux et présentant les angles $0, \pi$ et π aux sommets. Pour avoir particulièrement le cas des figures 16 et 19, il faut prendre le quotient

$$s = \frac{z_{02} + i\pi z_{01}}{z_{02}} = \frac{4\chi(t) + (i\pi - \ln t)\, t\varphi(t)}{4\chi(t) - t\varphi(t)\ln t},$$

ce qu'on vérifie sans peine.

III. Pour traiter le troisième cas du tableau (19) nous partirons de l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2(1-2t)}{t(1-t)}\frac{dz}{dt} - \frac{5}{4t(1-t)}z = 0, \tag{23}$$

que l'on obtient en prenant dans les formules (21) les signes inférieurs pour λ et ν, le signe supérieur pour μ, et en posant

$$\lambda = 1, \qquad \mu = 2, \qquad \nu = 1,$$

d'où

$$\alpha = \frac{5}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{2}, \qquad \gamma = 2.$$

L'aire S aura alors les angles π, π et 2π aux sommets; comme d'ailleurs $\gamma - \alpha - \beta = -1$ et $\gamma > \alpha\beta$ notre cas correspondra au dernier cas considéré par M. Lindelöf (pp. 29 & 30).

On pourra choisir les systèmes fondamentaux suivants

$$\begin{cases} z_{01} = \varphi(t), \\ z_{02} = t^{-1}.4.\chi(t) - 3\varphi(t)\ln t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{11} = \varphi(1-t). \\ z_{12} = (1-t)^{-1}.4.\chi(1-t) - 3\varphi(1-t)\ln(1-t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{\infty 1} = t^{-\frac{5}{2}}\psi\left(\frac{1}{t}\right), \\ z_{\infty 2} = t^{-\frac{1}{2}}.4.\omega\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{3}{8}t^{-\frac{5}{2}}\psi\left(\frac{1}{t}\right)\ln\left(\frac{1}{t}\right), \end{cases}$$

où l'on s'est servi des notations

$$\varphi(t) = F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2, t\right) = 1 + \sum_{1}^{\infty}{}_n \alpha_n t^n,$$

$$\alpha_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1.3.\dots(2n-1)}{2.4.6.\dots 2n}\right)^2 \frac{(2n+1)(2n+3)}{2n+2}.$$

$$\chi(t) = \mathfrak{F}\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2, t\right) = 1 + \frac{3}{4}Nt + \frac{3}{4}t\sum_{1}^{\infty}{}_n \beta_n \alpha_n t^n,$$

$$\beta_n = N - \frac{4.3}{1.5} + \frac{3}{1.2} - \frac{4.5}{3.7} + \frac{5}{2.3} - \dots - \frac{4(2n+1)}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{2n+1}{n(n+1)},$$

$$N = \frac{4.3}{1.5} - \frac{3}{1.2} + \frac{4.5}{3.7} - \frac{5}{2.3} + \dots + \frac{4(2n+3)}{(2n+1)(2n+5)} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} + \dots.$$

$$\psi(t) = F\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 3, t\right) = 1 + \sum_1^\infty \gamma_n t^n,$$

$$\gamma_n = \frac{8}{3}\left(\frac{1.3.5..(2n+1)}{2.4.6..(2n+2)}\right)^2 \frac{(2n+2)(2n+3)}{2n+4}.$$

$$\omega(t) = \mathfrak{F}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 3, t\right) = 1 + \frac{1}{4}t - \frac{3}{32}t^2\left\{N' + \sum_1^\infty \delta_n \gamma_n t^n\right\},$$

$$\delta_n = N' - \frac{4.4}{3.5} + \frac{4}{1.3} - \frac{4.6}{5.7} + \frac{6}{2.4} - \cdots - \frac{4(2n+2)}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{2(n+1)}{n(n+2)},$$

$$N' = \frac{4.4}{3.5} - \frac{4}{1.3} + \frac{4.6}{5.7} - \frac{6}{2.4} + \cdots + \frac{4(2n+4)}{(2n+3)(2n+5)} - \frac{2(n+2)}{(n+1)(n+3)} + \cdots.$$

On peut trouver ici tous les coefficients dans les relations linéaires entre les intégrales particulières. Ces relations sont

$$\begin{cases} z_{11} = \dfrac{1}{3\pi} z_{02}, \\ z_{12} = 3\pi\, z_{01}. \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{\infty 1} = \pm 4 i z_{11} - \dfrac{4}{3\pi} z_{12}, \\ z_{\infty 2} = \dfrac{3\pi}{2} z_{11}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{\infty 1} = -4 z_{01} \pm \dfrac{4i}{3\pi} z_{02}, \\ z_{\infty 2} = \dfrac{1}{2} z_{02}, \end{cases}$$

où les signes se déterminent comme il a été dit p. 18. En même temps que ces coefficients on obtient la relation

$$\chi(1) = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{\pi}.$$

Pour parvenir à ce résultat, il faut remarquer que, dans les formules de M. LINDELÖF, la dernière formule

$$(a) \qquad y_{\infty 2} = \frac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha-\beta)} y_{02}$$

de la pag. 30 semble supposer, outre la condition

$$\gamma - \alpha - \beta = -1,$$

encore les deux inégalités

$$(b) \qquad \gamma > \alpha\beta \quad \text{et} \quad \alpha-\beta+1 > \alpha(\alpha-\gamma+1) \quad \text{ou} \quad 1-\beta > \alpha(\alpha-\gamma),$$

dont on a supposé l'existence en démontrant que les quantités $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ et $\mathfrak{F}(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, 1)$ sont finies. Toutefois on peut démontrer que la

formule (a) est indépendante de ces restrictions (b). La condition $\gamma > \alpha\beta$, que suppose M. LINDELÖF, n'est pas en effet nécessaire pour la convergence de $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ pour $\gamma - \alpha - \beta = -1$. Nous donnons la démonstration de ce fait ci-après au n:o 8. Dans notre cas, la quantité

$$\omega(1) = \mathfrak{F}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 3, 1\right),$$

où $\gamma < \alpha\beta$, est finie; elle a la valeur $\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2\pi}$.

Le quotient de deux intégrales particulières de l'équation (23), qui représente d'une manière conforme l'aire S de la figure 17 sur le demi-plan T de la figure 19, est le suivant

$$s = \frac{z_{02}}{z_{02} + 3i\pi z_{01}} = \frac{4\chi(t) - 3t\varphi(t)\ln t}{4\chi(t) + 3(i\pi - \ln t)t\varphi(t)}.$$

Nous savons dès à présent continuer analytiquement cette fonction.

IV. Je résume enfin pour le quatrième cas du tableau (19), où l'aire S a trois angles 2π, quelques résultats trouvés par un de mes élèves, M. GUSTAVE TEGENGREN. M. TEGENGREN part de l'équation différentielle

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{1-2t}{t(1-t)}\frac{dz}{dt} - \frac{5}{4t(1-t)}z = 0, \tag{24}$$

qui correspond aux valeurs

$$\alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = -\frac{5}{2},\ \gamma = -1$$

des paramètres de l'équation (20). Il trouve les systèmes fondamentaux suivants

$$\begin{cases} z_{01} = t^2\varphi(t), \\ z_{02} = 4\chi(t) + \frac{15}{8}t^2\varphi(t)\ln t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{11} = (1-t)^2\varphi(1-t), \\ z_{12} = 4\chi(1-t) + \frac{15}{8}(1-t)^2\varphi(1-t)\ln(1-t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{\infty 1} = t^{\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{1}{t}\right), \\ z_{\infty 2} = t^{\frac{1}{2}}\left\{4t^2\chi\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{15}{8}\varphi\left(\frac{1}{t}\right)\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right\}, \end{cases}$$

où l'on a

$$\varphi(t) = 1 - \sum_{1}^{\infty}{}_n\,\alpha_n t^n,$$

$$\alpha_n = 2\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(2n-1)}.$$

$$\chi(t) = 1 - \frac{5}{4}t - \frac{15}{8}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)t^2 + \frac{1}{4}t^2 \sum_{1}^{\infty}{}_n \beta_{n+2}\, \alpha_n\, t^n,$$

$$\frac{\beta_n}{4} = \frac{15}{8}\left\{\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-4}\right) - \frac{1}{2(2n-5)} - \frac{1}{2(2n-3)} + \frac{1}{2(2n-2)} + \frac{1}{2.2n}\right\}.$$

Les relations linéaires entre trois intégrales particulières sont

$$\begin{cases} z_{11} = \dfrac{8}{15\pi} z_{02}, \\ z_{12} = \dfrac{15\pi}{8} z_{01}. \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{\infty 1} = \pm i\, z_{11} + \dfrac{8}{15\pi} z_{12}, \\ z_{\infty 2} = \dfrac{15\pi}{8} z_{11}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{\infty 1} = z_{01} \pm \dfrac{8i}{15\pi} z_{02}, \\ z_{\infty 2} = z_{02}. \end{cases}$$

Pour trouver ces résultats, M. TEGENGREN a calculé numériquement deux nombres transcendants à cinq décimales. Il a traité de même les cas antérieurs, en partant des équations différentielles où le terme en $\frac{dz}{dt}$ s'évanouit, et que l'on peut établir par un autre choix de la correspondance entre les nombres $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ et les angles de l'aire S que celui dont nous avons fait usage plus haut.

On a ici

$$\varphi(t) = F\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3, t\right),$$

$$\chi(t) = \mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3, t\right),$$

$$\varphi(1) = \frac{32}{15\pi}.$$

J'ai établi rigoureusement les coefficients donnés plus haut. Le calcul donne:

$$\chi(1) = 0,$$

d'où l'on pourrait tirer encore

$$\chi'(1) = -\frac{1}{\pi}$$

à l'aide de l'équation différentielle

$$4t(1-t)\chi''(t) - 4(1-2t)\chi'(t) - 5\chi(t) = \frac{15}{4}t^2(t-1)\varphi'(t) + \frac{15}{8}t(t-2)\varphi(t).$$

C'est le quotient

$$s = \frac{z_{02}}{z_{02} - \frac{15\pi i}{8} z_{01}} = \frac{4\chi(t) + \frac{15}{8} t^2 \varphi(t) \ln t}{4\chi(t) + \frac{15}{8} t^2 \varphi(t)(\ln t - i\pi)}$$

qui donne la représentation conforme de l'aire S de la figure 18 sur le demi-plan T de la figure 19.

8. Il nous reste encore à démontrer les résultats concernant la série $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de M. Lindelöf, que nous avons énoncés pp. 18 et 21. A cet effet nous ferons d'abord quelques observations sur la convergence de cette série et de ses dérivées pour $x = 1$, α, β et γ étant supposés réels. La série $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ est définie par la formule

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{1(2-\gamma)} x + \cdots$$

$$+ \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)\cdots(\alpha-2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)\cdots(\beta-2)}{1.2.3.\cdots(\gamma-2)(2-\gamma)(3-\gamma)\cdots(-2)(-1)} x^{\gamma-2}$$

$$- C(\alpha, \beta, \gamma) x^{\gamma-1} \Big\{ N + \Big[N - \Big(\frac{\alpha+\beta}{\alpha.\beta} - \frac{\gamma+1}{1.\gamma} \Big) \Big] a_1 x +$$

$$+ \Big[N - \Big(\frac{\alpha+\beta}{\alpha.\beta} - \frac{\gamma+1}{1.\gamma} + \frac{\alpha+\beta+2}{(\alpha+1)(\beta+1)} - \frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)} \Big) \Big] a_2 x^2 + \cdots \Big\},$$

où l'on a désigné par a_1, a_2 etc. les coefficients de la série hypergéométrique $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$:

$$a_1 = \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}; \quad a_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} \text{ etc.}$$

et par N la somme de la série indéfinie

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha.\beta} - \frac{\gamma+1}{1.\gamma} + \frac{\alpha+\beta+2}{(\alpha+1)(\beta+1)} - \frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)} + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha+\beta+2n}{(\alpha+n)(\beta+n)} - \frac{\gamma+2n+1}{(n+1)(\gamma+n)} + \cdots.$$

Si $\gamma = 1$, la série $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aura la forme

$$- C(\alpha, \beta, \gamma) \Big\{ N + \Big[N - \Big(\frac{\alpha+\beta}{\alpha.\beta} - \frac{\gamma+1}{1.\gamma} \Big) \Big] a_1 x + \cdots \Big\}.$$

Posons
$$C(\alpha, \beta, \gamma) = -1,$$

et
$$\lambda_n = N - \Big(\frac{\alpha+\beta}{\alpha.\beta} - \frac{\gamma+1}{1.\gamma} + \cdots + \frac{\alpha+\beta+2n-2}{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)} - \frac{\gamma+2n-1}{n(\gamma+n-1)} \Big).$$

Le nombre λ_n se compose d'une suite infinie de termes de la forme

$$(25)\ \mu_i = \frac{\alpha+\beta+2i}{(\alpha+i)(\beta+i)} - \frac{\gamma+2i+1}{(i+1)(\gamma+i)} = \frac{i^2(\gamma-\alpha-\beta+1)+2i(\gamma-\alpha\beta)+\gamma(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\gamma+1)}{(i+1)(i+\alpha)(i+\beta)(i+\gamma)}.$$

Le terme général de la série $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aura la forme

$$A_n x^n = \lambda_n a_n x^n$$

et les termes conserveront, pour x réel et positif, à partir d'une certaine valeur n_1 de n, le même signe.

Pourvu que $\gamma-\alpha-\beta+1$ ne soit pas nul, on pourra déterminer un certain nombre i_1, que nous prendrons $\geqq n_1$, tel que

$$\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{i^2}+\frac{h}{i^3}<\mu_i<\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{i^2}+\frac{k}{i^3}$$

pour $i \geqq i_1$. Dans cette formule, qu'on démontre par exemple en considérant le développement de la fonction rationnelle

$$\frac{\alpha+\beta+2x}{(\alpha+x)(\beta+x)} - \frac{\gamma+2x+1}{(x+1)(\gamma+x)}$$

suivant les puissances positives et croissantes de $\frac{1}{x}$, h et k désignent deux nombres finis et indépendants de i, qui se laissent trouver dans chaque cas particulier. On en tire l'inégalité

$$(26)\qquad (\gamma-\alpha-\beta+1)\sum_n^\infty \frac{1}{i^2} + h\sum_n^\infty \frac{1}{i^3} < \lambda_n < (\gamma-\alpha-\beta+1)\sum_n^\infty \frac{1}{i^2} + k\sum_n^\infty \frac{1}{i^3},$$

qui aura lieu pour $n \geqq i_1$.

Comme on a

$$\frac{1}{n} < \sum_n^\infty \frac{1}{i^2} < \frac{1}{n-1}$$

et

$$\frac{1}{n^2} < 2\sum_n^\infty \frac{1}{i^3} < \frac{1}{(n-1)^2},$$

il suit que la série $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sera, pour $x=1$, convergente ou divergente, suivant que les séries

$$\sum \frac{a_n}{n-1} \quad \text{et} \quad \sum \frac{a_n}{n}$$

le seront.

Supposons maintenant

$$\gamma-\alpha-\beta<-1$$

et considérons la série $\sum \frac{a_n}{n-1}$. Le quotient du terme $\frac{a_{n+1}}{n}$ par le terme précedent $\frac{a_n}{n-1}$ sera

$$\frac{(n-1)\, a_{n+1}}{n\, a_n}=\frac{(n-1)(n+\alpha)(n+\beta)}{n(n+1)(n+\gamma)}=\frac{n^3+(\alpha+\beta-1)\,n^2+\cdots}{n^3+(\gamma+1)\,n^2+\cdots}.$$

La différence entre les coefficients de n^2 dans le dénominateur et dans le numérateur étant

$$\gamma-\alpha-\beta+2<1,$$

on en conclut, d'après un théorème connu de GAUSS [1], que la série $\mathfrak{F}(\alpha,\beta,\gamma,1)$ est dans ce cas divergente.

Le terme général de $\mathfrak{F}^{(m)}(\alpha,\beta,\gamma,x)$ étant

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)\,\lambda_n\, a_n\, x^{n-m},$$

on démontrerait sans peine que les dérivées sont aussi, pour $x=1$, divergentes.

En supposant maintenant dans la série $\mathfrak{F}(\alpha,\beta,\gamma,1)$

$$\gamma-\alpha-\beta>-1,$$

la différence, à laquelle se rapporte le théorème de GAUSS, sera

$$\gamma-\alpha-\beta+2>1.$$

Donc il suit que la série $\mathfrak{F}(\alpha,\beta,\gamma,1)$ est, dans ce cas, convergente.

Si $\gamma-\alpha-\beta$ en restant plus grand que -1, se trouve entre deux entiers consécutifs

$$r<\gamma-\alpha-\beta<r+1 \qquad (r=-1,0,1,2\ldots)$$

les $r+1$ premières dérivées de la série $\mathfrak{F}(\alpha,\beta,\gamma,x)$ auront, pour $x=1$, des valeurs finies, tandis que les dérivées d'un ordre supérieur au $(r+1)$'ième deviendront infinies.

Supposons à présent en particulier que $\gamma-\alpha-\beta$ soit égal à un entier positif ou nul

$$\gamma-\alpha-\beta=r \qquad (r=0,1,2\ldots).$$

Alors la $(r+1)$'ième dérivée de $\mathfrak{F}(\alpha,\beta,\gamma,x)$ sera la première qui deviendra infinie pour $x=1$. Nous démontrerons que l'ordre d'infinitude sera pour cette

---

[1] Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\,\beta}{1.\gamma}x+\cdots$ Pars prior. Art. 16.

dérivée le même que pour $\ln(1-x)$. A cet effet il faut considérer la série dont le terme général a la forme

$$A_n x^{n-r-1} = (n-1)(n-2)\cdots(n-r)\, a_n x^{n-r-1}\,.$$

En différentiant r fois l'équation

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,x)}{x} = \sum_1^\infty a_n x^{n-1} + \frac{1}{x}$$

on trouve que notre série deviendra, pour $x=1$, infinie comme la fonction $F^{(r)}(\alpha,\beta,\gamma,x)$ ou, ce qui revient au même, comme la série hypergéométrique $F(\alpha+r,\beta+r,\gamma+r,x)$. Or, cette série satisfait, sous les conditions particulières dont il s'agit, à la relation

$$\gamma+r-(\alpha+r)-(\beta+r)=0\,,$$

d'où il suit, d'après la formule (21) du mémoire de M. LINDELÖF, qu'elle devient pour $x=1$, infinie comme la fonction $\ln(1-x)$. Notre proposition sur la série $\mathfrak{F}^{(r+1)}(\alpha,\beta,\gamma,x)$ en découle immédiatement. On observera la formule

(27) $$\lim_{x=1}(1-x)\,\mathfrak{F}^{(r+1)}(\alpha,\beta,\gamma,x)=0\,.$$

Quant aux dérivées d'ordre supérieur à $r+1$, on trouve sans peine, dans ce cas, l'équation

(28) $$\lim_{x=1}(1-x)^k\,\mathfrak{F}^{(r+k+1)}(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{r+1}{k(k+1)\cdots(k+r)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\quad (k=1,2,\cdots)\,.$$

En prenant maintenant

$$\gamma-\alpha-\beta=-1\,,$$

nous aurons d'après la formule (25)

$$\mu_i=\frac{2i(\gamma-\alpha\beta)+\gamma(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\gamma+1)}{(i+1)(i+\alpha)(i+\beta)(i+\gamma)}\,,$$

d'où il suit, à partir d'une certaine valeur i_1, et pourvu que $\gamma-\alpha\beta$ ne soit pas nul:

$$\frac{2(\gamma-\alpha\beta)}{i^3}+\frac{h}{i^4}<\mu_i<\frac{2(\gamma-\alpha\beta)}{i^3}+\frac{k}{i^4}\,,$$

et

$$2(\gamma-\alpha\beta)\sum_n^\infty\frac{1}{i^3}+h\sum_n^\infty\frac{1}{i^4}<\lambda_n<2(\gamma-\alpha\beta)\sum_n^\infty\frac{1}{i^3}+k\sum_n^\infty\frac{1}{i^4}\,.$$

La série $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ se comportera donc dans ce cas comme la série $\sum \frac{a_n}{n^2}$. En désignant par A_n le terme $\frac{a_n}{n^2}$, on aura

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{n^2 . a_{n+1}}{(n+1)^2 . a_n} = \frac{n^4 + n^3(\alpha+\beta) + \cdots}{n^4 + n^3(\gamma+3) + \cdots}.$$

La différence entre les coefficients de n^3 dans le dénominateur et le numérateur étant

$$\gamma - \alpha - \beta + 3 = 2,$$

on en conclut que la série $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ aura en ce cas une valeur finie, ce qui démontre notre proposition p. 21. Les dérivées deviennent infinies.

Supposons enfin que les conditions

$$\gamma - \alpha - \beta = -1 \quad \text{et} \quad \gamma = \alpha\beta$$

soient vérifiées à la fois. Les coefficients μ_i et λ_n étant alors nuls, $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sera une fonction rationnelle et entière en x.

A l'aide des considérations faites sur la convergence de la série $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ et de ses dérivées pour $x = 1$ et $\gamma - \alpha - \beta =$ un nombre entier positif r, il sera aisé d'établir maintenant la formule énoncée p. 18:

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, 1) = 0 \tag{29}$$

qui est vérifiée pour $\alpha + \beta = 0$. On est conduit à déterminer la valeur de la quantité $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, 1)$ pour $\alpha + \beta = 0$, quand on cherche à intégrer l'équation de Kummer

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} y = 0 \tag{30}$$

en supposant

$$\alpha + \beta = 0, \quad \gamma = 0 \quad \text{et} \quad \alpha - \beta = \text{un entier.}$$

Les systèmes fondamentaux seront (Lindelöf p. 28):

$$\begin{cases} y_{01} = x\,F(\alpha+1, \beta+1, 2, x), \\ y_{02} = \mathfrak{F}(\alpha+1, \beta+1, 2, x) + C(\alpha+1, \beta+1, 2) \ln x \cdot y_{01}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{11} = F(\alpha, \beta, 1, 1-x), \\ y_{12} = \mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, 1-x) - \ln(1-x) \cdot y_{11}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{\infty 1} = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right), \\ y_{\infty 2} = x^{-\beta} \mathfrak{F}\left(\alpha, \alpha+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right) + C(\alpha, \alpha+1, \alpha-\beta+1) \ln\left(\frac{1}{x}\right) \cdot y_{\infty 1}. \end{cases}$$

Entre ces intégrales particulières on trouve sans peine les relations

$$\begin{cases} y_{11} = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}\, y_{02}\,, \\ y_{12} = \Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\, y_{01} + \mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, 1)\, y_{02}\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{\infty 1} = \dfrac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha)}\, y_{01} + e^{\mp\pi i\alpha}\dfrac{\Gamma(\alpha-\beta+1)}{[\Gamma(1-\beta)]^2}\, y_{02}\,, \\ y_{\infty 2} = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\alpha-\beta)}\, y_{02}\,. \end{cases}$$

Comme dans la série $\mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, x)$

$$\gamma - \alpha - \beta = 1\,,$$

$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, 1)$ et $\mathfrak{F}'(\alpha, \beta, 1, 1)$ auront des valeurs finies, tandis que $\mathfrak{F}''(\alpha, \beta, 1, x)$ deviendra, pour $x = 1$, infini comme un logarithme.

La fonction $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, x)$ satisfait en ce cas à l'équation différentielle

$$x(1-x)\,\mathfrak{F}'' + (1-x)\,\mathfrak{F}' - \alpha\beta\,\mathfrak{F} = 2(1-x)\,F'(\alpha, \beta, 1, x)\,.$$

Dans cette équation, en faisant varier x de manière à la rapprocher de l'unité du côté des $x < 1$ en suivant l'axe réel, il vient

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, 1) = -\frac{2}{\alpha\beta}\lim_{x=1}(1-x)\,F'(\alpha, \beta, 1, x)\,.$$

Comme on a d'ailleurs

$$F'(\alpha, \beta, 1, x) = \alpha\beta\, F(\alpha+1, \beta+1, 2, x)\,,$$

où $\gamma - \alpha - \beta = 0$ pour la série $F(\alpha+1, \beta+1, 2, x)$, on trouve

$$\lim_{x=1}(1-x)\,F'(\alpha, \beta, 1, x) = 0$$

et

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta, 1, 1) = 0$$

pour $\alpha + \beta = 0$, c. q. f. d.

On saura dès à présent former d'une manière complète les relations entre les intégrales de l'équation (30) dans les conditions particulières dont il s'agit.

Remarquons encore que l'on pourra ramener quelquefois le nombre N de M. LINDELÖF à des transcendantes connues, en écrivant son terme général sous la forme

$$\frac{a+\beta+2n}{(a+n)(\beta+n)} - \frac{\gamma+2n+1}{(n+1)(\gamma+n)} = \frac{1}{a+n} + \frac{1}{\beta+n} - \frac{1}{\gamma+n} - \frac{1}{n+1}$$

Par exemple on trouve dans notre cas II ci-dessus:

$$N = 4 \ln 2 - 1\,,$$
$$N' = 4 \ln 2 - 2\,,$$

et dans le cas III:

$$N = 4 \ln 2 - \frac{5}{3}\,,$$

$$N' = 4 \ln 2 - \frac{19}{6}\,,$$

On pourrait tirer encore de là une forme modifiée des coefficients β_n et δ_n. (Comparer au cas IV).



ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXI. № 4.

UNDERSÖKNINGAR

ÖFVER

REAKTIONSHASTIGHETEN

VID

KUMARINBILDNINGEN.

AF

EDV. HJELT.

Kumarinerna äro laktoner och deras uppkomst ur motsvarande oxysyror, kumarinsyrorna, är således en laktonbildning. I anslutning till mina tidigare arbeten öfver denna process har jag äfven underkastat kumarinbildningen undersökning. Från de tidigare undersökta oxysyrorna skilja sig kumarinsyrorna deri, att de äro δ-oxysyror och att hydroxylen är bunden vid en benzolkärna, äfvensom deri att det för vattenafspjälkning gynsamma läget, cis-läget, här genom den dubbla bindningen är fixeradt. — De nu undersökta syrorna äro kumarinsyra samt metyl- och isopropylkumarinsyra.

För framställning af alkylkumarinerna har jag användt Perkins metod, nämligen kondensation af salicylaldehyd med ett vattenfritt salt af en syra i närvara af en fettsyreanhydrid. *Metylkumarin* erhölls vid användning af propionsyradt natrium och ättiksyreanhydrid i form af bladiga kristaller, hvilka hade kumarinlukt och smulto vid 84^0. *Isopropylkumarin* kunde icke erhållas med tillhjelp af ättiksyreanhydrid, ehuru olika temperaturer försöktes, utan bildade sig såsom hufvudprodukt kumarin. För dess framställning upphettades en mol. salicylaldehyd, en mol. valeriansyradt natrium och två mol. valeriansyreanhydrid under 12—18 timmar vid en temperatur af 180^0. Produkten renades såsom Perkin föreskrifvit. Det rena isopropylkumarinet kristalliserade ur alkohol i långa plattor, hvilka smulto vid 54^0. Mag. A. Plathan har å härvarande mineralogiska institut närmare undersökt kristallerna och meddelar derom följande:

„Kristallform monoklin.

Axelförhållande: a : b : c = 0,9165 : 1 : 0,3671.

$\beta = 75^0\ 30'$

Iakttagna former (Fig.):

m = (110); h = (210)
p = (011); b = (010)

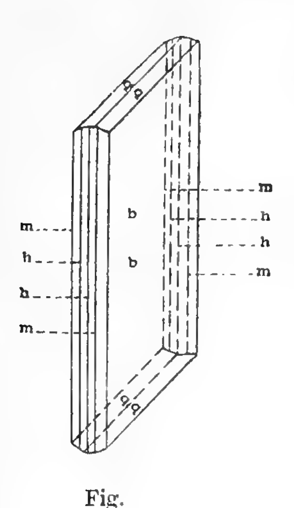


Fig.

Krystallerna tafvelformiga paralelt med symmetriplanet och något utdragna i c-axelns riktning.

Vinkeltabell.

	uppmätt:	beräknat:
m : m (110) : (1$\bar{1}$0)	= 83° 10′	
h : h (210) : (2$\bar{1}$0)	= 48° 14′	47° 52′
q : q (011) : (0$\bar{1}$1)	= 39° 8′	
m : q (110) : (011)	= 66° 57′	

Optiska axelplanet är vinkelrätt mot symmetriplanet.

Optiska elasticitatsaxeln 𝔞 sammanfaller med kristallaxeln b.

Optiska elasticitetsaxeln 𝔟 afviker 20° från c-axeln i trubbiga vinkeln β. — Dubbelbrytningen är måttlig".

Lösningarna bereddes på följande sätt: $\frac{1}{400}$ grammolekyl af kumarinet försattes med vatten och 50 cc $\frac{1}{10}$ norm. natriumhydratlösning samt uppvärmdes på vattenbad. Efter afsvalning till försökstemperaturen tillsattes 50 cc $\frac{1}{10}$ norm. klorvätesyra och utspäddes med vatten (allt af samma temperatur) till 250 cc, hvarigenom en lösning innehållande $\frac{1}{100}$ mol. pro lit. erhölls. Lösningen hölls uuder försökstiden i termostat vid konstant temperatur. Mängden förhandenvarande syra bestämdes genom titrering med $\frac{1}{50}$ norm. natriumhydrat. Ehuru titreringen utfördes med iskall lösning, kunde den dock icke göras med önskvärd skärpa. Till hvarje titrering uttogs 25 cc. Bestämningarna gjordes först vid + 25° och sedan vid + 3°, emedan processen i förra fallet fortskred alltför raskt. Vid försöken med metylkumarinsyra afskilde sig något metylkumarin. De vid + 3° erhållna resultaten voro följande:

Tab. I.

Kumarinsyra + 3°.

Tid i min.	Antal cc NaOH I	Antal cc NaOH II	% återst. syra I	% återst. syra II	$\frac{x}{A-x} \cdot \frac{1}{t}$ I	$\frac{x}{A-x} \cdot \frac{1}{t}$ II
0	12,5	10,65	100,0	85,2	—	—
10	10,5	9,45	84,0	75,6	0,0125	0,0127
20	9,01	8,75	72,8	70,0	0,0151	0,0109
30	8,6	—	68,8	—	0,0125	—
53	6,9	—	55,2	—	0,0108	—
60	—	6,25	—	50,0	—	0,0117
75	5,75	—	46,0	—	0,0139	—
110	—	4,8	—	38,4	—	0,0118
150	—	3,85	—	30,8	—	0,0118
180	2,95	—	23,6	—	0,0168	—
220	2,6	—	20,8	—	0,0138	—

Tab. II.

Metylkumarinsyra + 3°.

Tid i min.	Antal cc NaOH I	Antal cc NaOH II	% återst. syra I	% återst. syra II	$\frac{x}{A-x} \cdot \frac{1}{t}$ I	$\frac{x}{A-x} \cdot \frac{1}{t}$ II
0	12,5	12,5	100,0	100,0		
2	10,5	9,2	84,0	73,6		
12	—	4,4	—	35,2		0,1091
14	3,4	—	27,2	—	0,1742	
22	2,35	2,65	18,8	21,5	0,1755	0,1236
32	1,5	1,82	12,0	14,6	0,2000	0,1352
52	0,9	1,18	7,2	9,5	0,2089	0,1343
77	0,65	0,75	5,2	6,0	0,2205	0,1506
102	—	0,55	—	4,4	—	0,1595

Tab. III.

Isopropylkumarinsyra + 3°.

Tid i min.	Antal cc NaOH I	Antal cc NaOH II	% återst. syra I	% återst. syra II	$\frac{x}{A-x} \cdot \frac{1}{t}$ I	$\frac{x}{A-x} \cdot \frac{1}{t}$ II
0	12,5	12,5	100,0	100,0		
1	10,75	10,25	86,0	82,0		
3	9,55	9,05	76,4	72,4	0,1030	0,1271
5	8,75	8,85	70,0	70,8	0,0858	0,0825
10	7,65	7,05	61,2	56,4	0,0634	0,0773
15	6,88	6,40	55,0	51,2	0,0545	0,0635
30	4,9	4,45	38,1	35,6	0,0517	0,0603
60	2,85	2,50	22,8	20,0	0,0564	0,0666
100	1,85	1,75	14,8	14,0	0,0575	0,0614

Af försöken vid + 25° anföras endast de med kumarinsyra:

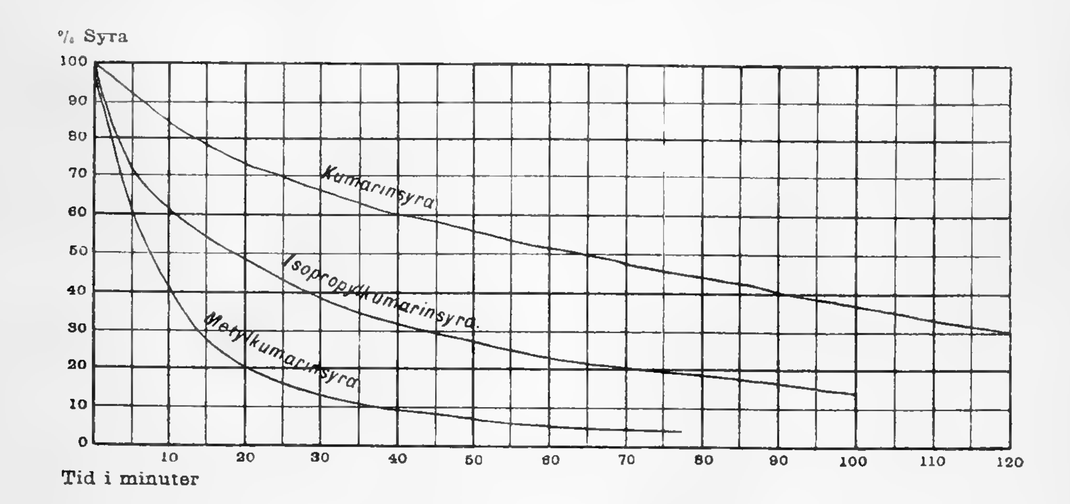
Tab. IV.

Kumarinsyra + 25°.

Tid i min.	Antal cc NaOH I	Antal cc NaOH II	% återst. syra I	% återst. syra II	$\frac{x}{A-x} \cdot \frac{1}{t}$ I	$\frac{x}{A-x} \cdot \frac{1}{t}$ II
	Titer	12,5 cc				
0	11,25	10,6	90,0	84,8		
4	9,2	8,7	73,6	70,0	0,0543	0,0552
10	6,95	6,55	55,6	52,4	0,0611	0,0618
20	4,85	4,7	38,8	37,6	0,0644	0,0628
30	3,3	3,4	26,4	27,2	0,0798	0,0708
50	—	2,15	—	17,2	—	0,0788
53	1,9	—	15,2	—	0,0869	—
75	1,3	—	10,4	—	0,1010	—
80	—	1,4	—	11,2	—	0,0821
110	0,8	—	6,4	—	0,118	—

Anmärkningsvärd är närmast den utomordentliga lätthet, hvarmed vattenafspjälkningen här äger rum. Reaktionen försiggår här, särskildt då hänsyn tages till den låga temperatur, vid hvilken processen följts, med ofantligt mycket större snabbhet än hos tidigare undersökta oxysyror. Härvid är tillika att märka, att δ-oxysyror, enligt hittills vunnen erfarenhet, visa betydligt mindre begär att öfvergå i laktoner än γ-oxysyror. Så öfvergår δ-oxykapronsyra mycket långsammare än γ-oxykapronsyra i lakton [1]), och melilotsyra, hvilken liksom kumarinsyra är en fenolsyra, förlorar vid vanlig temperatur alls icke vatten och gifver äfven vid längre kokning i vattenlösning endast en ringa mängd anhydrid [2]). Orsaken till den påfallande lätthet, hvarmed kumarinbildningen äger rum, måste ligga deri, att den för reaktionen gynsamma konfigurationen här genom den dubbla bindningen är fixerad. Som bekant anhydriseras äfven de tvåbasiska omättade cis-syrorna (t. ex. maleinsyra och de alkylsubstituerade maleinsyrorna) betydligt lättare än de motsvarande mättade syrorna [3]).

Ur försöken framgår vidare, att de substituerande alkylerna äfven här befordra vattenafspjälkningen liksom i tidigare undersökta fall. I hvilken grad detta sker, åskådliggöres genom nedanstående grafiska framställning af kumarinbildningens förlopp (vid + 3°).



Alkylernas roll vid anhydridbildningen beror på en invärkan på afstånd (Fernwirkung) och måste ligga deri, att de åstadkomma ett närmande i rummet

---

[1]) Fittig u. Wolff, Ann. d. Ch. 216,132 m. fl. [2]) Hochstetter, Dissert. Strassburg, 1884. S. 10. Jmf. äfven Fittig u. Hochstetter, Ann. d. Ch. 226,355. [3]) Jmf. Wislicenus, Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molecülen. S. 49. C. A. Bischoff, Handbuch der Stereochemie. S. 636.

af de med hvarandra reagerande grupperna. Detta kan antingen ske så, att de befordra inträdandet af cis-läget, eller att de drifva de nämda grupperna att närma sig hvarandra så, att en afvikelse från den regulära tetraederkonfigationen inträder. Om man utgår från de vid betraktande af modeller framträdande förhållandena, kunde man säga att närmandet kan ske antingen i horisontal eller vertikal riktning. Hos föreningar med enkelt bundna kolatomer, der en fri rotering kring de gemensamma valensaxlarna är möjlig, kan en invärkan i den förra riktningen äga rum. Hos kumarinsyrorna är en sådan emellertid utesluten och likaså hos de alkylsubstituerade maleinsyrorna, af hvilka som bekant de disubstituerade anhydriseras så lätt, att de alls icke existera såsom fria syror. Här måste närmandet antagas försiggå i den „vertikala“ riktningen. Ur försöken framgår den anmärkningsvärda omständigheten, att sekundär propyl här utöfvar jämförelsevis ringa inflytande under det denna radikal visar den största invärkan såväl vid de af mig tidigare undersökta fallen som vid oximidosyrornas anhydrisering [1]). Detta förhållande synes tyda derpå, att denna alkyl särskildt värkar i den riktning, att ett närmande till cisläget äger rum, hvarför dess influens i de fall, då detta läge är fixeradt, är jämförelsevis obetydlig.

[1]) Hantsch u. Miolati. Zeitschrift physik. Ch. XI. 737.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXI. № 5.

STRUCTUR- UND STEREOCHEMISCHE STUDIEN

IN DER

CAMPHERGRUPPE

VON

OSSIAN ASCHAN.

Die stereochemische Forschung steht jetzt im Vordergrunde der organisch-chemischen Fragen.

W. MEYERHOFFER [1]).

Vergleichende Studien über die für Campher und seine wichtigsten Derivate aufgestellten Structurformeln führten mich zu der Überzeugung, dass keine von ihnen den Thatsachen genügende Rechnung trägt. Es musste weiteres Material gesammelt werden, bevor man die Hoffnung, den molekularen Bau dieser wichtigen Verbindungen zu enträthseln, hegen konnte. Meinerseits suchte ich neue Beiträge zur Lösung der Frage hauptsächlich unter Anwendung einer der neuesten Forschungsrichtungen auf dem Gebiete der organischen Chemie, vermittelst stereochemischer Erwägungen, zu liefern. Die meisten in der vorliegenden Arbeit hervorgebrachten neuen Gesichtspunkte verdanke ich in der That dieser Forschungsmethode, obwohl jene, in Ermangelung eines befriedigenden Ausdruckes für die Structur der Campherverbindungen, meistens allgemeiner Natur sind.

Ich habe es nämlich vorgezogen, keine neuen Formeln für die Campherverbindungen aufzustellen, weil mir dieses, in Anbetracht der Vieldeutigkeit ihrer Umsetzungen, als eine zur Zeit durchaus undankbare Aufgabe erscheint. Ich bin der Ansicht, dass im Molekyle des Camphers und seiner Derivate irgend ein unerklärliches Moment, woran die Versuche zur Erklärung ihrer Constitution scheitern, vorhanden ist. Wie in der aromatischen Reihe die „Benzolfrage“ als ein durch das Experiment noch immer unaufgeklärtes Räthsel dasteht, scheint mir vorläufig die „Campherfrage“ kaum weniger schwer aufzuklären zu sein. In der Camphergruppe haben wir es wahrscheinlich mit einer bis jetzt nicht allgemeiner beobachteten, eigenthümlichen Labilität gewisser Kohlenstoffbindungen zu thun, die eine leichte Umlagerung des Kernes ermöglicht.

Über die Eintheilung und den Inhalt der vorliegenden Arbeit sei hier im Voraus Folgendes kurz angegeben.

Im theoretischen Theil werden zuerst alle bisher aufgestellten Formeln für Campher und sein wichtigstes Derivat, die Camphersäure, angeführt und kritisch behandelt. Der zweite Hauptabschnitt enthält die Resultate einer vergleichenden Untersuchung über

---

[1]) *Stereochemie.* Nach J. H. VAN'T HOFF: „Dix années dans l'histoire d'un théorie“. *1892.* S. 4.

die bekannten isomeren Camphersäuren, woraus als Hauptresultat hervorgeht, dass die Camphersäure zwei asymmetrische Kohlenstoffatome enthält. Hierauf weiterbauend, gehe ich im dritten Hauptabschnitt zur Betrachtung der Configurationsverhältnisse der wichtigsten Campherverbindungen über, woraus unter Anderm gewisse neue Gesichtspunkte betreffend der Stereochemie vielgliedriger Ringsysteme gewonnen werden. Im experimentellen Theil werden schliesslich die zugehörigen Versuche[1]), worauf die theoretische Darlegung fusst, kurz wiedergegeben.

Mit der Experimentaluntersuchung war ich seit Neujahr 1893 beschäftigt. Sie wurde, mit Ausnahme des während eines Sommeraufenthalts im Jahre 1894 im organischen Laboratorium des Herrn Geheimeraths Prof. Dr. Victor Meyer in Heidelberg ausgeführten Theiles, im hiesigen Universitätslaboratorium vorgenommen.

Helsingfors im Mai 1895.

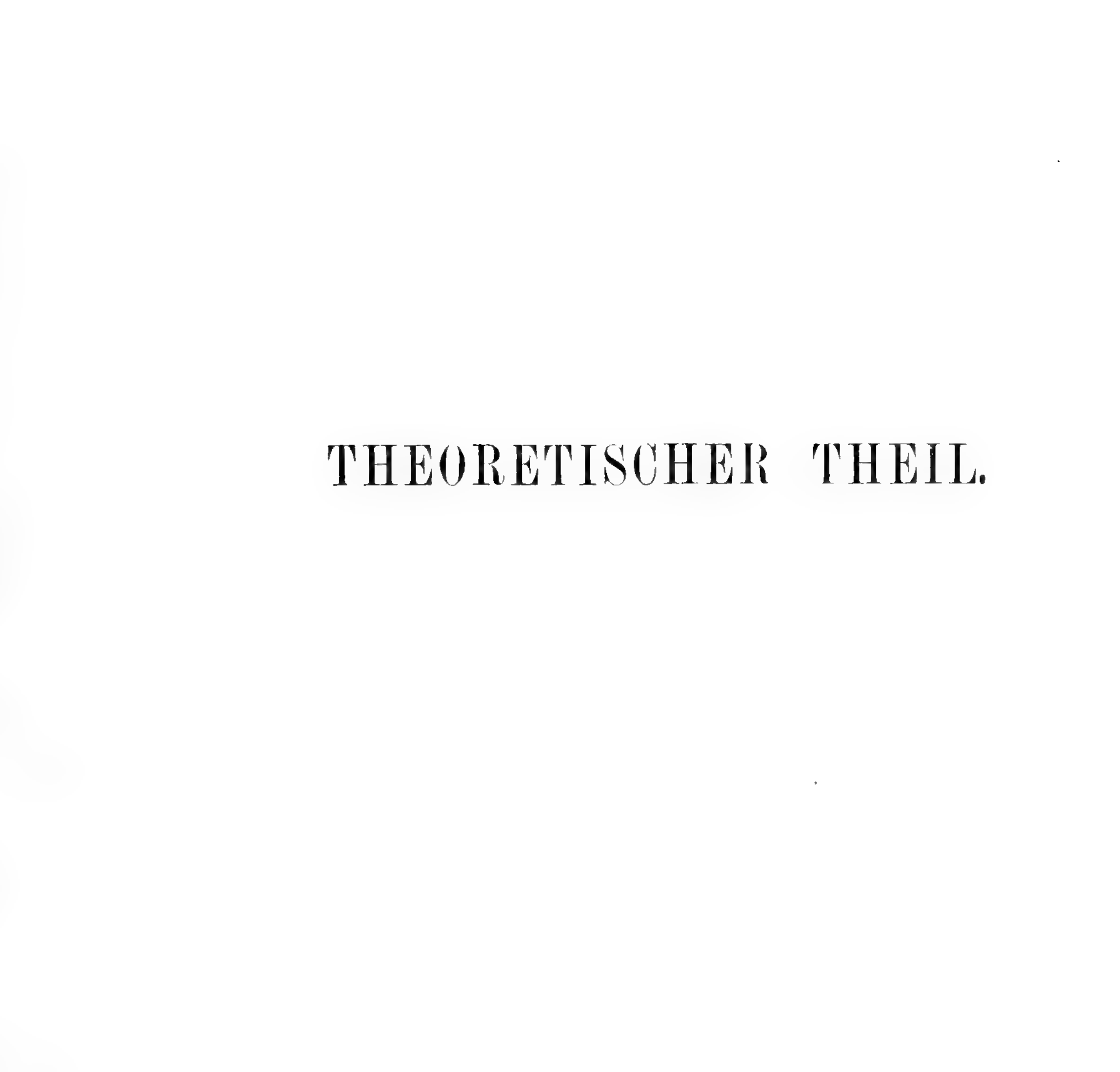
---

[1]) Kürzere, die Arbeit betreffende Mittheilungen sind zur Wahrung der Priorität in den *Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft 1893*, 1639; *1894*, 2001 und 2112 publicirt worden.

Inhalt.

Theoretischer Theil.

Experimenteller Theil.



THEORETISCHER THEIL.

I. Allgemeines über die Structur der wichtigsten Campherverbindungen.

Der als Räucherungs- und Arzneimittel angewandte s. g. gewöhnliche oder Japancampher gehört zu den am längsten bekannten organischen Verbindungen und wurde vielfach schon von Schriftstellern des Mittelalters erwähnt. Seit Ende des vorigen Jahrhunderts war derselbe Gegenstand chemischer Forschung. Unter den ältesten diesbezüglichen Arbeiten ist die von KOSEGARTEN [1]) im Jahre 1785 herausgegebene *„Dissertatio de Camphora et partibus qvæ eam constituunt“*, besonders hervorzuheben. Als der Genannte dem Campher seinen Phlogiston durch wiederholte Behandlung mit Salpetersäure zu entziehen versuchte, fand er, dass eine eigenthümliche Säure entstand, deren empirische Zusammensetzung durch die späteren Untersuchungen von MALAGUTI, LIEBIG und LAURENT zu $C_{10}H_{16}O_4$ festgestellt wurde. Seitdem wurde sowohl Campher, als dieses wichtige Derivat desselben, die Camphersäure, vielfach untersucht. Als dritter Hauptrepresentant der Campherverbindungen gesellte sich etwas später der dem Campher nahe verwandte vegetabilische Stoff Borneol.

Der Gegenstand hat an Interesse gewonnen, seitdem die nahen Beziehungen des Camphers zu einer anderen grossen, ebenfalls aus dem Pflanzenreiche stammenden Classe organischer Verbindungen, den Terpenen, festgestellt wurde. Einerseits wurde nachgewiesen, dass Campher unter dem Einfluss gewisser Reagenzien in Körper übergeht, die leicht aus gewissen Terpenen und terpenhaltigem Material entstehen. So bildet er, wie schon DUMAS fand, beim Erhitzen mit Phosphorpentoxid Cymol, Jod verwandelt ihn theilweise in Carv-

---

[1]) ROSCOE-SCHORLEMMER. Lehrb. der org. Chemie. IV, 1170.

acrol[1]) oder (1.4.2)-Methylisopropyloxybenzol. Ferner lassen andere Arbeiten [2]) es wahrscheinlich erscheinen, dass das aus Borneol durch Wasserabspaltung, oder aus Bornylchlorid durch Chlorwasserstoffentziehung entstehende s. g. Bornecamphen mit jenem Terpen, s. g. Terecamphen, identisch sei, der aus Pinenhydrochlorid bei der Einwirkung von Kaliumacetat und anderer fettsauren Salze, von Kaliumhydrat in alcoholischer Lösung u. s. w. erhalten wird. Die so erhaltenen Camphene sollen nämlich bei der Oxydation mit Platinschwartz [3]) oder Chromsäure [4]) in Campher übergehen. Diese Identität ist indess, beiläufig bemerkt, gar nicht als bewiesen anzusehen, wie die Arbeiten BRÜHL's [5]) zeigen; der genannte Forscher wies erhebliche Verschiedenheiten in den physicalischen Eigenschaften der aus Borneol und Pinen erhaltenen Kohlenwasserstoffe nach. Auch durch andere Arbeiten, wie die Untersuchung von MARSH und STOCKDALE [6]), welche ein inactives Borneol aus Pinenhydrochlorid erhielten, wurde die Zusammengehörigkeit der Campherverbindungen mit den Terpenen festgestellt.

Die Mehrzahl der Arbeiten über die Verbindungen der Camphergruppe sind ausgeführt worden, um die Structur des Camphers zu ermitteln. Dieses Bestreben hat zur Aufstellung mehrerer Formeln geführt, deren Anzahl fast beispiellos unter den organischen Verbindungen ist. Schon dieser Umstand lässt die Schwierigkeit der Aufgabe ahnen. Trotz der grossen Anzahl vorgeschlagener Campherformeln — ihre Zahl übersteigt schon bei weitem zwanzig —, kann, wie weiter unten gezeigt werden wird, zur Zeit noch behauptet werden, dass das ausschlaggebende Wort noch nicht ausgesprochen wurde. Der räthselhafte Bau der Campherverbindungen wartet noch seines Entdeckers.

Unter den Verbindungen der Camphergruppe nimmt die Camphersäure einen hervorragenden Raum ein, nicht nur der fast beispiellosen Leichtigkeit wegen, wodurch sie aus Campher entsteht, sondern auch deshalb, dass sie als Säure der chemischen Umsetzung leichter zugänglich ist. Ihre Wichtigkeit für Constitutionsbestimmungen wird dadurch besonders erhöht, dass sie sämmtliche in Campher vorkommenden C-Atome noch enthält und daraus durch eine

---

[1]) CLAUS, Journ. prakt. Chemie *25*, 266; SCHWEITZER, ebendaselbst *26*, 118; DELALANDE, ebendaselbst *38*, 342; 345.

[2]) Unter den wichtigeren seien erwähnt: BERTHELOT, Ann. der Chemie *Suppl. 2*, 226; RIBAN, Ann. chim. phys. (5), *6*, 353; KACHLER u. SPITZER, Ann. der Chemie *197*, 86; BOUCHARDAT u. LAFONT, Bull. soc. chim. *47*, 488; WALLACH, Ann. der Chemie, *230*, 269.

[3]) BERTHELOT, Ann. der Chemie *110*, 367.

[4]) RIBAN, Bull. Soc. chim. *24*, 19.

[5]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1892*, 169.

[6]) Journ. chem. Soc. *57*, 965.

einfache und leicht erklärliche Reaction entsteht, wovon mehrere Beispiele in der organischen Chemie bekannt sind. Der allgemein angenommenen Anschauung gemäss wäre die Bildung der Camphersäure folgendermassen aufzufassen:

$$C_8H_{14}<\begin{matrix}CH_2\\ |\\ CO\end{matrix} + O_3 = C_8H_{14}<\begin{matrix}COOH\\ \\ COOH\end{matrix}$$

Stellt man diesen Ausdruck als richtig hin, so ist die Structur des Camphers als festgestellt zu betrachten, sobald diejenige der Camphersäure vorliegt. Thatsächlich sind mehrere Campherformeln mit Bezugnahme auf das Verhalten der Camphersäure aufgestellt.

Aus diesem Grunde sind in der folgenden Zusammenstellung auch Rücksicht auf die Formeln der Camphersäure genommen.

Historik und Erläuterung der Structurformeln für Campher und Camphersäure.

Nach ihrem Alter eingereiht, sind diese Formeln die folgenden:

1. Die Formeln von V. Meyer:

$$\begin{matrix} & & C_3H_7 & & \\ & & | & & \\ H_2C & — & C = CH & & \\ | & & | & > & O \\ H_2C & — & C = CH & & \\ & & | & & \\ & & CH_3 & & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & & C_3H_7 \\ & & | \\ H_2C & — & C.COOH \\ | & & | \\ H_2C & — & C.COOH \\ & & | \\ & & CH_3 \end{matrix}$$

Campher — Camphersäure

wurden schon im Jahre 1870 aufgestellt[1]) und sind als die ältesten zu bezeichnen. Während diejenige des Camphers keine allgemeinere Anerkennung fand, insbesondere weil der Körper durch sie als Oxyd und nicht als Keton resp. dessen tautomere Form, als ungesättigter Alcohol, hervortritt, hat die Camphersäureformel von V. Meyer viele Vertheidiger gefunden. Sie wurde noch vor einigen Jahren als die wahrscheinlichste angenommen. Unter den

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellschaft. *1870*, 121.

Forschern, die sich besonders für ihre Richtigkeit ausgesprochen haben, sind zu erwähnen BALLO [1]), der auf Grund einer anderen Campherformel:

$$\begin{array}{ccccc} & & C_3H_7 & & \\ & & | & & \\ H_2C & — & C & = & C.OH \\ | & & | & & | \\ H_2C & — & C & = & CH \\ & & & & \\ & & CH_3 & & \end{array}$$

welche früher [2]) ebenfalls von V. MEYER in Betracht gezogen aber verworfen wurde, die Structur der Camphersäure in derselben Weise wie oben veranschaulichte. Weiter hat MENSCHUTKIN, in Folge seiner Arbeiten über das Esterificirungsvermögen der Camphersäure [3]), ihre Wahrscheinlichkeit angenommen. Später wurde ihre Richtigkeit von BAMBERGER [4]), und insbesondere von BRÜHL [5]), welcher Forscher eingehende chemische und spectrometrische Untersuchungen über dieselbe anstellte, vertheidigt. Schliesslich sind KANONNIKOW [6]) und BREDT [7]) als Vertreter derselben Auffassung zu nennen; sie stellten nämlich andere Formeln für Campher (siehe unten) auf, aus denen dieselbe Camphersäureformel in einfacher Weise hergeleitet werden konnte.

2. HLASIVETZ, der fast gleichzeitig mit V. MEYER seine Formeln aufstellte [8]), gab denselben folgenden Ausdruck:

$$\begin{array}{ccccc} & H_2C & — & CH_2 & \\ & & \diagdown\diagup & & \\ H_2C & — & C & — & CH_2 \\ | & & & & | \\ H_2C & — & C & — & CH_2 \\ & & \diagup\diagdown & & \\ & H_2C & & CH_2 & \\ & & \diagdown\diagup & & \\ & & O & & \\ & & \text{Campher} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & H_2C & — & CH_2 & \\ & & \diagdown\diagup & & \\ H_2C & — & C & — & CH_2 \\ | & & & & | \\ H_2C & — & C & — & CH_2 \\ & & \diagup\diagdown & & \\ & HOOC & — & COOH & \\ & | & & | & \\ & H & & H & \\ & & \text{Camphersäure} & & \end{array}$$

---

1) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1879*, 1597; *1881*, 335.
2) Ebendaselbst *1870*, 126.
3) Ebendaselbst *1881*, 2631.
4) Ebendaselbst *1890*, 218.
5) Ebendaselbst *1891*, 3403 und ff.
6) Журналъ русск. Физ.-Хим. Общ. *1883*, 469.
7) Ann. der Chemie. *226*, 261.
8) Berichte der der deutsch. chem. Gesellsch. *1870*, 544; *1871*, 383.

Keine von beiden Formeln hat den Beifall der Chemiker gefunden, und in der That lassen dieselben eine gewisse Willkürlichkeit nicht verkennen. Ich führe sie auch hauptsächlich der Vollständigkeit halber an.

3. Kachler hat sich als Dritter über die Constitution des Camphers ausgesprochen [1]). Er drückte seine Anschauung folgendermassen aus:

$$\begin{array}{l} H_2C - CH_2 - C(C_3H_7) \\ \;|\qquad\qquad\;\; | \qquad\quad > CO \\ H_2C - CH_2 - CH \;\; - \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} H_2C - CH_2 - CH.CH_2.CH_2.COOH \\ \;|\qquad\qquad\;\; | \\ H_2C - CH_2 - CH.COOH \end{array}$$

Campher — Camphersäure

Auch diese Formeln wurden nur von Wenigen als richtig anerkannt.

4. Auch die Camphersäureformel:

$$\begin{array}{ccc} & CH_3 & \\ & | & \\ & C.COOH & \\ & \diagup \quad \diagdown & \\ H_2C & & CH_2 \\ | & & | \quad COOH \\ H_2C & & C \lt \\ & \diagdown \quad \diagup & \quad CH_3 \\ & CH_2 & \end{array}$$

die Wreden 1872 aufstellte [2]), um den von ihm nachgewiesenen Übergang der Camphersäure in Tetra- und Hexahydro-m-xylol zu veranschaulichen, fand wenig Anklang.

5. Dagegen hat die Formel des Camphers und die entsprechende für Camphersäure, die von dem Erfinder der Benzoltheorie im Jahre 1873 aufgestellt wurden [3]), eine allgemeinere Anerkennung gefunden. Kekulé stellte sich den Campher als ein einfach ringförmiges, ungesättigtes Keton vor, wonach die Camphersäure als eine substituirte, ungesättigte Adipinsäure hervortritt:

---

[1]) Ann. der Chemie. *164*, 92; *169*, 185, 192.

[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1872*, 1106. Ann. der Chemie *169*, 193.

[3]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1873*, 931.

$$\begin{array}{ccccc} & C_3H_7 & & \\ & | & & \\ H_2C — & CH — & CH_2 \\ | & & | \\ HC = & C & — CO \\ & | & & \\ & CH_3 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & C_3H_7 & \\ & | & \\ H_2C — & CH.\,COOH & \\ | & & \\ HC = & C — COOH & \\ & | & \\ & CH_3 & \end{array}$$

Campher Camphersäure

Diese Anschauung hat sogar noch zur Zeit, hauptsächlich aus Mangel an einem sicher festgestellten Ausdruck für die genannten Körper, Vertreter unter den Chemikern.

6. Darauf folgte im Jahre 1875 die Formel von BLANSHARD[1]), welche nur den Campher betrifft:

$$\begin{array}{cccc} & C_3H_7 & & \\ & | & & \\ H_2C — & C & = C.\,CH_3 \\ | & & | \\ HOC = & CH — & CH_2 \end{array}$$

Wie ersichtlich, enthält diese Formel kein asymmetrisches Kohlenstoffatom.

7. Die Campherformel von BRUYLANTS[2])

$$\begin{array}{ccc} & C_3H_7 & \\ CH — & CH — & CH_2 \\ CH — & CH — & CO \\ & CH_3 & \end{array}$$

zeigt grosse Ähnlichkeit mit der KEKULÉ'schen und unterscheidet sich blos durch die Stellung der doppelten Bindung.

8. Die Campherformel von ARMSTRONG wurde zuerst im Jahre 1878 vorgeschlagen[3]), und zwar in folgender Gestalt:

---

[1]) Chem. News. *31*, 111.
[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1878*, 451.
[3]) Berichte der deutsch. Chem. Gesellsch. *1878*, 1698; *1879*, 1756.

$$
\begin{array}{l}
H_2C - CH_2 . CH . CH \\
\quad | \qquad\qquad\; | \quad\;\; | \;\; \searrow O \\
CH_3 . CH . CH_2 . C - CH \nearrow \\
\qquad\qquad\qquad\;\; | \\
\qquad\qquad\qquad CH_3
\end{array}
$$

Später wurde dieser Ausdruck, offenbar um ihn in Übereinstimmung mit der immer deutlicher hervortretenden Auffassung, dass der Campher ein Keton darstelle, zu bringen, umgeändert [1]); zugleich gab Armstrong auch seine Ansicht über die Structur der Camphersäure kund:

$$
\begin{array}{l}
H_2C - CH_2 - CH \; - \; CH_2 \\
\qquad\qquad\quad\;\; | \qquad\quad\; | \\
CH_3 . CH . CH_2 - C(CH_3) . CO
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
H_2C - CH_2 - CH . COOH \\
\qquad | \qquad\quad\;\; | \\
CH_3 . CH . CH_2 - C(CH_3) . COOH
\end{array}
$$

Campher — Camphersäure

9. Flavitzky [2]) stellt sich Campher als ein ungesättigtes aliphatisches Aldehyd vor, und zwar von folgender Constitution:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad CH_3 \\
\qquad\qquad\quad\;\; | \\
\begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array} \!\! > CH . CH . CH \\
\qquad\qquad\qquad\quad\, \| \\
CHO . CH : CH . CH
\end{array}
$$

10. Die Ballo'sche Campherformel:

$$
\begin{array}{l}
\qquad\; C_3H_7 \\
\qquad\quad | \\
H_2C - C = C . OH \\
\quad | \qquad\qquad | \\
H_2C - C = CH \\
\qquad\quad | \\
\qquad\; CH_3
\end{array}
$$

stellt [3]), wie schon hervorgehoben, einen von V. Meyer früher in Betracht gezogenen, aber verworfenen Ausdrück dar. Sie führt indess zu derselben Auffassung über die Structur der Camphersäure, die von V. Meyer ausge-

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1883,* 2260.

[2]) Журн. русск. Физ.-Хим. Общ. *1878,* 314.

[3]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1879*, 1597. Ann. der Chemie. *197*, 338.

sprochen wurde (siehe oben), nämlich dass sie eine Methylisopropyltetramethylendicarbonsäure darstellt [1]).

11. Auch die Campherformel von SCHIFF [2]):

$$\begin{array}{ccccc} & & C_3H_7 & & \\ & & | & & \\ HC & = & C & - & CH \\ | & & & & \| \\ H_2C & - & CH & - & C.OH \\ & & | & & \\ & & CH_3 & & \end{array}$$

zeigt eine gewisse Ähnlichkeit mit der KEKULÉ'schen Formel.

12. Die Formel von KANONNIKOW [3]) wurde im Jahre 1883, anlässlich seiner Untersuchungen über das Lichtbrechungsvermögen verschiedener organischer Körper, aufgestellt. Er formulirt die Zusammensetzung des Camphers folgendermassen:

$$\begin{array}{ccccc} & & C_3H_7 & & \\ & & | & & \\ H_2C & - & C & - & CO \\ | & & | & & | \\ H_2C & - & C & - & CH_2 \\ & & | & & \\ & & CH_3 & & \end{array}$$

Wie leicht ersichtlich, führt diese Auffassung KANONNIKOWS auch zu der V. MEYER'schen Camphersäureformel:

$$\begin{array}{ccc} & & C_3H_7 \\ & & | \\ H_2C & - & C.COOH \\ | & & | \\ H_2C & - & C.COOH \\ & & | \\ & & CH_3 \end{array}$$

13. Die erste Campherformel von BREDT [4]), im Jahre 1884 aufgestellt,

---

[1]) Siehe hierüber auch BALLO: Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1881,* 335.
[2]) Gaz. chim. ital. *1880,* 332.
[3]) Журналъ русск. Физ.-Хим. Общ. *1883,* 469. Journ. prakt. chem. *32,* 511.
[4]) Ann. der Chemie. *226,* 261.

gleicht der nächst vorangehenden insoweit, als nur die Carbonylgruppe eine andere Stellung einnimmt:

$$\begin{array}{ccccc} & & C_3H_7 & & \\ & & | & & \\ H_2C & — & C & — & CH_2 \\ | & & | & & | \\ H_2C & — & C & — & CO \\ & & | & & \\ & & CH_3 & & \end{array}$$

Bei der Oxydation liefert ein derart zusammengesetzter Körper ebenfalls eine Camphersäure mit der V. Meyer'schen Structurformel.

Die obige Campherformel wurde in der letzten Zeit von vielen Forschern, unter denen Wallach [1]), Beckmann [2]), Bamberger [3]), Brühl [4]) zu nennen sind, angenommen.

14. Die Formeln von Marsh für Campher und Camphersäure [5]) sind folgende:

$$\begin{array}{l} H_2C - CH_2 - CH - CH_2 \\ \quad | \qquad\qquad\quad | \qquad\qquad\quad > CO \\ H_2C - CH - CH - CH_2 \\ \qquad\quad | \\ \qquad\quad CH_3 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} H_2C - CH_2 - CH.COOH \\ \quad | \qquad\qquad\qquad | \\ H_2C - CH - CH.CH_2.COOH \\ \qquad\quad | \\ \qquad\quad CH_3 \end{array}$$

Hiernach wäre Campher als ein doppeltes Hexa-pentamethylenderivat, die Camphersäure als eine substituirte Hexamethylendicarbonsäure aufzufassen.

15. Nach der Camphersäureformel von Friedel [6]):

$$\begin{array}{ccccc} & & C_3H_7 & & \\ & & | & & \\ H_2C & — & CH & — & CH_2 \\ | & & & & | \\ H_2C & — & C(OH) & . & CO \\ & & | & & \\ & & COOH & & \end{array}$$

---

[1]) Ann. der Chemie. *230*, 269 und Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1891*, 1525.
[2]) Ebendaselbst *250*, 372.
[3]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1890*, 219.
[4]) Ebendaselbst. *1891*, 3403, Ff.
[5]) Chem. News. *1889*, 308 u. 309.
[6]) Compt. Rendus. 1891. *113*, 826.

wäre die erwähnte Säure als eine β-Keto-α-oxymonocarbonsäure des Hexamethylens anzusehen. Wie sich FRIEDEL die Constitution des Camphers vorstellt, geht aus seinen Erwägungen nicht hervor. Immerhin wurde die FRIEDEL'sche Formel einer, wie es scheint, berechtigten Kritik von BRÜHL [1]) und von HALLER [2]) unterworfen.

16. COLLIE kam [3]), nach einer ausführlichen Darlegung des Verhaltens des Camphers, der Camphersäure und der Camphene, zu folgender Auffassung für die Constitution der beiden erstgenannten Körper:

$$\begin{array}{ccccc} CH_3.CH & — & CH_2 & — & CH.CH_2 \\ | & & & & |\quad | \\ CO & — & CH_2 & — & CH.CH.CH_3 \end{array}$$

Campher

$$\begin{array}{ccccc} & & CH_3 & & \\ & & | & & \\ H_2C & — & CH & — & CH.COOH \\ | & & & & | \\ H_2C & — & CH_2 & — & C.COOH \\ & & & & | \\ & & & & CH_3 \end{array}$$

Camphersäure

Wie hieraus ersichtlich, würde das Camphermolekyl bei seinem Übergang in Camphersäure durchgreifend verändert. Die Interprätirung COLLIES fand bei WALKER [4]) Unterstützung; seiner Ansicht nach wären die Resultate, die er bei der galvanischen Zerlegung des sauren Camphersäuresters erhielt, am Besten mit dieser Formel vereinbar.

17. In einer längeren Darlegung über die Körper der Camphergruppe stellte ODDO [5]) folgende neuen Formeln für Campher und Camphersäure auf:

$$\begin{array}{lcr} & CH_2 — CH.CH_2 — & \\ H_2C\langle & \qquad | \; CH_2 \; | & \rangle CO \\ & CH_2 — CH.CH(CH_3) & \end{array}$$

Campher

$$\begin{array}{lcr} & CH_2.CH.CH_2.COOH & \\ H_2C\langle & & \rangle CH_2 \\ & CH_2.CH.CH_2.COOH & \end{array}$$

Camphersäure

Auch aus diesen Formeln, wie aus denjenigen von COLLIE (siehe oben), lässt sich die Bildung der Camphersäure, unter einfacher Aufspaltung des einen Kernringes an der Ketonstelle, nicht erklären.

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1892*, 1788.
[2]) Compt. Rendus. 1892. *114*, 1516.
[3]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1892*, 1114.
[4]) Ebendaselbst. *1893*, 461.
[5]) Gazetta chim. ital. *1892; 21* (2), 505, 560. Chem. Centr. bl. *1892;* I, 534.

18. Die folgenden Formeln für Campher und Camphersäure

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH_3 & \\
 & CH & \\
 & | & >CO \\
 & C & \\
H_2C & & CH_2 \\
| & & | \\
H_2C & & CH_2 \\
 & CH & \\
 & | & \\
 & CH_3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & CH_3\,COOH & \\
 & CH & \\
 & | & \\
 & CH & \\
H_2C & & CH_2 \\
| & & | \\
H_2C & & CH_2 \\
 & CH & \\
 & | & \\
 & COOH &
\end{array}
$$

sollen von Errera in seinem „Lezioni s. Polarimetria", S. 131, aufgestellt worden sein [1]. Leider ist mir diese Arbeit nicht zugänglich gewesen.

19. Die folgende Campherformel:

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH_3 & \\
 & | & \\
 & CH & \\
HC & & CO \\
| & & | \\
H_2C & & CH \\
 & CH & \\
 & | & \\
 & C_3H_7 &
\end{array}
$$

ist zweimal, bei der Besprechung der Campherverbindungen, in der Litteratur erwähnt worden, ohne dass angegeben wird, wer der Autor desselben sei, nämlich von Bouveault [2] und von Cazeneuve [3]. Es war mir bisher unmöglich, der Originalquelle für dieselbe auf die Spur zu kommen.

20. Im Jahre 1892 führt Cazeneuve [4] eine ursprünglich von Haller vorgeschlagene Formel für Campher an:

---

1) Handbuch der Stereochemie von Bischoff-Walden. 1893. S. 371.
2) Bulletin soc. chim. [3]. VII (1892). 528.
3) Ebendaselbst [3]. IX (1893). 31. 44.
4) Ebendaselbst [3]. IX (1893). 31, 44; Comptes rendus *115* (1892). 1315.

$$\begin{array}{ccccc} & & CH_3 & & \\ & & | & & \\ H_2C & - & CH & - & CO \\ | & & & & | \\ HC & = & C & - & CH_2 \\ & & | & & \\ & & C_3H_7 & & \end{array}$$

die er als Grundlage für seine Betrachtungen über die Structur gewisser Campherderivate benutzt.

21. Die Formel von ÉTARD [1]) bezieht sich auch nur auf Campher und hat folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{cccccc} & & CH_3 & & & \\ & & | & & & \\ H_2C & - & C & - & CH & \diagdown \\ | & & | & & | & \quad O \\ H_2C & - & C & - & CH & \diagup \\ & & | & & & \\ & & C_3H_7 & & & \end{array}$$

Sie stellt, wie ersichtlich, ein Oxyd dar.

22. Die neuen Formeln von BREDT für Campher und Camphersäure wurden aufgestellt [2]) auf Grund neuerer Beobachtungen über die Oxydationsproducte der Camphersäure, die, wie weiter unten gezeigt wird, theils von ihm selbst, theils von anderen Forschern gemacht worden waren. Nach einer ausführlichen Motivirung nimmt BREDT als die wahrscheinlichste Constitution der beiden Körper folgende an, nach welcher sämmtliche genauer studirten Umsetzungen derselben aufgeklärt werden sollen:

$$\begin{array}{ccccc} H_2C & - & CH & - & CH_2 \\ | & & | & & | \\ | & CH_3 . & C & . CH_3 & | \\ | & & | & & | \\ H_2C & - & C & - & CO \\ & & | & & \\ & & CH_3 & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} H_2C & - & CH.COOH & \\ | & & | & \\ | & CH_3 . & C . CH_3 & \\ | & & | & \\ H_2C & - & C & - COOH \\ & & | & \\ & & CH_3 & \end{array}$$

Campher — Camphersäure

---

[1]) Comptes rendus *116* (1893). 436; 1137.

[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1893*, 3047.

23. Schon früher[1]) hatte Bouveault der Constitution des Camphers folgenden Ausdrück verliehen:

$$\begin{array}{ccccc} & & CH_3 & & \\ & & | & & \\ & & C & & \\ & / & | & \backslash & \\ H_2C & & CO & & CH_2 \\ | & & | & & | \\ H_2C & & CH_2 & & CH.CH_3 \\ & \backslash & | & / & \\ & & CH & & \end{array}$$

In der jüngsten Zeit[2]) wurde nun diese Formel, welcher er auch eine entsprechende Camphersäureformel zufügte, in folgende umgewandelt:

$$\begin{array}{ccccc} & & CH_3 & & \\ & & | & & \\ & & C & & \\ & / & | & \backslash & \\ H_2C & & CO & & CH.CH_3 \\ | & & | & & | \\ H_2C & & CH_2 & & CH_2 \\ & \backslash & | & / & \\ & & CH & & \end{array}$$

Campher

$$\begin{array}{ccccc} CH_3 & & & & COOH \\ & \backslash & & / & \\ & & C & & \\ & / & & \backslash & \\ H_2C & & & & CH.CH_3 \\ | & & & & | \\ H_2C & & & & CH_2 \\ & \backslash & & / & \\ & & C & & \\ & / & & \backslash & \\ H & & & & COOH \end{array}$$

Camphersäure

Wie ersichtlich, unterscheiden sich die beiden Campherformeln blos durch die Stellung der einen Methylgruppe. Die Camphersäure tritt dagegen als (1.2)-dimethylirte Hexahydroterephtalsäure auf.

24. In vorigem Jahre hat weiter Gillet[3]) die Formel:

$$\begin{array}{ccccc} CH_3 & & CH_2.CO & & \\ & >C< & & >C.CH_3 & \\ CH_3 & & CH_2.C & & \\ & & | & & \\ & & CH_3 & & \end{array}$$

---

[1]) Bull. Soc. Chim. (3) VII, 527.
[2]) Ebendaselbst (3) XI, 134.
[3]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1894*. Ref. 340.

für Campher vorgeschlagen, sich darauf stützend, dass er bei der Condensation von 2 Mol. Aceton mit 1 Mol. Methylaceton eine Campher-ähnliche Substanz erhielt. Diese Constitution soll nach ihm „sehr wohl das chemische Verhalten desselben erklären".

25. In der allerletzten Zeit hat schliesslich Tiemann [1]), auf Grund seiner Untersuchungen in der Camphergruppe, folgende Formeln aufgestellt:

$$\begin{array}{ccccc} (CH_3)_2C & - & CH & - & CH_2 \\ | & & | & & | \\ | & & CH_2 & & | \\ | & & | & & | \\ CH_3.CH & - & CH & - & CO \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (CH_3)_2C & - & CH.COOH \\ | & & | \\ | & & CH_2 \\ | & & | \\ CH_3.CH & - & CH.COOH \end{array}$$

Campher Camphersäure

hauptsächlich um die Bildung zweier, seiner Ansicht nach structurisomeren Campholensäuren zu erklären. Nach Behal [2]) sollen dieselben doch stereoisomer sein, was Tiemann (l. c.) zurückweist.

Kritik der Formeln.

Bei der Durchmusterung der oben angegeben Formeln bemerkt man gleich, dass viele nur einzelne Umwandlungen der betreffenden Körper berücksichtigen, und weiter, dass mehrere Forscher bei der Aufstellung ihrer Formeln allzu grosses Gewicht auf diejenigen Zersetzungen des Camphers, die bei höherer Temperatur und unter Eingriff kräftig wirkender Reagenzien verlaufen, gelegt haben, speciell darauf, dass Campher und sein wichtigstes Derivat, Camphersäure, Kohlenwasserstoffe der Benzolreihe resp. ihrer Derivate, oder aber theilweise resp. vollständig hydrirte Abkömlinge desselben bilden.

Dass das Molekyl des Camphers bei derartigen Reactionen tiefgreifenden Zersetzungen unterliegt, und dass die ursprünglichen Lagerungsverhältnisse seiner Kohlenstoffkette keineswegs beibehalten werden müssen, geht schon hervor aus der Mannigfaltigkeit der Producte, die vielfach bei höherer Temperatur entstehen. So haben Fittig, Köbrich und Jilke nachgewiesen [3]), dass Campher beim Erhitzen mit Chlorzink in Cymol, Benzol, Toluol, Xylol, Pseudocumol

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1895*, 1087.
[2]) Comptes rendus. *1895*, Heft. 17 (vom 29 April).
[3]) Ann. der Chemie. *145*, 29.

und Laurol zersetzt wird. Eine ähnliche, vieldeutige Zersetzung tritt bei der Einwirkung von Jod auf Campher ein, indem Cymol, Carvacrol, Laurol und andere nicht untersuchte Körper entstehen, wie Armstrong und Easkell zeigten [1]). Auch anscheinend in einer bestimmten Richtung verlaufenden Reactionen, wie die längst bekannte Verwandlung des Camphers in Cymol durch Erhitzung mit Phosphorpentoxid, können keineswegs unbedingtes Vertrauen und grundlegende Bedeutung bei Constitutionsbestimmungen geschenkt werden, obwohl eine Reaction, wie die genannte, immerhin nebenbei berücksichtigt werden muss. Es ist nämlich die Wasserentziehung durch P_2O_5 aus einem compl. Keton bei höherer Temperatur eine viel zu durchgreifende Reaction, um zu den kontrollirbaren zu gehören.

Diese Beispiele zeigen zur Genüge, wie wenig geeignet derartige Reactionen als Grundlage für rückschlüssige Speculationen über die Lagerung der Atome in der ursprünglichen Verbindung sind. Nur eingehende Untersuchungen über die Spaltungsproducte des Camphers, resp. die der Camphersäure, welche bei niedriger Temperatur und durch wirklich controllirbare Reactionen entstehen, können zum Ziele führen.

In dieser Hinsicht haben die letzten Jahre einige Arbeiten gebracht, von denen behauptet werden muss, dass sie die Chemie des Camphers wirklich gefördert haben. Da dieselben die im Folgenden geführte Discussion über die Campher- resp. Camphersäureformeln bedeutend erleichtern, mögen sie hier im voraus etwas ausführlicher besprochen werden.

Zunächst sind die Arbeiten Brühls [2]) zu erwähnen, in denen der Nachweis geführt wird, dass Campher und Camphersäure gesättigte Verbindungen sind, deren Kern eine ringförmige Anordnung besitzt; sie sind demnach alicyklische Körper, was wohl früher angenommen aber keineswegs bewiesen war. Brühl zeigte dass das Lichtbrechungsvermögen nur mit dieser Anschauung vereinbar ist, indem er verschiedene Derivate des Camphers und der Camphersäure in dieser Hinsicht untersuchte. Ferner wies er nach, dass die Ester der Camphersäure kein Brom additionell aufnehmen, wodurch die früheren Angaben von Wreden [3]) in Betreff der Additions-fähigkeit der Camphersäure und ihres Anhydrides als irrig erkannt wurden.

Koenigs hat seinerseits werthvolle Beiträge zur Structurlehre des Camphers geliefert. Die Untersuchung der bei der Einwirkung von concentrirter

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1878*, 151.
[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1891*, 3403 u. 3731; *1892*, 1788.
[3]) Ann. der Chemie. *163*, 330.

Schwefelsäure auf Camphersäure entstehenden Sulfocamphylsäure $C_9H_{16}SO_6$ hat ergeben [1]), dass sie durch Oxydation mit Salpetersäure in eine dreibasische Säure $C_7H_{12}SO_7$ übergeht, die als Sulfoisopropylbernsteinsäure aufgefasst wurde, weil sie bei der trocknen Destillation Terebinsäure liefert:

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C(SO_3H) - CH(COOH) . CH_2 . COOH = \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} > C . CH(COOH) . CH_2 . CO + SO_2 + H_2O$$
$$\text{(im zweiten Glied: } C \text{ - - - - - - } O \text{ verbunden)}$$

Zugleich entsteht bei der Oxydation in geringer Menge Dimethylmalonsäure. Hierdurch wurde schon ziemlich wahrscheinlich gemacht, dass die Camphersäure die Atomgruppe

$$\begin{matrix} C \\ C \end{matrix} > C < \begin{matrix} C \\ C \end{matrix}$$

welche in jener vorkommt, enthält. In einer gleich darauf publicirten Arbeit hat KOENIGS [2]) weiter nachgewiesen, dass Trimethylbernsteinsäure unter den Producten der Oxydation der Camphersäure mit Chromsäure zu finden sei, Gleichzeitig entstehen in grösserer Menge Camphoronsäure und wenig einer bei 220—222° unter Gasentwickelung schmelzenden Säure, die nicht weiter untersucht wurde.

Fast gleichzeitig zeigte BREDT [3]), dass Trimethylbernsteinsäure auch bei trockner Destillation der Camphoronsäure als Hauptproduct entsteht. Weil seine Entstehung aus dieser bei höherer Temperatur und unter Abscheidung von Kohlenstoff, die auf eine Zersetzung tiefgreifender Natur zurückgeführt werden kann, stattfindet, ist dieser Nachweis bei weitem nicht von derselben Wichtigkeit, wie der von KOENIGS, gilt aber, im Lichte der Beobachtungen des Letzgenannten, als Bestätigung derselben.

Bei der Zersetzung der Camphoronsäure durch die Wärme hat BREDT ausserdem die Entstehung von Isobuttersäure und Kohlendioxyd nachgewiesen. Hierauf fussend, stellt er folgende Formel für Camphoronsäure auf:

---

[1]) KOENIGS und HOERLIN. Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1893*, 811; 2044.
[2]) Ebendaselbst *1893*, 2337.
[3]) Ebendaselbst *1893*, 3048.

$$2\ \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_3 \end{array}\!\!>\!\begin{array}{l} C.COOH \\ \;| \\ CH_3.C.COOH \\ \qquad | \\ \qquad CH_2.COOH \end{array} = 2\,(CH_3)_2.CH.COOH + \begin{array}{l} (CH_3)_2C.COOH \\ \qquad | \\ CH_3.CH.COOH \end{array} + 2\,CO_2 + C$$

Betreffend dieser Formel für Camphoronsäure, die ebenfalls für die spätere Darlegung einiges Interesse darbietet, ist hervorzuheben, das bis jetzt kein berechtigter Einwand gegen sie erhoben worden ist.

Durch die Arbeiten von Koenigs und Bredt ist aber die wichtige Thatsache mit Sicherheit festgestellt, dass die Camphersäure, da sie einerseits Dimethylmalonsäure durch Oxydation der daraus entstehenden Sulfocamphylsäure liefert, andererseits bei directer Oxydation resp. durch trockne Destillation der intermediär gebildeten Camphoronsäure, Trimethylbernsteinsäure giebt, die Atomgruppe

$$\begin{array}{rcccc} (1) & & & C & \\ & & & | & \\ (2) & C & - & C & - \; C \\ & & & | & \\ (3) & C & - & C & - \; C \end{array}$$

enthält. Da Camphersäure, wie oben (S. 5) dargelegt, aus Campher durch eine einfache Spaltung an der Ketonstelle entsteht, muss die ebenerwähnte Atomgruppe auch im Molekyle des letzgenannten Körpers vorhanden sein. Dagegen kann ich mich der von Bredt[1]) und auch von Koenigs[2]) ausgesprochenen Ansicht, dass alle von den oben mit 1, 2, 3 bezeichneten Kohlenstoffatomen auch in den ursprünglichen Verbindungen vollständig mit Wasserstoff gesättigt wären und demnach Methylgruppen darstellen sollten, nicht unbedingt anschliessen. Denn es ist keineswegs ausgeschlossen, dass Methylgruppen unter Umständen, bei Sprengung einer Kohlenstoffkette unter Oxydation oder bei trockner Destillation, in speciellen Fällen *entstehen* können.

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellschaft. *1893*, 3051.
[2]) Ebendaselbst *1893*, 2337.

Fasst man das Thatsächliche, was über die Constitution der beiden genannten Körper bekannt, zusammen, kann man es durch die folgenden vier Sätze in aller Kürze ausdrücken:

I. *Der Campher stellt ein Keton* $C_8H_{14}\left<\begin{array}{l}CH_2\\ |\\ CO\end{array}\right.$ *dar, das in einzelnen Fällen in der tautomeren Hydroxylform* $C_8H_{14}\left<\begin{array}{l}CH\\ \|\\ COH\end{array}\right.$ *auftreten kann.*

II. *Die Camphersäure stellt eine Dicarbonsäure* $C_8H_{14}\left<\begin{array}{l}COOH\\ COOH\end{array}\right.$ *dar.*

III. *Campher und Camphersäure sind gesättigte Polymethylenverbindungen* (der Campher mit Ausnahme der Fälle, worin er in der enolisirten [1]) Form auftritt).

IV. *Campher und Camphersäure enthalten das Kohlenstoffgebilde*

$$\begin{array}{l}(1)\ \ \ \ \ \ \ \ \ C\\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ |\\ (2)\ C - C - C\\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ |\\ (3)\ C - C - C\end{array}$$

worin allem Anscheine nach die Atome 1, 2, 3 theilweise oder vollständig mit Wasserstoff beladen sind.

Die obigen Sätze enthalten nach meiner Ansicht dasjenige, was zur Zeit als sicher befestigte Grundlage zur Feststellung der Constitution des Camphers dienen kann. Mit Hülfe derselben kann zunächst die Anwendbarkeit der angeführten Formeln in Betracht gezogen werden.

Nach I sind die Campherformeln 1) von V. MEYER, 2) von HLASIVETZ, 8) die ältere von ARMSTRONG, 9) die von FLAVITZKY und 21) die von ÉTARD, nach II die Camphersäureformeln 2) von HLASIVETZ und 15) von FRIEDEL auszuschliessen.

Nach dem Satz III kommen nicht in Betracht die Campherformeln 1) von V. MEYER, 5) von KEKULÉ, 6) von BLANSHARD, 7) von BRUYLANTS, 9) von FLAVITZKY, 10) von BALLO, 11) von SCHIFF, 20) von HALLER-CAZENEUVE, und 24) von GILLET, sowie die Camphersäureformel 5) von KEKULÉ.

---

[1]) Vergl. hierüber J. W. BRÜHL Journ. f. prakt. Chemie *50* (1894), 123.

Schliesslich ist der Satz IV nicht vereinbar mit den Campherformeln 2) von Hlasivetz, 3) von Kachler, 5) von Kekulé, 6) von Blanshard, 7) von Bruylants, 9) von Flavitzky, 10) von Ballo, 11) von Schiff, 14) von Marsh, 16) von Collie, 17) von Oddo, 18) von Errera, die mit 19) bezeichnete Formel, 20) die von Haller-Cazeneuve, 23) die ältere Formel von Bouveault, 24) die von Gillet, sowie die Camphersäureformeln 2) von Hlasivetz, 3) von Kachler, 4) von Wreden, 5) von Kekulé, 14) von Marsh, 15) von Friedel, 17) von Oddo und 18) von Errera.

Folgende Formeln bleiben dagegen bei dieser Musterung zurück, nämlich: 1) Die Camphersäureformel von V. Meyer, die damit zusammenhängenden Campherformeln 12) von Kanonnikow und 13) von Bredt (die ältere), 8) die von Armstrong später aufgestellten, 22) Bredts und 23) Bouveaults neuere, sowie 25) Tiemanns Formeln für Campher und Camphersäure; hierzu kommt schliesslich die Camphersäureformel 16) von Collie. Es wird nun ferner untersucht, ob diese Formeln eine eingehendere Prüfung bei Berücksichtigung weiterer Erfahrungen bestehen. Der Einfachkeit wegen sollen nur die Formeln der Camphersäure der Discussion unterzogen werden.

1. Die Formel von V. Meyer.

Was zunächst die Formel von V. Meyer betrifft, so wurde schon in der obigen kurzen Historik erwähnt, dass dieselbe viel Unterstützung von den Chemikern gefunden hat und bis auf die letzte Zeit von den Meisten, die die Camphergruppe eingehender studirt hatten, angenommen wurde. Erst das Auffinden der Trimethylbernsteinsäure als Oxydationsproduct der Camphersäure hat ihre Richtigkeit weniger plausibel gemacht. Die Bildung des in jener Säure vorkommenden Kohlenstoffkernes

```
      C
      |
C — C — C
      |
C — C — C
```

kann, wie aus der nachstehenden ausführlicheren Formel der Camphersäure ersichtlich:

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH_3CH_3 & \\
 & \diagdown\!\diagup & \\
 & CH & \\
 & | & \\
H_2C - & C - & COOH \\
| & | & \\
H_2C - & C - & COOH \\
 & | & \\
 & CH_3 &
\end{array}
$$

in vielerlei Weise gedacht werden; doch lässt sie sich in keinem Falle ganz ungezwungen herleiten. Das Einfachste wäre wohl anzunehmen, dass die in den folgenden Formel *kursiv* gedruckten Kohlenstoffatome bei der Bildung der Trimethylbernsteinsäure theilnähmen:

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH_3CH_3 & \\
 & \diagdown\!\diagup & \\
 & CH & \\
 & | & \\
\mathbf{C}H_2 - & \mathbf{C} - & \mathbf{C}OOH \\
| & | & \\
\mathbf{C}H_2 - & \mathbf{C} - & \mathbf{C}OOH \\
 & | & \\
 & \mathbf{C}H_3 &
\end{array}
$$

Hiernach würden sich die Methylengruppen des Ringes in Methyle verwandeln. Dies erscheint ziemlich unwahrscheinlich, weil die betreffenden Kohlenstoffatome an einander gebunden waren, wobei sich, bei einer eventuellen Oxydation, der Sauerstoff aller Erfahrung nach wenigstens an eins der beiden Kohlenstoffatome anlagern müsste. Hier wäre dagegen eine einfache Spaltung, und dazu noch unter Wasserstoffaufnahme, anzunehmen, was unmöglich wäre. Eine andere Möglichkeit würde die Annahme bieten, dass die in folgender Formel kursivirten Atome des Kernes bei der Entstehung der Trimethylbernsteinsäure betheiligten:

$$
\begin{array}{ccc}
 & CH_3CH_3 & \\
 & \diagdown\!\diagup & \\
 & \mathbf{C}H & \\
 & | & \\
\mathbf{C}H_2 - & \mathbf{C} . & \mathbf{C}OOH \\
| & | & \\
CH_2 - & \mathbf{C} . & \mathbf{C}OOH \\
 & | & \\
 & \mathbf{C}H_3 &
\end{array}
$$

dass also die beiden Methyle der Isopropylgruppe wegoxydirt würden und ebenso die untere Methylengruppe. Diese Annahme ist aber deshalb sehr wenig wahrscheinlich, weil, bei einer event. Oxydation der Isopropylgruppe, die Einwirkung mit einer Hydroxylirung des Methinwasserstoffs beginnen müsste, wobei der genannte Alkyl entweder als Aceton abgespalten, oder aber die Methingruppe zu einem Carboxyl würde. Andere Combinationen sind, wie gesagt, auch möglich, aber *durch keine lässt sich die Entstehung der Trimethylbernsteinsäure,* nach den jetzigen Erfahrungen über den Verlauf einer durch Oxydation hervorgerufen Spaltung, *ungezwungen erklären.* Weiter lässt sich Folgendes gegen diese Formel einwenden.

Sie enthält zwei asymmetrische Kohlenstoffatome. Bei der Bromirung der Camphersäure gelangt man, wie bekannt, zu dem Bromcamphersäureanhydrid. Diesem Körper würde, unter Annahme der Formel von V. Meyer, die folgende Constitution[1]) zukommen:

$$\begin{array}{ccl} & C_3H_7 & \\ & | & \\ CHBr\,. & C\,.\,CO & \\ | & | & >O \\ CH_2 \;— & C\,.\,CO & \\ & | & \\ & CH_3 & \end{array}$$

Der Eintritt des Bromatomes müsste, wie leicht zu ersehen ist, eine weitere Asymmetrie des betreffenden Kohlenstoffs erzeugen, die sich durch Bildung zweier geometrisch isomerer Bromanhydride kund geben würde. Indess erhält man nur ein einziges Bromderivat, das gewöhnliche Bromcamphersäureanhydrid. Entscheidend ist dieser Umstand doch nicht.

Die V. Meyer'sche Camphersäureformel wäre somit mit den bekannten Thatsachen nicht gut vereinbar. Dasselbe gilt mutatis mutandis auch für die entsprechenden Campherformeln.

2. Armstrongs (spätere) Formel.

Die Formeln für Campher und Camphersäure von Armstrong:

---

[1]) Vergl. hierüber: R. Reyher. Inaug. Diss. Leipzig 1891. Ss. 64, 65.

$$\begin{array}{ccc} & CH_2 & \\ H_2C & & CH - CH_2 \\ | & & | \qquad | \\ CH_3.HC & & C(CH_3).CO \\ & CH_2 & \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} & CH_2 & \\ H_2C & & CH.COOH \\ | & & | \\ CH_3.HC & & C(CH_3).COOH \\ & CH_2 & \end{array}$$

sind aufgestellt worden, um die bei höherer Temperatur geschehenden Umwandlungen des Camphers und seiner Derivate in Benzol- resp. Hexamethylenverbindungen zu erklären. So wird die von WREDEN [1]) zuerst beobachtete Bildung von Tetra- und Hexahydro-m-xylol, bei der Einwirkung von Jodwasserstoffsäure auf die Camphersäure, durch diese Formeln ziemlich ungezwungen veranschauligt. Die Angaben des genannten Forschers wurden später durch WALLACH [2]) bestätigt, durch den Nachweis, dass hierbei als Hauptproduct ein Kohlenwasserstoff C_8H_{16} entsteht, der unter Einwirkung von Salpeter-Schwefelsäure in Trinitro-m-xylol übergeht.

Was nun die Mögligkeit einer Bildung von Trimethylbernsteinsäure aus einer nach der obigen Formel gebauten Camphersäure betrifft, so ist wohl die Möglichkeit vorhanden, dass kleine Mengen des Bernsteinsäureabkömmlings unter Abtrennung der links in der Formel stehenden Gruppe

$$\begin{array}{c} H_2C / \\ | \\ CH_3.HC \backslash \end{array}$$

entstehen könnten. Allein gegen die Camphersäureformel von ARMSTRONG lässt sich der Einwand erheben, dass sie die Camphoronsäure nach der neuesten Formel von BREDT

$$\begin{array}{l} (CH_3)_2C.COOH \\ \quad | \\ CH_3.C.COOH \\ \quad | \\ \quad CH_2.COOH \end{array}$$

[1]) Ann. der Chemie. *187*, 156; 168. Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1872*, 608. *1873*, 1379.
[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1892*, 920.

nicht liefern kann. Wie weiter im zweiten Abschnitt dargelegt wird, kann gegen die Annahme derselben auch der Einwand erhoben werden, dass sie drei asymmetrische C-Atome enthält, während Camphersäure ihrer nur zwei enthalten soll.

3. Die Camphersäureformel von Collie.

Diese hat, wie erwähnt, folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{ccccc} & & CH_3 & & \\ & & | & & \\ H_2C & — & CH & — & CH.COOH \\ | & & & & | \\ H_2C & — & CH_2 & — & C.COOH \\ & & & & | \\ & & & & CH_3 \end{array}$$

Sie enthält wohl die in Trimethylbernsteinsäure vorfindliche Kohlenstoffgruppierung, allein, um diese zu bilden, müsste das obenstehende, mit Methyl verbundene, tertiäre C-Atom in Methyl übergehen, was sehr unwahrscheinlich erscheint.

Gegen diese Formel kann zweitens ganz dasselbe, was oben über die Formel von Armstrong, in Betreff der Structur der daraus ableitbaren Camphoronsäure und der Zahl der vorhandenen asymmetrischen Kohlenstoffatome, angeführt werden.

Ich bin deshalb der Meinung, dass auch die Formel von Collie für Camphersäure nicht der richtigen Constitution dieser Verbindung entspricht.

4. Die neue Formel von Bredt.

Bei der Aufstellung seiner neuen Formel ging Bredt [1]) von der Thatsache aus, dass Camphersäure, Camphansäure und Camphoronsäure stufenweise durch directe Oxydation des Camphers entstehen, folglich ist eine analoge Atomverkettung in diesen Körpern anzunehmen. Gestützt auf der schon oben erwähnten Spaltung der Camphoronsäure bei trockner Destillation in

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1893*, 3047.

Isobuttersäure, Trimethylbernsteinsäure, Kohlendioxyd und Kohle, die durch die folgende Formel ausgedrückt wird:

$$2\begin{array}{l}(CH_3)_2C.COOH\\ \quad|\\ CH_3C.COOH\\ \quad|\\ \quad CH_2.COOH\end{array} = 2\,(CH_3)_2CH.COOH + \begin{array}{l}(CH_3)_2C\ \ .COOH\\ \qquad|\\ CH_3.CH.COOH\end{array} + 2\,CO_2 + C$$

stellt er sich die Camphoronsäure als trimethylirte Tricarballylsäure vor. Hieraus leitet er für Camphansäure, Camphersäure und Campher die Formeln ab:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & COOH\\ CH_2 & - & C & \diagup & \\ & & | & \diagdown & \\ & & CH_3.C.CHO & & \\ | & & | & & |\\ CH_2 & - & C & - & CO\\ & & | & & \\ & & CH_3 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccl} CH_2 & - & CH.COOH\\ | & & |\\ | & & CH_3.C.CH_3\\ | & & |\\ CH_2 & - & C.COOH\\ & & |\\ & & CH_3\end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} CH_2 & - & CH & - & CH_2\\ | & & | & & |\\ | & & CH_3.C.CH_3 & & |\\ | & & | & & |\\ CH_2 & - & C & - & CO\\ & & | & & \\ & & CH_3 & & \end{array}$$

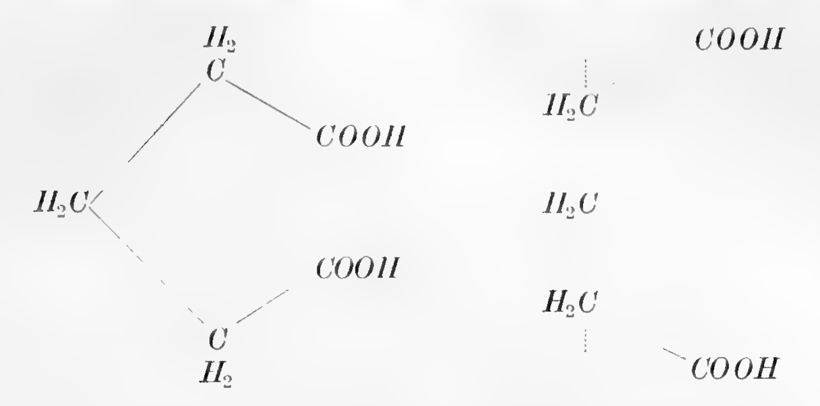
Camphansäure — Camphersäure — Campher

An dieser Stelle sei wieder darauf hingewiesen, dass die Formel der Camphoronsäure, obwohl nicht durch Syntese bewiesen, doch zur Zeit als richtig angenommen werden darf, bis neue Thatsachen entdeckt werden, die mit derselben nicht vereinbar sind; bis jetzt steht sie mit den Erfahrungen im Einklang.

Bei der Begründung der Camphersäureformel weist Bredt darauf hin, dass die Anhydrisirbarkeit der Camphersäure als Argument gegen ihre Auffassung als ringsubstituirte Glutarsäure nicht angeführt werden kann, da die Hexahydroisophtalsäure, welche auch glutarsäureartig gebaut ist, nach v. Baeyer und Williger [1]) ein Anhydrid bildet. Dieser Umstand ist in der That bemerkenswerth, da die Carboxyl-Hydroxyle in einer derartigen Verbindung ziemlich weit von einander entfernt sind. Dasselbe gilt von einer Dicarbonsäure des Pentamethylens, wie sich Bredt die Camphersäure vorstellt. Die folgenden Formeln sollen den beträchtlichen Unterschied in räumlicher Hinsicht zwischen einer aliphatischen und einer ringsubstituirten Glutarsäure bildlich veranschaulichen:

---

[1]) Ann. der Chemie 276, 260.



falls man die Ringatome, wie üblich, in einer Ebene liegend annimmt.

Aus dem Modelle ist ersichtlich, dass die Entfernung zweier correspondirenden Bindestellen der Carboxyl-Kohlenstoffatome in einer cis-Pentamethylendicarbonsäure, auf den Abstand zweier *C*-Atome als Einheit bezogen, *etwa 2* beträgt, während die betreffenden Entfernungen für die folgenden aliphatischen Dicarbonsäuren nach Wislicenus [1]) durch nachfolgende Zahlen ausgedruckt werden können:

1) Für Oxalsäure 1,333
2) „ Malonsäure 1,361
3) „ Bernsteinsäure 0,890
4) „ Glutarsäure . . . . . 0,091.

Hieraus ist ersichtlich, dass jene Abstände für eine aliphatische Glutarsäure etwa 20-mal grösser ist, als bei einer ringsubstituirten Glutarsäure (Pentamethylen-1.3-dicarbonsäure). Wollte man also die Möglichkeit resp. Leichtigkeit der Anhydridbildung einzig auf die betreffenden Abstände der theilnehmenden Gruppen beziehen, so würde man hieraus schliessen, das bei einer Säure der letzten Art die Anhydrisirbarkeit viel schwieriger erfolgen würde, wie bei der entsprechenden aliphatischen Säure.

Nun hat, betreffend der Camphersäure, Brühl [2]) speciell auf ihr eminentes Anhydrisirungsvermögen, das er als „geradezu beispiellos“ bezeichnet, aufmerksam gemacht. Er fand, dass ihre neutrale Ester beim Erhitzen mit Brom unter Abspaltung von Bromalkyl und Sauerstoff in das Anhydrid übergehen, und dass Acetylchlorid denselben Körper unter Erzeugung von Chloralkyl aus

---

[1]) Handbuch der Stereochemie von Bischoff-Walden. S. 73.
[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1891*, 3410.

den sauren Estern bildet. Beweisend ist auch die Beobachtung von MARSH[1]), dass bei der Zersetzung des Camphersäurechlorides mit seinem gleichen Gewicht kochenden Wassers, nicht die freie Säure, sondern ihr Anhydrid entsteht. Weiter ist aus dem experimentellen Theil dieser Arbeit zu entnehmen, dass die gewöhnliche Camphersäure schon bei Zimmertemperatur, bei der Einwirkung von Acetylchlorid, das Anhydrid leicht bildet. Andererseits ist das Anhydrid sehr beständig. 10 g desselben erfordern nach meiner Erfahrung 4—6-stündiges Kochen mit Wasser um in die Säure überzugehen. Ich habe dazu noch gefunden, dass sich die Anhydride der rechts- und links-Camphersäure ohne nennenswerthe Zersetzung aus Wasser umkrystallisiren lassen, und dass sie aus ihre Lösungen mit Wasserdampf überdestilliren.

Für diese Frage sind noch die von BRÜHL in einer späteren Publication[2]) mitgetheilten numerischen Daten, über die von STOHMANN bestimmten Verbrennungswärmen einiger Säuren und ihrer Anhydride, vom Interesse. Ich entnehme der genannten Publication[3]) die folgende Zahlen, welche den Energieaufwand bei der Anhydrisirung einiger zweibasischen Säuren, auf die Verbrennungswärmen der Säuren bezogen, in Procenten ausdrücken:

Bernsteinsäure	3,6 %
Phtalsäure	1,4 „
Maleinsäure	2,4 „
Itakonsäure	1,2 „
Camphersäure	0,7 „

Hieraus ergiebt sich, dass die Anhydridbildung bei der Camphersäure viel leichter erfolgt als bei Bernsteinsäure und, was noch bemerkenswerther ist, bei der Phtalsäure, die ein benzocyklisches, ortocarboxylirtes Gebilde darstellt.

Aus dem Vorstehenden zu schliessen, würde man kaum die Camphersäure als eine Pentamethylen-1.3-Dicarbonsäure annehmen können. Allein die Erfahrung lehrt, dass auch andere Momente, als die relativen Entfernungen der an einer Ringschliessung theilnehmenden Gruppen, in Bezug auf die Leichtigkeit der Anhydridbildung in Betracht kommen.

Erstens sei auf den die Anhydridbildung erleichternden Einfluss eines oder mehrerer Alkyle im Molekyle der zweibasischen Säuren hingewiesen.

---

[1]) Chemical News. *1889*, 307.
[2]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1891*, 3731.
[3]) L. c. S. 3736.

Hierauf hat ANSCHÜTZ[1]) in der Fumar-Maleinsäurereihe aufmerksam gemacht, und die darauf folgenden Untersuchungen von BISCHOFF[2]) über die Anhydridbildung der substituirten Bernsteinsäuren, sowie die von AUWERS und JACKSON[3]) über das gleiche Verhalten einiger substituirten Glutarsäuren, haben zur Genüge dargethan, dass ausnamslos das Anhydrisirungsvermögen dadurch gesteigert wird. Quantitative Bestimmungen von HJELT[4]) über die Anhydridbildung zweibasischer Säuren lassen schliesslich diesen Einfluss der Alkyle auf die Leichtigkeit derselben in gewissen Fällen rechnerisch verfolgen.

Unter den ringsubstituirten Glutarsäuren hat man auch schon Beispiele darauf, dass sie Anhydride bilden können, wie PERKIN j:r[5]) bei den syntetisch dargestellten 1.3-Hexamethylendicarbonsäuren und v. BAEYER und WILLIGER[6]) bei den mit diesen Säuren identischen Hexahydroisopthalsäuren gezeigt haben. Ein weiteres Beispiel hierauf bietet die von MERLING[7]) dargestellte 1.3-Dioxy-1.3-hexahydroisophtalsäure, welche sehr leicht, schon beim Verdampfen ihrer Lösung im Wasserbade, in ihr Anhydrid übergeht.

Aus dem Umstande, dass die erwähnte Hexahydroisophtalsäure ein Anhydrid bildet, zieht v. BAEYER (l. c.) den Schluss, dass „das Hexamethylen, auch wenn es für gewöhnlich eine kreisförmige Structur besitzt, sich doch ebenso leicht wie eine offene Kette verbiegen lässt“. Es lässt sich dies, meiner Ansicht nach, folgendermassen gut erklären. Die plane Atomanordnung ist als die normale Gleichgewichtslage zu bezeichnen. Bei gesteigerter Temperatur nehmen die Schwingungen zu, besonders derjenigen Gruppen, die sich, wie die Carboxyle, freier bewegen können. Diese Schwingungen theilen sich auch den ringbildenden Atomen mit, so dass sie sich wechselweise nähern und entfernen. Die Annäherung der Carboxyle könnte schliesslich in einem gewisssen Momente so gross werden, dass das eine in die Wirkungssphäre des anderen geräth, wobei die Anhydridbildung erfolgt. Bei der Einwirkung von Acetylchlorid, welches die Reaction schon bei gewöhnlicher Temperatur oder beim Siedepunkte des einwirkenden Körpers vollenden lässt, ist anzunehmen, dass zuerst ein unbeständiges Doppelanhydrid, unter Ersatz des Carboxylhydroxylwasserstoffs durch Acetyl, entsteht. Die Wirkungssphäre

---

1) Ann. d. Chemie. *254*, 179.
2) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1890*, 620; 656.
3) Ebendaselbst *1890*, 1599.
4) Ebendaselbst *1893*, 1925.
5) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1892*. R. 160.
6) Annalen d. Chemie. *276*, 265.
7) Ebendaselbst. *278*, 53.

der schwingenden Massen ($-COO.COCH_3$ statt $-COOH$) wird hierdurch vergrössert, und es erfolgt die Abspaltung von Acetanhydrid, unter gleichzeitiger Bildung des betreffenden Säureanhydrids, viel leichter. Aber auch ohne diese Annahme kann man die Anhydridbildung gut erklären, wenn man berücksichtigt, dass hierbei kaum grössere Spannungen zu überwinden sind, wie bei der durch erhöhte, aber auch unter Umständen bei gewöhnlicher Temperatur erzeugten Umlagerung einer cistrans-Säure in die entsprechende cis-Verbindung und umgekehrt, wobei die Richtungslinien der Valenzen um $109^0\ 28'$ verschoben werden müssen. Hierzu kommt noch bei den ringsubstituirten cis-Säuren der Umstand, dass in ihnen die Carboxyle, durch den fixirenden Einfluss des Ringes, insoweit genähert werden, dass sie eine correspondirende Lage einnehmen; bei den Säuren mit offener Kette braucht dies nicht unbedingt vorausgezetzt zu werden. Weiter ist zu beachten, dass bei höher molekularen Säuren, gleichgültig ob sie aliphatischer oder cyklischer Natur sind, die Stellung der bindenden Richtungslinien bei einem jedem Kohlenstoffatom nur um ein Kleines geändert zu werden braucht, um bei entfernter gelegenen schon eine bedeutende Annäherung zu bewirken. Hierauf bietet die von Anderlini [1]) studirte Anhydridbildung der Korksäure, Azelainsäure und Sebacinsäure ein Beispiel, wenn nämlich die betreffenden Anhydride wirklich monomolekular wären, was aus dem mir zugänglichen Referate [2]) nicht ersichtlich ist.

Es ist noch eines Umstandes zu erwähnen, der bei der Besprechung der gegenseitigen Stellung der Carboxyle in der Camphersäure in Erwägung kommen könnte, nämlich die Anhydridbildung bei den geometrisch isomeren Polymethylendicarbonsäuren. Nach einer später auszuführenden Darlegung stellt die gewöhnliche Camphersäure die cis-Form dar, und ihr entspricht eine daraus durch Umlagerung entstehende cistrans-Säure, die als l-Isocamphersäure bezeichnet wird. Man weiss nun allgemein von den Polymethylendicarbonsäuren, dass sich die cistrans-Säuren bei trocknem Erhitzen in die Anhydride der entsprechenden cis-Säuren umwandeln. Dies trifft auch bei der l-Isocamphersäure zu, die hierbei das gewöhnliche Camphersäureanhydrid liefert. Aber bei der Einwirkung von Acetylchlorid verhalten sich jene Säuren verschieden. Die cistrans-Hexahydrophtalsäure, die unbedingt dem Bernsteinsäuretypus angehört, liefert hierbei ein eigenes Anhydrid, das erst bei längerem Erhitzen in das cis-Anhydrid übergeht. Die Glutarsäure-artig zusammen-

---

[1]) Atti d. R. Acc. de Lincei *1894*. I. 393—96. Gazz. chim. *1894*. I. 474—477.
[2]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1894*, R. 405.

gesetzte cistrans-Hexahydroisophtalsäure liefert wieder beim Kochen mit Acetylchlorid direct das Anhydrid der cis-Säure. Dagegen konnte ich trotz vieler Versuche, weder beim Kochen mit Acetylchlorid noch mit Essigsäureanhydrid, aus der l-Isocamphersäure ein einheitliches Anhydrid gewinnen. Es findet zwar eine Einwirkung statt, aber das Product stellt eine glasige, unkrystallinische Masse dar, welche bei stärkerem Erhitzen Essigsäureanhydrid abzugeben scheint, dabei in Camphersäureanhydrid übergehend. Ob nun in dem Körper, der erst bei längerer Einwirkung von Soda in Lösung übergeht (die Lösung enthält nachher die ursprüngliche l-Isocamphersäure), ein Doppelanhydrid mit Essigsäure vorkommt, oder ob er ein polymeres Anhydrid der l-Isocamphersäure enthält, lasse ich unentschieden, da die Analyse hierüber keine sichere Auskunft gab, und auch die Molekulargewichtsbestimmung ein bestimmtes Urtheil hierüber nicht zuliess. Die Versuche zeigen nur, durch ihr negatives Ausfallen, dass die Camphersäure der Hexahydroisophtalsäure in dieser Hinsicht *nicht* gleichgestellt werden kann. Die l-Isocamphersäure gleicht hierin mehr der cistrans-Trimethylendicarbonsäure, welche nach Buchner[1]) mit Acetylchlorid weder ein eigenes, noch ein der geometrisch isomeren cis-Säure entsprechendes Anhydrid giebt.

Es schien mir eine ausführliche Besprechung der Anhydrisirbarkeit deshalb geboten, weil ich zu der Überzeugung gekommen bin, dass bis auf Weiteres *die Anhydridbildung, bei der Entscheidung zwischen einer cyklischen Bernsteinsäure und Glutarsäure, nicht herangezogen werden kann.* Die muthmasslichen Entfernungen der an dieser Reaction theilnehmenden Gruppen scheinen hier eine weit weniger ausgeprägten Einfluss auf die Möglichkeit resp. Leichtigkeit der Anhydridbildung auszuüben, wie bei den aliphatischen Säuren. Dasselbe gilt auch für die Camphersäure, wenn man wie Bredt voraussetzt, dass die Carboxyle direct an Ringkohlenstoff gebunden sind, was übrigens noch zu beweisen ist. Die Anhydridbildung lässt also keine Entscheidung über die Camphersäureformel von Bredt zu.

Es lassen sich aber in experimenteller Hinsicht Einwände gegen diese Formel erheben. In einer früheren Publication[2]) habe ich schon auf einige diesbezügliche Momente aufmerksam gemacht, indem ich, unter Anderm, auf die bemerkenswerthe Beständigkeit des α-Bromcamphers gegen Brom-

---

[1]) Annalen d. Chemie *284*, 208.

[2]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1894*, 1439. Vergl. dagegen Bredt, l. c. S. 2092.

wasserstoff-abspaltende Agenzien hinwies. Bromcampher, nach der BREDT'schen Auffassung formulirt:

$$\begin{array}{l} CH_2 - CH - CHBr \\ \quad | \quad CH_3 - C - CH_3 \quad | \\ CH_2 - C(CH_3).CO \end{array}$$

enthält ja ein dem Brom benachbartes Wasserstoffatom, weshalb seine Resistenz, im Vergleich mit anderen ähnlich gebauten, cyklischen Verbindungen, unerklärlich ist.

Dieser Einwand scheint nun hinfällig geworden zu sein, nachdem ANGELI kürzlich nachgewiesen hat, dass das beim Erhitzen des aus Isonitrosocampher (vermittelst Amidocampher) erhaltenen Monoketazocamphadions entstehende Camphenon [1]):

$$C_8H_{14}\left<\begin{array}{l} C:NOH \\ | \\ CO \end{array}\right. \longrightarrow C_8H_{14}\left<\begin{array}{l} CH.NH_2 \\ \\ CO \end{array}\right. \longrightarrow C_8H_{14}\left<\begin{array}{l} C\left<\begin{array}{l} N \\ N \end{array}\right. \\ | \\ CO \end{array}\right. \longrightarrow C_8H_{13}\left<\begin{array}{l} CH \\ | \\ CO \end{array}\right.$$

Isonitrosocampher — Amidocampher — Monoketazo-camphadion — Camphenon

einen ungesättigten Körper mit ausgesprochenem Aethylencharakter, der dazu noch in Campher zurückverwandelt werden kann, darstellt. Nach ANGELI müssen demnach Campher und Camphenon folgende Atomgruppirungen enthalten:

$$C_7H_{13}\left<\begin{array}{l} CH \\ CO \end{array}\right>CH_2 \qquad C_7H_{13}\left<\begin{array}{l} C \\ CO \end{array}\right. = CH$$

Campher — Camphenon

Die genannten, von ANGELI dargestellten Körper könnten indess auch aus der tautomeren Campherformel abgeleitet werden, im Sinne folgender Formeln:

---

[1]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1895*, 819.

$$C_8H_{14}<\begin{matrix}C:NOH\\|\\CO\end{matrix} \longrightarrow C_8H_{14}<\begin{matrix}CH.NH_2\\|\\CO\end{matrix} \longrightarrow C_8H_{14}<\begin{matrix}C.NH_2\\|\\C.OH\end{matrix} \longrightarrow C_8H_{12}<\begin{matrix}C.N\\\|\\C.O\end{matrix}>N \longrightarrow$$

Isonitrosocampher — Amidocampher — Tautomerer Amidocampher — Monoketazocamphadion

$$C_8H_{14}<\begin{matrix}C\\ \\C\end{matrix}>O \longrightarrow C_8H_{14}<\begin{matrix}C.OH\\ \\CBr\end{matrix}$$

Camphenon — Isomerer Bromcampher von ANGELI

welche Formeln [1]) auch doch discutirt werden müssen, bevor man die Constitution des Camphenons als festgestellt annehmen kann. Doch ist hervorzuheben, dass die Auffassung von ANGELI, dass der dem Methylengruppe benachbarte Kohlenstoff wenigstens einen Wasserstoff trägt, eine wesentliche Stütze durch die Arbeiten von WALKER und von NOYES erhalten hat.

WALKER hat [2]) durch Electrolyse des orto- und allo-Aethylesters der Camphersäure, unter Abspaltung der freien Carboxylgruppe, zwei ungesättigte Säuren von der Formel $C_8H_{13}.COOH$ erhalten, die er campholytische Säure und allocampholytische Säure nennt. Für die erstere hat er nachgewiesen, dass sie eine $\alpha\beta$-ungesättigte Säure darstellt, während für die allocampholytische Säure eine doppelte Bindung in $\beta\gamma$-Stellung wahrscheinlich gemacht wurde.

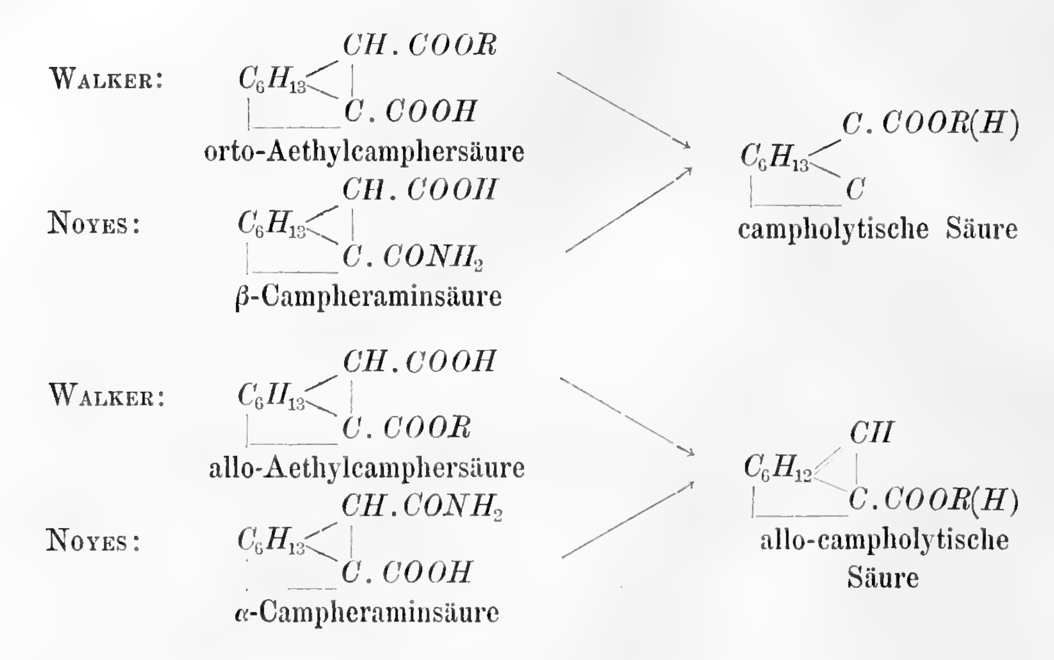
Dieselben Säuren hat nun auch NOYES [3]) auf anderem Wege erhalten, nämlich von den beiden isomeren Campheraminsäuren ausgehend. Diese wurden der Einwirkung von Brom und Alkali ausgesetzt, wobei die entsprechenden einbasischen Aminosäuren der Formel $C_8H_{14}<\begin{matrix}NH_2\\COOH\end{matrix}$ entstanden. Bei Einwirkung von salpetriger Säure wurden diese weiter in eine Oxysäure $C_8H_{14}<\begin{matrix}OH\\COOH,\end{matrix}$ resp. eine ungesättigte Säure $C_8H_{13}.COOH$ verwandelt. Diese durch WALKER und NOYES studirte Bildung der ungesättigten Säuren lassen sich in folgender Weise veranschaulichen:

---

[1]) Die aus Camphenon entstehenden Bromadditionsproducte, sowie das daraus erhaltene Bromcamphenon, können meiner Ansicht nach nicht direct zu Constitutionsbestimmungen in der Camphergruppe herangezogen werden, da bekanntlich auch der Campher selbst, obwohl gesättigt, Additionsproducte mit Brom liefert.

[2]) Trans. chem. Soc. *1893*, 495; ebendaselbst *1895*, 337.

[3]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1894*, 917; *1895*, 547.



Da nun die campholytische Säure die doppelte Bindung in $\alpha\beta$-Stellung enthält, woran nicht zu zweifeln ist, und wenn die electrolytische Spaltung ohne tiefer greifenden Veränderungen des Molekyles stattfindet, was man vorläufig annehmen darf, weil die allocampholytische Säure das gewöhnliche Campholacton liefert, muss in Campher ein zur Methylengruppe benachbarter Wasserstoff vorhanden sein.

Walker und Noyes folgern weiter aus ihren Untersuchungen, dass die Camphersäure ihre beiden Carboxyle an benachbarten Ringkohlenstoffen gebunden enthält, und verwerfen demnach die neuere Formel von Bredt. In der That müsste, unter Zugrundelegung der letztgenannten, in den beiden entstehenden ungesättigten Säuren eine $\gamma\delta$-Bindung vorhanden sein, und sie könnten nicht in einem Falle $\alpha\beta$-, in dem zweiten $\beta\gamma$-ungesättigt sein.

Weiter habe ich vorläufig mitgetheilt [1]), dass das Bromcamphersäureanhydrid als constant auftretendes Spaltungsproduct eine ungesättigte Säure bildet, die ich als mit Lauronolsäure identisch erklärte. Diese Ansicht zeigte sich bei einer weiteren Untersuchung als richtig. Wie ich in dem experimentel-

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1894*, 2112; 3504.

len Theil dieser Arbeit zeigen werde, liess sich die Identität folgendermassen beweisen.

Die aus Bromcamphersäureanhydrid entstehende Säure liess sich, durch Einwirkung von Brom auf ihre Lösung in Chloroform, unter momentaner Entfärbung in ein Additionsproduct überführen, das aber nicht zu isoliren war, sondern schon unter 0° Bromwasserstoff abgab. Hierbei ging sie in ein bromirtes Lacton $C_9H_{13}BrO_2$ von Schmelzpunkt 186—187° über. Das Amid der Säure krystallisirte aus Wasser krystallwasserhaltig in glänzenden Blättern, die beim Liegen an der Luft trübe wurden und den Schmelzpunkt 72° zeigten. Schliesslich wurde noch das für Lauronolsäure nach WORINGERS Angabe [1]) besonders charakteristische Calciumsalz dargestellt, das die Zusammensetzung des lauronolsauren Calciums zeigte. Auch das Silbersalz wurde dargestellt und analysirt.

Aus der durch trockne Destillation von Camphansäure nach WORINGERS Vorgehen dargestellten Lauronolsäure konnten nun auch in der angegebenen Weise das Bromlacton und das Amid mit den erwähnten Eigenschaften erhalten werden. Die Identität der beiden Säuren ist somit bewiesen.

Je nach der Art der Zersetzung des Bromcamphersäureanhydrids ist die Menge der entstehenden Lauronolsäure verschieden. Beim Kochen mit Wasser übersteigt die Menge kaum einige Procente. Mit $\frac{1}{2}$ Mol. Soda in wässerigen Lösung gekocht, steigt die Ausbeute schon af 12 %, während sie bei der Anwendung von 1 Mol. Soda bis zu 17 % aufgeht. In freies Kaliumhydrat enthaltender, wässeriger Lösung ist die Ausbeute wieder etwa 17 %; zugleich wurde hierbei constatirt, dass die Zersetzung unter Kohlendioxydabspaltung erfolgt. Als Hauptproduct entsteht in allen Fällen Camphansäure, die als einziges Product bei der Anwendung von alcoholischem Kali auftritt.

Die Spaltung des Bromcamphersäureanhydrids erfolgt demnach unter der Einwirkung von Soda in zweierlei Art, indem das Natriumsalz der entsprechenden Bromcamphersäure intermediär entsteht: einmal unter Camphansäurebildung,

$$C_8H_{13}\begin{cases} Br \\ COONa \\ COONa \end{cases} = NaBr + C_8H_{13}\begin{cases} \overline{} \\ CO\,.\,O \\ COONa \end{cases};$$

[1]) Inaug. Dissertation. Strassburg *1883.* S. 16, 17.

das andere Mal, indem das Natriumatom des zweiten Carboxyls mit dem Bromatome in Verbindung tritt; zugleich entweicht Kohlendioxyd, und die freien Valenzen, jene des bromtragenden Kohlenstoffs und jene des Kohlenstoffatomes, welches das reagirende Carboxyl bindet, treten zu einer doppelten Kohlenstoffbindung zusammen, wie die folgende Gleichung veranschaulicht:

$$C_8H_{13}\begin{cases} Br \\ COONa \\ COONa \end{cases} = NaBr + CO_2 + C_8H_{13}.COONa.$$

Dass eine doppelte Bindung gewöhnlicher Art in der dabei gebildeten Lauronolsäure entsteht, geht daraus hervor, dass diese Säure, wie schon erwähnt, Brom unter Entfärbung addirt, und in Soda aufgelöst, Kaliumpermanganat momentan entfärbt, wie Versuche ergeben haben.

Nun lässt sich wohl die Camphersäurebildung, *nicht* aber die nach der zweiten Formel stattfindende Entstehung der Lauronolsäure durch die Camphersäureformel von BREDT erklären. Nach ihm wird bei der Bildung des Bromcamphersäureanhydrids das α-Wasserstoffatom des einen Carboxyls durch Brom ersetzt, folglich kommt der entsprechenden Bromcamphersäure die folgende Formel zu:

$$\begin{array}{lcl} CH_2 & - & CBr.COOH \\ & CH_3.C.CH_3 & \\ CH_2 & - & C(CH_3).COOH \end{array}$$

Die Zersetzung ihres Natriumsalzes würde also in folgender Art stattfinden:

$$\begin{array}{lcl} CH_2 & - & CBr.COONa \\ & CH_3.C.CH_3 & \\ CH_2 & - & C(CH_3).COOH \end{array} = NaBr + CO_2 = \begin{array}{lcl} CH_2 & - & \ddot{C} \\ & CH_3.C.CH_3 & \\ CH_2 & - & C(CH_3).COOH \end{array},$$

d. h. es würde eine Substanz entstehen, die zwei freie Affiniteten am selben Kohlenstoffatome enthält, was der heutiger Structurlehre wiederspricht. Um dieser Möglichkeit zu entgehen, ist die Annahme einer „Wanderung" des ei-

nen Wasserstoffatomes von dem benachbarten Kohlenstoff zu dem zweifach ungesättigten nöthig, wobei eine gewöhnliche Doppelbildung enstände:

$$\begin{array}{lcl}
CH_2 - \ddot{C} & & CH = CH \\
\quad CH_3 . C . CH_3 & = & \quad CH_3 . C . CH_3 \\
CH_2 - C(CH_3) . COOH & & CH_2 - C(CH_3) . COOH
\end{array}$$

Eine solche Wanderungsfähigkeit der Wasserstoffatome wird allerdings häufig angenommen, und bei gewissen intramolekularen Verschiebungen, wie z. B. bei der Tautomerisation, ist sie unumgänglich, um die Erscheinung überhaupt erklären zu können. In allen Fällen dieser Art wird die Beweglichkeit des Wasserstoffatoms indess durch das Vorhandensein von Sauerstoff-, Stickstoff- oder Schwefelatome vermittelt. In anderen Fällen, wo Wasserstoff „wandert“, also von Kohlenstoff zu Kohlenstoff, geschieht dies nur unter Zuführ von viel Energie, unter Eingriff kräftiger Reactive oder bei höherer Temperatur. In den wenigen Fällen, worin dasselbe ohne besonderem Energieaufwand eintritt, z. B. bei der Versetzung der doppelten Bindung in ungesättigten Säuren aus $\beta\gamma$- in $\alpha\beta$-Stellung, lässt sich die Erscheinung ungezwungen auf einer stattgefundenen Anlagerung und Abspaltung von Wasser erklären. Sonst, wenn also keiner dieser Gründe vorliegt, ist eine derartige Annahme nur dann berechtigt, wenn keine andere Erklärungsweise über den abnormen Verlauf irgend einer Reaction auszufinden ist.

Bei der Bildung der Lauronolsäure aus Bromcamphersäureanhydrid vollzieht sich die Zersetzung bei verhältnissmässig niedriger Temperatur, bei dem Siedepunkt des Wassers, und auch ist kein besonders kräftiges Reagenz vorhanden. Ich glaube übrigens, dass der Wärmezuführ weniger für die eigentliche Spaltung, als vielmehr für die Überführung des Bromcamphersäureanhydrids in die entsprechende Säure nöthig ist. Ein Beleg für die Richtigkeit dieser Anschauung scheint mir das Verhalten der Bromisocamphersäure unter denselben Verhältnissen zu liefern.

Die bei der Bromierung der l-Isocamphersäure in kleiner Menge entstehende Bromisocamphersäure, die in dem experimentellen Theil näher beschrieben wird, erleidet nämlich schon bei gewöhnlicher Temperatur, bei der Einwirkung von Soda in wässeriger Lösung, derselben Spaltung in Camphansäure und Lauronolsäure, nur ist die Menge der gebildeten Lauronolsäure noch grösser und beträgt 29 %. Auch schon beim Kochen mit Wasser tritt die theilweise verlaufende Zersetzung der Bromisocamphersäure in Kohlendioxyd,

Bromwasserstoff und der ungesättigten Säure ein; es lässt sich die Kohlendioxydentwickelung schon beim Arbeiten mit kleineren Mengen sichtbar beobachten. Aber sie verläuft, wie genannt, ziemlich schnell auch bei gewöhnlicher Temperatur. Sogar bei 0^0 und darunter tritt die erwähnte Spaltung in alkalischer Lösung leicht ein. Die hierbei auftretende Lauronolsäuremenge beläuft sich auf rund 33 %. Hierbei liegen also keine aussergewöhnlichen Umstände vor, die der Annahme einer Umlagerung innerhalb des Molekyls, unter Platzwechsel von Wasserstoffatomen, auch einen Schein der Berechtigung verleihen würden.

Eine Art der Zersetzung, wodurch der Platzwechsel, obwohl schwierig, doch einigermassen wahrscheinlich erklärt werden könnte, muss noch in Betracht gezogen werden. Man könnte nämlich annehmen, dass die Lauronolsäure secundär aus dem isomeren Campholacton, das zuerst gebildet würde, entstände, nach der aus dem Bredt'schen Formel hergeleiteten Schema:

$$\begin{array}{l} CH_2 - C\begin{matrix} Br \\ COOH \end{matrix} \\ \quad CH_3 . C . CH_3 \\ CH_2 - C . COOH \\ \qquad\quad CH_3 \end{array} = \begin{array}{l} CH_2 - C\begin{matrix} \\ H \end{matrix} \\ \quad CH_3 . C . CH_3 \\ CH_2 - C . COO \\ \qquad\quad CH_3 \end{array} + HBr + CO_2$$

Campholacton

$$\begin{array}{l} CH_2 - C\begin{matrix} H \\ \end{matrix} \;\; O \\ \quad CH_3 . C . CH_3 \\ CH - C - CO \\ \qquad CH_3 \end{array} = \begin{array}{l} CH = C\begin{matrix} H \\ \end{matrix} \\ \quad CH_3 . C . CH_3 \\ CH_2 - C - COOH \\ \qquad\quad CH_3 \end{array}$$

Campholacton Lauronolsäure

Gegen diese Auffassung lässt sich Folgendes einwenden. Erstens ist diese Art der Zersetzung nur dann möglich, wenn die Reaction in saurer Lösung geschieht, wie z. B. beim Kochen des Bromcamphersäureanhydrids mit Wasser. Hierbei entsteht allerdings immer Campholacton, doch ist seine Bildung ausschliesslich auf die umlagernde Wirkung des gleichzeitig auftretenden Bromwasserstoffs zu beziehen, was schon Woringer[1]) gefunden hat. Dasselbe geht

[1]) Inaug. Dissertation Strassburg. *1883*. S. 24.

auch daraus hervor, dass wenn die Lauronolsäure, bei der mittelst Soda ausgeführten Zersetzung, aus ihrer alkalischen Lösung — welche, wie besonders angestellte Versuche ergaben, kein Campholacton enthält — mit überschüssiger Säure abgeschieden und nachher mit Wasserdampf übergetrieben wird, das Destillat immer eine beträchtliche Menge des Lactons enthält. Wird aber die Lösung vorsichtig ausgesäuert, so dass sie keine freie Mineralsäure, sondern nur mitgebildete Camphansäure in freiem Zustande enthält, so geht die Lauronolsäure ganz frei von Campholacton über.

Ein zweites Argument gegen die Anfassung, das Campholacton das erste Zersetzungsproduct des Bromcamphersäureanhydrids wäre, liegt eben in der Thatsache, das keine Spur Campholacton entsteht, wenn die Reaction in alkalischer Lösung vor sich geht, obwohl die Menge der Lauronolsäure in diesem Falle ungleich grösser ist. Es ist auch ohne Weiteres verständlich, dass wenn das Natriumsalz der Bromcamphersäure einmal gebildet ist, eine Campholactonbildung der Lauronolsäurebildung nicht vorausgehen kann.

Es würde also kein anderer Ausweg zur Erklärung des Vorganges übrig bleiben, als entweder zu der nach Obigem ziemlich unwahrscheinlichen Annahme zu greifen, dass eine Umlagerung unter „Wanderung“ eines Wasserstoffames stattfindet, oder aber die Formel von Bredt für den Thatsachen nicht entsprechend zu halten. Von der letztgenannten Anschauung ausgehend, lässt sich nämlich die Reaction ohne Schwierigkeit mit Hülfe schon bekannter Facta erklären.

Durch die langjährigen Untersuchungen von Rud. Fittig über die ungesättigten Säuren sind diese Körper unter die am besten erforschten Verbindungen der organischen Chemie eingereiht worden. Seiner Zusammenstellung [1]) über die Resultate der Untersuchungen entnehme ich Folgendes, das zur Erklärung der oben geschilderten Zersetzung der bromirten Camphersäuren wichtig erscheint.

Die $\alpha\beta$-ungesättigten Monocarbonsäuren der Fett- und der Benzolreihe vereinigen sich leicht mit Bromwasserstoff, wobei fast ausschliesslich β-bromirte Säuren entstehen:

$$R.CH:CH.COOH + HBr = R.CHBr.CH_2.COOH.$$

Diese β-Bromsäuren zersetzen sich beim Kochen mit Wasser oder in schwach alkalischer Lösung in dreierlei Weise, wie die folgenden Gleichungen ergeben:

---

[1]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1894*, 2658.

1. $R.CHBr.CH_2.COOH = R.CH:CH.COOH + HBr$;
2. $R.CHBr.CH_2.COOH + H_2O = R.CH(OH).CH_2.COOH + HBr$;
3. $R.CHBr.CH_2.COONa = R.CH:CH_2 + NaBr + CO_2$.

Ein Theil der bromirten Säure spaltet also nur Bromwasserstoff ab und verwandelt sich in die ungesättigte Säure zurück, ein anderer Theil geht unter Austausch des Bromatoms gegen Hydroxyl in die entsprechende Oxysäure über, während der dritte Theil eine Spaltung in einen ungesättigten Kohlenwasserstoff unter gleichzeitiger Bildung von Bromwasserstoff und Kohlendioxyd erleidet. Welche von diesen Reactionen zur vorherrschenden wird, hängt wesentlich von den Bedingungen der Ausführung ab. In wässeriger Lösung werden die beiden ersteren zu Hauptreactionen, und die Kohlenwasserstoffbildung tritt zurück, während bei der Zersetzung der Natriumsalze in *schwach* alkalischer Lösung bei gewöhnlicher Temperatur oder bei 0^0 im Gegentheil die Spaltung in Bromnatrium, kohlensaures Natrium und einen ungesättigten Kohlenwasserstoff überwiegt.

Das Vorstehende, welches fast wörtlich Fittigs eigene Darstellung seiner Versuche (l. c.) wiedergiebt, trifft im Grossen und Ganzen fast genau auch auf die Zersetzung des Bromcamphersäureanhydrids ein, wenn die Veränderungen in der Arbeitsweise, welche durch die Eigenschaften des Ausgangsmaterials nöthig wurden, und die zweibasische Natur der dem Anhydride entsprechenden Säure in Betracht gezogen werden.

Zunächst ist daran zu erinnern (siehe oben Seite 35), dass das Bromcamphersäureanhydrid *beim Kochen mit Wasser* nur winzige Mengen der entsprechenden ungesättigten Verbindung, der Lauronolsäure, liefert, während die Oxysäure fast ausschliesslich entsteht; weil das zweite Carboxyl in γ-Stellung zum Hydroxyl steht, geht sie weiter in die Lactonsäure, Camphansäure, über. In diesem Falle vollzieht sich also die Reaction hauptsächlich nach der obigen Gleichung 2). Dass die nach der Gleichung 1) verlaufende Zersetzung weniger zum Vorschein kommt, könnte auf die cyklische Natur der Verbindung beruhen, wenn man nicht mit Bredt annimmt, dass die Isocamphansäure Reyhers[1]) die vermuthete ungesättigte Säure darstellen sollte; es fehlt indess bis jetzt an einer hinreichenden Begründung dieser letzteren Annahme.

Beim Kochen in *schwach alkalischer* Lösung nimmt die nach Gleichung 2) ausgedrückte Zersetzung sichtbar ab, zu Gunsten der nach Gleichung 3) veranschaulichten Bildung der Lauronolsäure, deren Menge von 1,7 % bis auf das Zehnfache steigt. Falls die Möglichkeit vorhanden wäre, das Bromcam-

[1]) Inaug. Dissert. Leipzig 1891. S. 33.

phersäureanhydrid bei gewöhnlicher Temperatur oder sogar bei 0° zu zersetzen, würde vielleicht die Ausbeute nach der dritten Gleichung noch grösser werden. Dafür scheint der Verlauf der Spaltung der Bromisocamphersäure unter denselben Verhältnissen zu sprechen. Diese Säure giebt, bei gewöhnlicher Temperatur mit $\frac{1}{2}$ Mol. Soda behandelt, also noch in schwach saurer Lösung, schon eine Ausbeute von 29 % an Lauronolsäure, und in einer etwa 1 Mol. Soda enthaltenden, also in schwach alkalischer Lösung, beträgt die Menge desselben Zersetzungsproductes unter 0° sogar 33 %. Allerdings kommen vielleicht in diesem Falle auch Complicationen stereochemischer Art vor, denn nach Wislicenus [1]) übt die räumliche Stellung des Bromatoms in Bezug auf die Stellung des Carboxyles einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Mengenverhältnisse der Zersetzungsproducte aus.

Mit den zweibasischen ungesättigten Säuren hat sich Fittig überhaupt nicht so eingehend beschäftigt, wie mit den einbasischen. Doch drückt er sich (l. c.) dahin aus, dass in ihnen, soweit seine Versuche reichen, die gleiche Gesetzmässigkeit herrscht, wie bei diesen. Hierher gehört auch die von Wislicenus [2]) und Anderen studirte Zersetzung der Dihalogenadditionsproducte der Citra- und Mesaconsäure, die beim Kochen mit Wasser oder mit Soda neutralisirt, schon bei gewöhnlicher Temperatur in Halogennatrium, Kohlendioxyd und Monohalogensubstitutionsproducte der Metacrylsäure liefern. Hierbei übt die Configuration einen Einfluss auf die Natur der entstehenden Producte aus.

Wie dem auch in dem gegebenen Falle sei, so muss das Vorhandensein des zweiten Carboxyls, welches zu der auch sonst überaus leicht eintretenden Camphansäurebildung gerade prädisponirend wirken muss, die Reaction etwas anders beeinflussen, als in den von Fittig untersuchten, einfachenen Fällen. Es ist sogar merkwürdig, dass die Reaction nach der Gleichung 3) unter diesen Umständen überhaupt verlaufen kann. Eben deshalb gewinnt die Anschauung, welche sich aus den Thatsachen herleiten lässt, dass nämlich das Bromatom im Bromcamphersäureanhydrid (resp. in der entsprechenden Bromcamphersäure) nicht in α-Stellung, wie Bredt annimmt, sondern in β-Stellung zum zweiten (d. h. dem an der Camphansäurebildung nicht theilnehmenden) Carboxyle sich befindet, sehr an Wahrscheinlichkeit. Hiernach würde die Bredt'sche Formel auch in diesen Falle unzulässig sein.

---

[1]) Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekylen. Zweite Auflage. S. 62, 64.
[2]) Ebendaselbst. S. 66.

Gegen die oben entwickelte Darlegung könnte vielleicht der Einwand erhoben werden, dass es sich in diesem Falle um ein cyklisches Gebilde handelt, weshalb eine Reaction der aliphatischen Reihe nicht ohne weiteres als Analogon herangezogen werden könne. Es ist allerdings richtig, dass ähnliche Umwandlungen alicyklischer Körper bis jetzt wenig untersucht worden sind, und dass daher bei der Deutung derselben Vorsicht geboten ist. Allein soweit ist die Kenntniss der alicyklischen Verbindungen schon vorgeschritten, dass man weiss, dass sie sich in Bezug auf die Lactonbildung den aliphatischen Körpern ähnlich verhalten, wie die Untersuchungen von BAEYER bei einigen Dicarbonsäuren, und von mir bei einer Monocarbonsäure ergeben haben; selbst in der Campherreihe liegen schon in dieser Hinsicht Erfahrungen vor, nämlich in der Camphansäurebildung und in der Entstehung eines Bromlactons aus dem Dibromadditionsproducte der Lauronolsäure (S. 35). Auch der Entstehung von ungesättigten Verbindungen unter Kohlendioxydabspaltung aus den β-halogenisirten Säuren geht, nach einer allgemein angenommenen Anschauung, ein Lactonisirungsprocess voraus, indem ein β-Lacton intermediär entsteht, das sofort Kohlendioxyd abspaltet. *Ex analogia* musste daher auch diese Reaction auf die von Camphersäure ableitbaren Verbindungen übertragbar sein, und die Lauronolsäurebildung als eine in normaler Weise verlaufende Zersetzung angesehen werden. Im Übrigen sei noch daran erinnert, dass diese Anschauung allein, soweit ich aus der Litteratur habe ersehen können, eine einwurfsfreie Erklärung des Vorganges gestattet.

Es giebt aber auch in der Chemie der alicyklischen Verbindungen Beispiele darauf, dass β-halogenisirte Dicarbonsäuren die gleiche Zersetzung erleiden. PERKIN j:r, der unermüdliche Erforscher der Polymethylenverbindungen, hat nämlich gefunden [1]), dass die $\alpha\alpha$-Dibromtetramethylen(1.2)dicarbonsäure bei der Einwirkung von Alkalien oder Jodkalium in die s. g. Bromdihydrotetrencarbonsäure übergeht:

$$\begin{matrix} CH_2 - CBr\,.\,COOH \\ | \qquad\quad | \\ CH_2 - CBr\,.\,COOH \end{matrix} = HBr + CO_2 + \begin{matrix} CH_2 - CBr \\ | \qquad\quad \\ CH_2 - C\,.\,COOH \end{matrix}$$

Dieser Vorgang ist der oben erwähnten Zersetzung der Citra- und Mesadibrombrenzweinsäure ganz zur Seite zu stellen:

[1]) Chemiker-Zeitung. *1894*, 1853.

$$\begin{array}{c} H.CBr.COOH^{1)} \\ | \\ CH_3.CBr.COOH \end{array} = HBr + CO_2 + \begin{array}{c} H.C.Br \\ \\ CH_3.C.COOH \end{array}$$

Citra-(Mesa-) dibrombrenzweinsäure — Brom(Isobrom-) metakrylsäure

Auch die $\alpha\alpha$-Dibrompentamethylen(1.2)dicarbonsäure erleidet nach den Untersuchungen desselben Forschers dieselbe Zersetzung [2]). Es zeigt sich also, dass die für aliphatische Verbindungen normalen Reactionen dieser Art auch auf die alicyklische Reihe übertragbar sind.

Die oben dargelegten Gründe für die Annahme, dass das Bromatom im Bromcamphersäureanhydrid und in der Bromisocamphersäure die β-Stellung zu dem einen, die γ-Stellung zu dem anderen Carboxyl einnimmt, stösst, wie ich wohl weiss, gegen die zur Zeit ziemlich verbreitete Ansicht, dass nur α-ständige Wasserstoffatome bei der Bromierung einer Säure substituirt werden.

Wenn, wie ich überzeugt bin, die obenanstehende Interprätation dennoch richtig ist, würde die Camphersäure das erste Beispiel einer Abweichung von der bekannten Auwers'schen Regel darstellen. Hervorzuheben ist, dass, wie Auwers selbst angiebt [3]), in jedem von ihm untersuchten Falle der Beweis nicht geführt wurde, dass wirklich immer die α-ständigen Wasserstoffatome der Substitution unterliegen. Ich will noch hinzufügen, dass sich auch Walker [4]) der von mir vertretenen Ansicht über die Lage des Bromatoms im Bromcamphersäureanhydrid angeschlossen hat.

* * *

Vorstehend habe ich ziemlich ausführlich die Grunde dargelegt, die meiner Ansicht nach gegen die Zuverlässigkeit der von Bredt aufgestellten, neuen Campherformel sprechen. Jedes für sich genommen, genügen diese Argumente kaum zur Erlangung eines bestimmten Urtheils. Wenn man sie aber zusammen, eins nach der Anderen, erwägt, fällt der Totaleindruck nicht zum Gunsten der Bredt'schen Anschauung aus. Bei dem jetzigen Stand unserer Kenntnisse sehe ich mich deshalb veranlasst auszusprechen, dass auch die

---

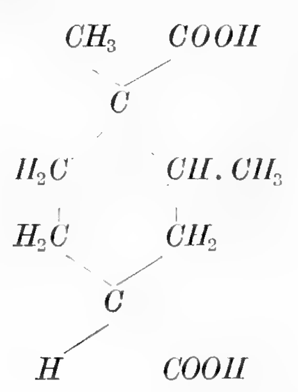
[1]) In dieser Formel wird von der Configuration ganz abgesehen.
[2]) Chem. Centralblatt *1895*, 26.
[3]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1891*, 2215.
[4]) Trans. chem. Soc. *1895*, 345.

genannte Formel dem Verhalten der Campherverbindungen nicht genügend Rechnung trägt.

An dieser Stelle soll nicht unerwähnt bleiben, dass in der letzten Zeit auch andere Forscher Thatsachen zur Kenntniss gebracht haben, die sich mit der BREDT'schen Auffassung der Constitution des Camphers nicht vereinigen lassen. Ich nenne hier noch v. BAEYER[1]) und TIEMANN[2]).

5. Die (zweite) Formel von BOUVEAULT.

Diese wurde aufgestellt, hauptsächlich um die Existenz zweier Hydrocamphene $C_{10}H_{18}$, die bei der Reduction des festen und des flüssigen Pinenhydrochlorides entstehen, zu erklären. Wenn wieder nur die Camphersäureformel des erwähnten Forschers:



in Betracht gezogen wird, tritt ihre Unwahrscheinlichkeit schon durch den Umstand deutlich hervor, dass eine Säure dieser Constitution ebenso wenig einer Anhydridbildung fähig wäre, wie die cis-Hexahydroterephtalsäure, die nach den Untersuchungen von BAEYER kein Anhydrid bildet[3]).

Weiter ist auch hier hervorzuheben, dass die Formel von BOUVEAULT *drei* asymmetrische *C*-Atome enthält.

Aus diesen Gründen kann ich sie nicht als richtig erklären.

6. Die Formel von TIEMANN.

Die Camphersäureformel von TIEMANN hat folgendes Aussehen:

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1895,* 647.

[2]) Ebendaselbst. S. 1086.

[3]) Annalen der Chemie. *258,* 172.

$$\begin{array}{ccc} (CH_3)_2C & — & CH.COOH \\ & & | \\ & & CH_2 \\ & & | \\ CH_3.CH & — & CH.COOH \end{array}$$

Gegen sie treffen die von WALKER und von NOYES (S. 34) gegen die BREDT'sche neue Formel gemachten Einwände zu, ebenso die von mir (S. 35) studirte Lauronolsäurebildung aus dem Bromcamphersäureanhydrid, wenn man sich zu gleicher Zeit erinnert, dass die daraus zugleich entstehende Camphansäure eine γ-Lactonsäure darstellt. Auch ist zu erwähnen, dass der aus dieser Formel abgeleiteten Camphoronsäure die folgende Constitution zukommt:

$$\begin{array}{l} (CH_3)_2C — CH(COOH)_2 \\ \quad\quad\;\; | \\ CH_3.CH.COOH \end{array}$$

Nach dieser Auffassung wäre sie als eine substituirte Malonsäure zu betrachten, was mit ihrem Verhalten nicht übereinstimmt. Da schliesslich auch diese Formel drei asymmetrische Kohlenstoffatome enthält, während die Zahl der existirenden Camphersäure ihrer nur zwei voraussehen lässt, kann ich mich der Auffassung von TIEMANN nicht anschliessen.

Hiermit bin ich auch zum Schluss dieses Capitels gelangt. Als Resultat der geführten kritischen Betrachtung geht Folgendes hervor:

Von den zur Zeit bekannten Formeln für Campher resp. Camphersäure steht keine mit den bekannten Thatsachen völlig in Übereinstimmung.

II. Die Zahl der asymmetrischen Kohlenstoffatome in der Camphersäure.

Die stereochemische Forschung, welche auf die bahnbrechenden Arbeiten von PASTEUR, WISLICENUS u. A. ruhend, durch die Theorie von VAN'T HOFF und LE BEL ihre feste Grundlage erhielt, hat besonders während der letzten Zeit zielbewusst weitere Untersuchungsgebiete erobert. Für die Erforschung der Structur organischer Verbindungen liefert sie in vielen Fällen nicht zu unterschätzende Dienste, nämlich bei den Körpern, die auf Grund gewisser Eigenthümlichkeiten ihrer Structur, bei gleicher Constitution in mehreren Modificationen oder physicalisch isomeren Formen auftreten. Ist die Ungleichheit mit dem Auftreten optischer Activität verbunden, so lässt die Anzahl der Modificationen Rückschlüsse auf die Zahl der im Molekyle vorhandenen *asymmetrischen* Kohlenstoffatome zu. Da aber die Asymmetrie gewissen Eigenthümlichkeiten in der Structur entspricht, so liefert schliesslich die Kenntniss der Anzahl der asymmetrischen Kohlenstoffatome neue Beiträge zur Erforschung der Structur selbst.

Nachdem ich zu der Überzeugung gekommen war, dass keine von den bis jetzt aufgestellten Formeln für Campher dem chemischen Verhalten desselben und seiner Derivate entspricht, und demnach noch viel Material gesammelt werden musste, bevor diese Frage zu ihrer Entscheidung reif war, beschloss ich, den Camphermolekyl auch in dieser Hinsicht zu erforschen. Besonders geeignet für diesen Zweck erschien mir die Camphersäure, die bekanntlich in mehreren optischen Modificationen auftritt. Die experimentelle Arbeit hat nun nicht nur erlaubt, diese zuerst aufgestellte Frage zu beant-

worten, sie hat weiter noch einen Einblick in gewisse stereochemische Verhältnisse, die im Kern des Camphers und einiger seiner wichtigsten Derivate herrschen, erlaubt; die Erfahrungen bezüglich letzterer stehen allerdings, wegen des eigenartigen Baues des Kernes, bis jetzt ziemlich vereinzelt da. Die geschilderten Erörterungen sollen das Material für die beiden folgenden Abschnitte der Arbeit liefern.

Vergleichende Untersuchung über die isomeren Camphersäuren.

Indem ich die Historik über die Stereochemie der Campherverbindungen und die Darlegung der Ansichten meiner Vorgänger auf diesem Gebiete auf die spätere Zusammenstellung über die vorhandenen optisch isomeren Camphersäuren verschiebe, gebe ich zunächst eine chronologisch geordnete Aufzählung derjenigen Camphersäuren, die als wirchliche Individuen dargestellt und angegeben worden sind. Nachher wird, der Einfachheit wegen, von der historischen Reihenfolge abgesehen. Es werden zuerst die Modificationen behandelt, welche sich als wirkliche Isomere ergeben haben, und später diejenigen, die entweder mit diesen identisch oder als Gemenge mehrerer derselben gefunden wurden. Einer jeden geht eine kurze Historik vor.

Die zur Zeit bekannten Camphersäuren sind dreizehn an der Zahl, nämlich 1) *Die gewöhnliche, rechtsdrehende Camphersäure;* 2) *die Linkscamphersäure von* CHAUTARD; 3) *die inactive Paracamphersäure von* CHAUTARD; 4) *die zweite inactive Camphersäure von* CHAUTARD; 5) *die Mesocamphersäure von* WREDEN; 6) *die zweite inactive Camphersäure von* WREDEN; 7) *die inactive Camphersäure von* JUNGFLEISCH; 8) *die inactive Camphersäure von* ARMSTRONG *und* TILDEN; 9) *die inactive Camphersäure von* MARSH *und* STOCKDALE; 10) *die linksdrehende Isocamphersäure von* FRIEDEL; 11) *die Mesocamphersäure*[1]) *von* JUNGFLEISCH; 12) *die rechtsdrehende isomere Camphersäure von* JUNGFLEISCH; 13) *die zweite inactive Camphersäure von* JUNGFLEISCH.

---

[1]) Dieser Säure hat JUNGFLEISCH nicht den angegebenen Namen beigelegt, ich nenne sie der Kürze halber so, weil sie, wie weiter unten gezeigt wird, der öfterst genannten *Meso*camphersäure von WREDEN durchaus entspricht.

Die gewöhnliche rechtsdrehende Camphersäure; d-Camphersäure[1]).

Die Historik dieses schon längst bekannten und vielfach untersuchten Körpers mag an dieser Stelle ausbleiben, da einige Daten hierüber schon eingangs angeführt wurden.

Da ich für meine Zwecke ganz reine d-Camphersäure brauchte, wurde ihre Reinigung sorgfältig ausgeführt; die Arbeitsweise wird näher in dem experimentellen Theil beschrieben. Einerseits war es nöthig ihren Schmelzpunkt genau kennen zu lernen, besonders zum Vergleich mit der daraus entstehenden l-Isocamphersäure (siehe weiter unten), die bei weitaus niedriger Temperatur (171—172^0) schmilzt. Über die genannte Constante der d-Camphersäure liegen nun mehrere, von einander ziemlich abweichende Angaben vor: 188^0 (FRIEDEL[2])); 185^0 (MARSH[3])); 180,7^0 (korrigirt, KACHLER[4])); zwischen 170 und 178^0 schwankend von mehreren Autoren (FITTIG und TOLLENS[5]), HARTMANN[6]), WREDEN[7]) HALLER[8]) u. A.) angeführt.

Andererseits stand mir für die Bestimmung des optischen Drehungsvermögens kein für Messungen bei homogenem Licht eingerichtetes Instrument zu Gebot, sondern ein SOLEIL'scher Saccharimeter von der Firma SCHMIDT und HAENSCH in Berlin. Der neue Apparat, welcher bei den mit weissen Licht ausgeführten Bestimmungen mit befriedigender Genauigkeit fungirte, war wie gewöhnlich mit einer in 100 Grad getheilten, horizontalen Scala eingerichtet; jeder Grad entsprach für den Strahl j 0,3906 Kreisgraden[9]) (0,3455 Kreisgraden für den Strahl D. Um nun zu vergleichbaren Zahlen zu gelangen, da sich die Bestimmungen anderer Forscher auf Natriumlicht beziehen, war es von besonderer Wichtigkeit, auch die Constante $[\alpha]_j$ für die d-Camphersäure zu ermitteln.

Die somit erhaltene reine Säure zeigte *den Schmelzpunkt 187^0* und, als Mittel zweier, in 10-procentiger alcoholischer Lösung ausgeführten Bestimmungen, *das specifische Drehungsvermögen* $[\alpha]_j = 49{,}7^0$.

---

[1]) Bei dieser Zusammenstellung sind den älteren Benennungen diejenigen neuen, die sich als geeigneter herausgestellt haben, mit gesperrten Druck hinzugefügt.
[2]) Comptes Rendus. *108*, 984.
[3]) Chemical News. *60*, 307.
[4]) Annalen der Chemie. *197*, 92.
[5]) Ebendaselbst. *129*, 372.
[6]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1888*, 224.
[7]) Annalen der Chemie. *163*, 328.
[8]) Comptes rendus. *105*, 66.
[9]) LANDOLT. Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen. S. 162.

Neben der letztgenannten Bestimmung war es von speciellem Interesse das entsprechende Drehungsvermögen bei Natriumlicht zu ermitteln. Dies lässt sich, obwohl nur schwierig, mit dem angewandten Apparate erzielen, wenn die Natriumflamme eine genügende Lichtstärke besitzt. In dieser Weise wird der Werth $[\alpha]_D = 47{,}8^0$ erhalten, der mit den Bestimmungen von LANDOLT[1]), welcher für die alcoholische Lösung der Camphersäure (Concentration 2,562—19,294) 47,5—47,4^0 erhielt, genügend übereinstimmt. Auf meine letztgenannte Bestimmung lege ich indess kein allzu grosses Gewicht, weil das Instrument eigentlich hierfür ungeeignet war, will sie aber der Vollständigkeit wegen anführen. Im Übrigen war der Apparat seinem Zweck durchaus entsprechend. Der grösste von mir beobachtete Fehler betrug höchstens 0,1 Theilstriche der horizontalen Scala, was einem Fehler in dem berechneten specifischen Drehungsvermögen $[\alpha]_j$ für die Camphersäuren (in 10-procentiger, absolut-alcoholischer Lösung) von höchstens $\pm$ 0,24^0 entspricht.

Die Löslichkeit der d-Camphersäure in Wasser ist bereits früher von JUNGFLEISCH[2]) bestimmt worden. 100 Theile Wasser lösen bei 20^0 6,96, bei 30^0 8,05 Theile der Säure.

Die Linkscamphersäure von CHAUTARD; l-Camphersäure.

Diese Modification der Camphersäure, die zuerst von CHAUTARD[3]) aus Matricariacampher erhalten wurde, stellte ich durch Oxydation von l-Borneol aus Lavendeloel[4]) mit Salpetersäure dar. Dass hierbei als erstes Oxydationsproduct l-Campher entsteht, wurde früher von BECKMANN[5]) bewiesen. Der Identitätsnachweis desselben l-Borneols mit anderen Linksborneolen, wie dasjenige aus Ngai-Campher, Krapp, Bang-Phiên u. s. w., ist von HALLER[6]) geführt.

In ähnlicher Art wie die d-Camphersäure gereinigt, *schmilzt die l-Camphersäure bei 187^0* und zeigt in absolut-alcoholischer Lösung *ein Drehungsvermögen* $[\alpha]_j = -49{,}5^0$. Über den Schmelzpunkt konnte ich keine Angaben

---

[1]) LANDOLT. Das optische Drehungsvermögen organischer Substanzen. S. 225.

[2]) Comptes Rendus. *110,* 790.

[3]) Jahresbericht *1863,* 556. Annalen der Chemie. *127,* 121.

[4]) Für die Beschaffung dieses kostbaren Materials, das in vorzüglicher Reinheit von SCHIMMEL & C:o in Leipzig geliefert wird, bin ich Herrn Professor EDV. HJELT zu grossem Dank verpflichtet.

[5]) Annalen der Chemie. *250,* 353.

[6]) Comptes rendus *104,* 68.

in der Litteratur finden, und auch für das spec. Drehungsvermögen fehlt es an Zahlenangaben; Chautard erwähnt nur (l. c.), dass die Säure ebenso stark nach links dreht, wie die gewöhnliche Camphersäure nach rechts.

Die Löslichkeit wurde früher von Jungfleisch[1]) bestimmt und beträgt: bei 20° 6,95 Th., bei 30° 7,98 Th. Säure in 100 Th. Wasser.

Die l-Camphersäure zeigt sich demnach als in allen übrigen Eigenschaften mit d-Camphersäure identisch, mit Ausnahme des Zeichens für die optische Drehung.

Inactive Paracamphersäure von CHAUTARD; i-Camphersäure.

Das in der l-Camphersäure wirklich der optisch isomere Antipode der gewöhnlichen d-Camphersäure vorliegt, würde von Chautard[2]) dadurch bewiesen, dass er, beim Zusammenmischen concentrirter, gleiche Theile der Componenten enthaltender alcoholischer Lösungen, unter spontaner Erwärmung eine neue inactive Säure erhielt, die er Paracamphersäure nannte. Chautard erkannte die racemische Natur dieser Verbindung, indem er dieselbe mit der Traubensäure verglich, deren Verhältniss zu der gewöhnlichen Weinsäure und der Linksweinsäure etwas früher von Pasteur festgestellt worden war. Es trat mit den drei nunmehr bekannten Camphersäuren erst das zweite Beispiel dieser eigenthümlichen Isomerie-art hervor.

Über den Schmelzpunkt giebt Chautard keine Angaben. Später wurde die i-Camphersäure von Haller[3]) untersucht. Er bestätigte zunächst die Angaben seines Vorgängers; nach ihm liegt der Schmelzpunkt bei 204,8—205,2°, also bedeutend höher als derjenige der Componenten. Die Löslichkeit[2]) wurde zu 1 Theil auf 100 Theile Wasser ohne Angabe der Temperatur bestimmt.

Bei der nach Chautards Vorgehen vorgenommenen Darstellung der Säure konnte ich zunächst seine Angaben über die Selbsterwärmung nach Zusammenmischen der die Componenten enthaltenden alcoholischen Lösungen nicht bestätigen. Die Erwärmung betrug höchstens Theile eines Grades. Trotzdem auskrystallisirte die i-Camphersäure, ihrer geringeren Löslichkeit wegen, binnen Kurzem in feinen Nadeln. Der Schmelzpunkt wurde in allen den zahlreich beobachteten Fällen zu 202—203° gefunden, also etwas niedriger als Haller (l. c.) angiebt. Sie krystallisirt nicht schwieriger wie die Componenten, die

---

[1]) Comptes rendus *110*, 796.
[2]) Annalen der Chemie *127*, 121.
[3]) Comptes rendus *102*, 68; *105*, 68.

Krystalle sind aber kleiner und unansehnlicher. Die Form der Krystalle zeigt auch, dass in ihr eine wirkliche Verbindung vorliegt. Die Säure ist sowohl in wässeriger wie alcoholischer Lösung *optisch inactiv.*

Betreffend der Löslichkeit der Verbindung in Wasser habe ich eigenthümlicher Weise, trotz vieler Versuche, keine genau übereinstimmenden Zahlen erhalten können. Dies beruht wahrscheinlich auf die Fähigkeit derselben, übersättigte Lösungen zu bilden. Allenfalls ist die Löslichkeit viel niedriger gefunden, wie Chautard (siehe oben) angiebt. Meine Zahlen variiren zwischen 0,28 und 0,2 Theilen der Säure auf 100 Th. Wasser bei etwa 20°.

Ferner erhielt ich die i-Camphersäure bei der Umlagerung der weiter unten erwähnten i-Isocamphersäure beim trocknen Erhitzen, wobei sie in Form ihres Anhydrides auftritt, sowie bei Umlagerung derselben Verbindung bei hörerer Temperatur, in Gegenwart von Eisessig und Chlorwasserstoffsäure. Auch wurde sie als ein Bestandtheil anderer inactiver Camphersäuren gefunden, wie später gezeigt wird. In allen Fällen trat sie mit den oben angegebenen Eigenschaften auf.

Die linksdrehende Isocamphersäure von Friedel; l-Isocamphersäure.

Diese Modification der Camphersäure wurde zuerst, obwohl nicht in reinem Zustande, von Jungfleisch [1]) erhalten, nämlich beim Umkrystallisiren der s. g. Mesocamphersäure, die beim Erhitzen gewöhnlicher Camphersäure mit Wasser auf 180—220° entsteht. Jene zerfällt hierbei in einen rechts- und einen linksdrehenden Theil, von denen der letzgenannte die l-Isocamphersäure enthält. In reinem Zustande wurde die Säure zuerst von Friedel [2]) gewonnen. Er erhielt sie durch fractionirte Krystallisation der Wreden'schen Mesosäure und constatirte zugleich ihre Ungleichheit mit der l-Camphersäure aus Matricariacampher, durch den Schmelzpunkt (172,5°), die Löslichkeit und andere, vornehmlich krystallographische Eigenschaften. Er nannte sie auch deshalb Isocamphersäure. Fast gleichzeitig erhielt Marsh [3]) dieselbe Säure aus dem Gemisch, das bei Zersetzung des gewöhnlichen Camphersäurechlorids in der Wärme mit Wasser entsteht. Jungfleisch [4]) hat sie später, durch Bestimmung ihrer Löslichkeit in Wasser, als Individuum zu charakterisiren ver-

---

1) Bulletin de la Soc. chim. de Paris. *19*, 530; *41*, 222.
2) Comptes rendus. *108*, 979.
3) Chemical News. *60*, 307.
4) Comptes rendus *110*, 791.

sucht, operirte aber wahrscheinlich mit unreinem Material. Während Friedel die Löslichkeit bei $15{,}5^0$ zu $0{,}38\,\%$ bestimmte, erhielt der Letztgenannte die Zahlen 2,3 bei 10^0, 2,65 bei 20^0 u. s. w.

Über das Drehungsvermögen liegen auch etwas abweichende Angaben vor. Nach Marsh beträgt es $[\alpha]_D = -48{,}09^0$, (ohne Angabe des Lösungsmittels und der Concentration), nach Friedel ist die Constante $[\alpha]_D = -46^0$ in alcoholischer Lösung.

Ich erhielt das erste Mal die Säure bei der Reduction des Bromcamphersäureanhydrides mit Zinkstaub in Eisessiglösung, wobei sie die Hauptmenge der dabei entstehenden Säuren ausmacht. Später habe ich sie durch Einwirkung des von mir bei dieser Arbeit angewandten Umlagerungsgemisches (gleiche Volume von Eisessig und reiner concentrirter Salzsäure) auf d-Camphersäure dargestellt. Auch beim Erhitzen dieser Säure mit Chinolin ensteht die l-Isocamphersäure in geringerer Menge.

Den Schmelzpunkt der l-Isocamphersäure fand ich übereinstimmend *bei 171—172*^{0} liegend; schon ein Paar Grade früher war hierbei immer ein beginnendes Erweichen zu beobachten. *Das specifische Drehungsvermögen beträgt* $[\alpha]_j = -48{,}9^0$, also dem Werthe nach dem der activen Camphersäuren ziemlich nahe liegend. Dennoch ist hierin ein Unterschied von etwa $0{,}8^0$ immer vorhanden; *die scheinbare Gleichheit beruht also nicht etwa auf Beobachtungsfehler.* Bei einem Versuche, das Drehungsvermögen bei Natriumlicht zu bestimmen, wurde $[\alpha]_D = -47{,}1^0$ erhalten, was zum Vergleich mit den oben angeführten, früheren Befunden mitgetheilt werden mag, doch mit der früher (Seite 49) ausgedrückten Reserve.

Die Löslichkeit der l-Isocamphersäure beträgt nach meinen Versuchen bei 20^0 *0,337 Theile auf 100 Theile Wasser.* In absolutem Alcohol ist die Löslichkeit ungleich grösser; sie wurde bei einem Versuche zu 47,5 in 100 Th. Alcohol bei 20^0 bestimmt.

Beim Erhitzen für sich geht die l-Isosäure, wie schon Friedel (l. c.) beobachtete, in das Anhydrid der d-Camphersäure über. Durch Umlagerung mit Eisessig und Salzsäure bei 180^0 wird sie theilweise in d-Camphersäure zurückverwandelt, wie aus dem experimentellen Theil weiter zu entnehmen ist. Dieselbe Beobachtung ist früher auch von Friedel [1]) gemacht worden.

---

[1]) Comptes rendus. *108*, 982.

Die rechtsdrehende isomere Camphersäure von JUNGFLEISCH; d-Isocamphersäure.

In ähnlicher Weise wie d-Camphersäure beim Erhitzen mit wässerigen Flüssigkeiten theilweise in l-Isocamphersäure übergeht, lässt sich, wie auch zu erwarten, die l-Camphersäure in ein ähnliches Gemisch verwandeln, die ausser dem Ausgangsmaterial eine rechtsdrehende Säure enthält. Diese Umwandlung ist zuerst von JUNGFLEISCH[1]) ausgeführt worden, indem er die l-Camphersäure mit Wasser auf höhere Temperatur erhitzte und das enstandene Gemisch der fractionirten Krystallisation unterwarf. Die erhaltene Säure scheint von ihm wenig untersucht worden zu sein. Er giebt nicht den Schmelzpunkt an, und betreffend des Drehungsvermögens wird nur angegeben, dass es gleich viel nach rechts dreht, wie l-Isocamphersäure nach links; Zahlenbelege werden doch nicht beigefügt.

Ich stellte mir die Säure aus l-Camphersäure nach demselben Verfahren dar, wie bei l-Isocamphersäure angegeben worden. Schon ihrem Aussehen nach gleicht sie der l-Isocamphersäure so sehr, dass die beiden Körper nicht von einander unterschieden werden können. Das von FRIEDEL[2]) erwähnte Verhalten der l-Isocamphersäure bei der Krystallisation, das auch ich immer beobachtet habe, wiederholt sich hier in allen Details. Aus der heissgesättigten Lösung scheiden sich zuerst dünne Blätter aus, die sich mehrere Stunden in der Lösung erhalten können. Nach einiger Zeit beginnt nun der Umwandlungsprocess, die Blätter werden allmählich unter den Augen des Beobachters verzehrt, bis schliesslich auch die letzten Fetzen verschwinden. Gleichzeitig tritt die beständige Modification, aber oftmals an anderen Theilen des Gefässes, in Form grosser oktaëdrischer, stark glänzender Krystalle auf. Es wird also das Material aus den erstgenannten Krystallen aufgelöst und an einen anderen Ort transportirt, um daselbst die Krystalle der zweiten Art aufzubauen. Gleichzeitig befindet sich die Flüssigkeit in stetiger Bewegung. Besonders charakteristisch ist die Erscheinung, wenn die Lösung etwas Alcohol enthält und wenn die aufgelöste Substanz frei von Beimengungen ist; dann kann der Eintritt des Umwandlungsprocesses sogar auf einen Tag aufgeschoben werden. Auf einmal fängt er dann an und ist in weniger Stunden beendigt. Umschütteln begünstigt sehr die Umwandlung. — Meine obigen Beo-

---

[1]) Comptes rendus. *110*, 792.

[2]) Ebendaselbst. *108*, 979.

bachtungen beziehen sich zwar mehr auf die leichter zugängliche l-Isosäure, aber die vorliegende d-Isosäure zeigt auch die Erscheinung in prägnanter Weise.

Der Schmelzpunkt der d-Isocamphersäure liegt ebenfalls *bei 171—172*^{0}, und die Erscheinungen in Betreff des Beginnens des Schmelzens wiederholen sich in ähnlicher Weise, wie bei der l-Isosäure oben angegeben worden. *Das Drehungsvermögen beträgt* $[\alpha]_j = 48{,}6^0$, welche Zahl nur 2 Decigrade niedriger wie die betreffende der l-Isosäure, also innerhalb der Fehlergrenze des Apparates, liegt. Die Löslichkeitsbestimmung ergab folgende Zahlen, als Mittel zweier Versuche: *0,356 g der Säure lösten sich in 100 g Wasser von 20*^{0}.

Bei trocknem Erhitzen verwandelt sich die d-Isocamphersäure in das Anhydrid der l-Camphersäure.

Aus dem Mitgetheilten geht nun zu voller Evidenz hervor, dass die beiden zuletzt behandelten Säuren optische Isomeren darstellen, und dass in ihnen in der That wirkliche Modificationen der Camphersäure vorliegen.

Die zweite inactive Camphersäure von JUNGFLEISCH; i-Isocamphersäure.

Auch diese Säure ist früher von Jungfleisch[1]) erhalten, durch Racemation von d- und l-Isocamphersäure, aber sehr wenig untersucht worden, indem weder Schmelzpunkt noch andere Eigenschaften festgestellt wurden. Jungfleisch erwähnt nur, dass sie inactiv ist.

In der angegebenen Weise durch Zusammenmischen concentrirter, alcoholischer Lösungen der Componenten dargestellt, wobei die Racemation ohne Erwärmung geschieht, krystallisirt die i-Isocamphersäure zuerst in kugeligen Aggregaten aus, die bei erneuter Krystallisation aus essigsäurehaltigem Wasser oder verdünntem Alcohol zu getrennten Krystallindividuen zerfallen. Die Krystalle stellen platte Prismen mit keilförmiger Abstumpfung an den Enden dar, die eine schräggestellte Kante aufweisen. Sowohl die einzelnen Krystalle wie die Krystallaggregate zeigen den Schmelzpunkt *191*^{0}, der also auch, wie bei der i-Camphersäure, bedeutend höher, als derjenige der Componenten liegt. Zum Aeusseren ist diese Säure von allen übrigen, einheitlich existirenden Camphersäuren am unansehnlichsten und auch am schwie-

---

[1]) Comptes rendus. *110*, 792.

rigsten in Wasser löslich. Zwei zu diesem Zweck angestellte Versuche ergaben im Mittel, dass *0,203 g der Säure in 100 g Wasser bei 20^0 löslich waren.* Auch die Löslichkeit ist demnach kleiner wie bei den Componenten. In 10-procentiger alcoholischer Lösung zeigte sich die i-Isocamphersäure in 2 dm-Rohr *völlig inactiv.*

Um die Zusammenhörigkeit der Säure mit den anderen Modificationen der Camphersäure festzustellen, wurde noch ihr Verhalten bei höherer Temperatur studirt. Bei der Erhitzung für sich in trocknem Zustande ging sie vollständig in das Anhydrid der i-Camphersäure über. Dass jenes in der That enstanden war, wurde dadurch bewiesen, dass es beim Kochen mit Kaliumcarbonat-lösung eine inactive Säure lieferte, die bei 202—203^0 schmolz. Mit Eisessig-Salzsäure erhitzt ging sie ebenfalls, jedoch nur theilweise, in diese Säure über, was durch die Bestimmung der Inactivität und des Schmelzpunktes bestätigt wurde.

Die i-Isocamphersäure stellt demnach eine wirkliche, racemische Modification der Camphersäure dar.

Die Mesocamphersäure Wredens und die erste inactive Camphersäure von Jungfleisch.

Diese beiden Körper werden zusammen abgehandelt, da sie durchaus ähnlich zusammengesetzte Mischungen darstellen.

Die erstgenannte Säure wurde zuerst von Wreden beim Erhitzen der gewöhnlichen Camphersäure mit verdünnter Chlor- oder Jodwasserstoffsäure auf 140—160^0 oder mit Wasser bei noch höherer Temperatur erhalten. Sie wird als eine in feinen Nadeln krystallisirende Substanz mit niedrigem Schmelzpunkt (113^0) beschrieben, die nach Wreden inactiv wäre und eine neue Camphersäure darstellen würde. Dieselbe oder eine ähnliche Mischung wurde etwas später auch von Jungfleisch[2]) erhalten, bei längerem Erhitzen von d-Camphersäure mit Wasser auf 180—220^0, sowie von Friedel[3]), sowohl aus der gewöhnlichen wie auch aus der l-Isocamphersäure, bei Einwirkung von wenig Wasser während 48 Stunden bei 180—190^0. Die „Mesocamphersäure“

---

[1]) Annalen der Chemie. *163*, 328.
[2]) Bulletin de la Soc. chim. de Paris. *19*, 290, 433, 530; *41*, 222.
[3]) Comptes rendus. *108*, 982.

stellt indess kein chemisches Individuum dar, weil sie, wie schon JUNGFLEISCH (l. c.) andeutet und FRIEDEL (l. c.) gezeigt hat, durch Umkrystallisiren in d-Camphersäure und l-Isocamphersäure gespalten werden kann. Hierbei soll zuerst d-Camphersäure und später l-Isocamphersäure abgeschieden werden. Die gelöst gebliebene „Mesocamphersäure" gibt weiter bei erneutem Fractioniren neue Mengen der beiden Säuren in derselben Reihenfolge u. s. w., bis die ganze Menge zerlegt worden ist. Schon durch diese wichtige Beobachtung von FRIEDEL ist die Natur der betreffenden Säure als ein Gemenge gekennzeichnet. Dem gemäss entsteht sie wieder, wenn d-Camphersäure und l-Isocamphersäure zu gleichen Theilen in Lösung zusammengemischt werden, wie FRIEDEL (l. c.) und später auch JUNGFLEISCH[1]) angegeben haben.

Bei meinen Versuchen bin ich auch oftmals der „Mesocamphersäure" begegnet, doch habe ich sie niemals optisch inactiv gefunden. Aus der d-Camphersäure beim Erhitzen mit der Eisessig-Salzsäuremischung dargestellt, war sie immer schwach rechtsdrehend, die in ähnlicher Weise aus l-Isocamphersäure erhaltene drehte immer um ein Kleines nach links. Beim Umkrystallisiren schieden sich auch immer körnige Krystalle aus, erst später erfolgten die feinen Nadeln, die nach WREDEN für die Säure typisch sein sollen. Auch der Schmelzpunkt war keineswegs stabil, sondern schwankte zwischen 108^0 bis auf über 150^0. Ähnliches ist auch schon von FRIEDEL angegeben, der früher den Schmelzpunkt 135—140^0 beobachtete. Auch beim Zusammenmischen gleicher Theile der Componenten konnte keine einheitliche Substanz erhalten werden, ebensowenig war das Product auch im diesem Falle optisch inactiv, sondern schwach rechtsdrehend.

Durch die Einwirkung von Acetylchlorid bei gewöhnlicher Temperatur liess sich die „Mesosäure" immer, gleichviel auf welche Art sie dargestellt wurde, leicht in ihre Componenten trennen, indem die d-Camphersäure hierbei in ihr Anhydrid verwandelt wurde, während die l-Isocamphersäure unverändert blieb. Beim Anrühren des trocknen Reactionsgemisches mit Sodalösung wurde diese aufgelöst, dagegen blieb jenes ungelöst, was die Trennung ermöglichte. Die Umlagerung der d-Camphersäure konnte in dieser Weise sogar quantitativ verfolgt werden.

Dasselbe, was oben mit der WREDEN'schen Säure ausführen liess, gilt mutatis mutandis auch für die von JUNGFLEISCH[2]) zuerst dargestellte Säure, die beim Erhitzen von l-Camphersäure mit Wasser auf höhere Temperatur

---

[1]) Comptes rendus. *110*, 792.
[2]) Ebendaselbst. *110*, 792.

entsteht. Jungfleisch zerlegte sie durch fractionirte Krystallisation in l-Camphersäure und d-Isocamphersäure.

Bei meinen Versuchen fand ich die Säure, seinen Angaben wiedersprechend, nicht optisch inactiv, sondern schwach linksdrehend. Der Schmelzpunkt zeigte das gleiche Schwanken, wie oben angegeben. Bei der Einwirkung von Acetylchlorid liess sich die Gemenge quantitativ in die von Jungfleisch angegebenen Componenten trennen.

Es bleibt also, auch schon nach den älteren Angaben, kein Zweifel über die nicht einheitliche Natur der beiden Säuren übrig.

Die zweite inactive Camphersäure von CHAUTARD.

Durch Kochen von i-Camphersäure mit absolutem Alcohol bei Gegenwart concentrirter Schwefelsäure erhielt der genannte Forscher[1]) ein in Alkalien lösliches, schweres Oel, das beim Destilliren in ein Gemenge von i-Camphersäureanhydrid und dem Diaethylester der als Ausgangsmaterial angewandten Säure übergeht. Als dieser Ester mit concentrirter Kalilösung erhitzt wurde, entstand eine pulverförmige, unkrystallisirbare, *inactive* Säure, die Chautard als eine neue Camphersäure, und zwar als die der Mesoweinsäure entsprechende Modification derselben betrachtete. Die Existens einer solchen Modification, deren Vorliegen nach der heutigen Anschauung auf eine „innere Compensation" beruhen würde, hätte in der Camphersäurereihe ein besonderes Interesse beansprucht, weshalb mir eine erneute Untersuchung dieser von Chautard dargestellten Säure besonders nothwendig erschien.

Schon die von Chautard angegebenen Eigenschaften der Säure und ihrer Salze, die er ebenfalls als unkrystallisirbar beschrieb, sprechen nicht für die Einheitlichkeit derselben. Es hat sich auch ergeben, dass ein Gemenge zweier Säuren vorliegt.

Beim Verseifen des Esters entstand in der That eine Substanz mit den oben angegebenen Eigenschaften; der Schmelzpunkt war inconstant, indem die Probe bei 184° zu sintern begann und sich erst bei 195° völlig verflüssigte. Als die Säure mit Acetylchlorid behandelt wurde, zerfiel sie zum grössten Theil in ein Anhydrid, zum kleineren blieb sie unangegriffen. Die beiden Substanzen liessen sich, wie oben (S. 56) angegeben, mittelst Sodalösung gut trennen. Das Anhydrid schmolz nach dem Umkrystallisiren bei 221° und

---

[1]) Annalen der Chemie. *127*, 123, 124.

zeigte die später zu beschreibende, charakteristische Krystallform des i-Camphersäureanhydrids. Dass die genannte Verbindung vorlag, liess sich sowohl durch die Analyse, als auch durch den Umstand beweisen, dass sie sich beim Kochen mit Kaliumkarbonat in eine inaktive Säure verwandelte, die bei 202—203° schmolz und die Krystallform der i-Camphersäure zeigte. Der in Soda auflösbare Theil der ursprunglichen Substanz schmolz nach dem Umkrystallisiren constant bei 191°; die Löslichkeit stimmte mit der der i-Isocamphersäure, welcher sie auch übrigens äusserlich gänzlich gleich war, überein. Die Identität wurde noch dadurch bestätigt, dass sie beim Erhitzen in das Anhydrid der i-Camphersäure (Schmelzpunkt 221°) übergeführt, und aus diesem wieder die i-Camphersäure (Schmelzpunkt 202—203°) regenerirt wurde.

Die Thatsache, dass sich die ursprungliche i-Camphersäure, bei ihrer Bearbeitung nach der Angabe von CHAUTARD, zum kleineren Theil in die isomere i-Isocamphersäure verwandelt, erscheint allerdings unerwartet aber keineswegs unerklärlich. Wenn man sich erinnert, dass die Esterificirung in Gegenwart konc. Schwefelsäure vierlief, so wird die Umlagerung auf die Einwirkung dieses kräftigen Reagenzes zurückzuführen sein.

Die zweite inactive Camphersäure von CHAUTARD stellt also ein Gemenge dar und ist deshalb aus der Zahl der existirenden Camphersäuren zu streichen.

Die zweite inactive Camphersäure von WREDEN.

Nach WREDEN [1]) soll, beim häufigen Umkrystallisiren der von ihm erhaltenen „Mesocamphersäure" oder bei längerem Kochen derselben mit stark verdünnter Salzsäure, eine neue Modification der Camphersäure entstehen, die ebenfalls inactiv ist und den Schmelzpunkt 160° besitzt. Sonst wäre sie, ihren Eigenschaften nach, der gewöhnlichen Camphersäure ähnlich. Kein anderer Forscher hat dieselbe später beschrieben.

Die Beobachtung FRIEDELS (vergl. S. 56), dass die Mesocamphersäure beim Umkrystallisiren in d-Camphersäure und l-Isocamphersäure zerfällt, liess schon berechtigten Zweifel gegen die Angaben WREDENS aufkommen. Da aber bei der anderen, oben angegebenen Art der Darstellung, beim Kochen mit verdünnter Salzsäure, eine neue Säure vielleicht entstehen könnte, wurde dieser Theil des WREDEN'schen Versuches wiederholt.

Ich ging dabei von einer „Mesosäure" aus, die durch Zusammenmischen

[1]) Annalen der Chemie. *163*, 330.

gleicher Theile d-Camphersäure und l-Isocamphersäure erhalten wurde, und liess die Mischung mit überschüssiger verdünnter Salzsäure (70 cm^3 Wasser und 5 cm^3 Salzsäure von specifischem Gewicht 1,2) während 62 Stunden kochen. Die aus der Lösung beim Stehen zuerst abgeschiedenen Krystalle waren körnig, wie bei dem Umkrystallisiren der Mesosäure gewöhnlich, und zeigten keinen scharfen Schmelzpunkt; sie fingen bei etwa 135° zu schmelzen an, aber erst gegen 160° verflüssigten sie sich völlig. Die zweite Krystallisation zeigte das Aussehen der von WREDEN beschriebenen „Mesocamphersäure" und schmolzen viel niedriger, bei etwa 105°. Die beiden Krystallfractionen und der in der letzten Mutterlauge vorhandene Rest wurden zusammengemischt und mit Acetylchlorid in der Kälte behandelt. Hierbei entstand wieder, zu fast gleichen Theilen, ein Anhydrid (Schmelzpunkt 220°), das beim Kochen mit Sodalösung in eine Säure, die den Schmelzpunkt 187° und das Drehungsvermögen der d-Camphersäure zeigte, und eine Säure, die unangegriffen blieb und in Soda löslich war; sie konnte durch den Schmelzpunkt (171—172°) und das Drehungsvermögen mit der l-Isocamphersäure identificirt werden.

Durch Kochen mit Salzsäure wird die „Mesosäure" also nicht verändert. Die zweite inactive Camphersäure von WREDEN ist demnach auch als einheitliche Substanz zu streichen.

Die inactive Camphersäure von JUNGFLEISCH.

Beim Erhitzen der d-Camphersäure mit wenig Wasser auf 180—220° verschwindet nach JUNGFLEISCH [1]) nach und nach die optische Activität und es entstehen zwei inactive Säuren, von denen die eine, welche mit der Mesocamphersäure WREDENS identisch wäre, bei niedriger Temperatur in überwiegender Menge entsteht, die andere aber eine neue Säure darstellen sollte. Das bei der genannten Temperatur gebildete Product enthält demnach die beiden Säuren. Beim Umkrystallisiren wird die andere, schwieriger lösliche Säure, die bei 280° die Hauptmenge ausmacht, zuerst ausgeschieden. Doch erhielt er keine der beiden Säuren vollkommen inactiv, was auf die Leichtigkeit, womit sich dieselben beim Auflösen resp. Umkrystallisiren spalten, beruhen soll.

---

[1]) Bulletin de la Soc. chim. de Paris. *19,* 290, 433, 530. Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1873,* 268, 680.

Um diese bei 280° in grösserer Menge entstehende Modification der Camphersäure näher zu studiren, wurde d-Camphersäure mit wenig Wasser und, um die Substanz besser aufzulösen, Eisessig längere Zeit auf 280° erhitzt. Das Product, welches Krystalle der „Mesocamphersäure" (mit dem Schmelzpunkt 112°) und daneben einzelne körnige Krystalle mit dem Schmelzpunkt 169—171° abschied, wurde wie üblich mit Acetylchlorid behandelt. Hierbei wurde sie in das Anhydrid der d-Camphersäure und in l-Isocamphersäure gespalten.

Auch diese Säure von JUNGFLEISCH stellt demnach ein Gemenge zweier Camphersäuren dar.

Die inactive Camphersäure von ARMSTRONG und TILDEN.

Die genannten Forscher erhielten [1]) durch die Einwirkung von Schwefelsäure auf linksdrehendes Terpentinoel ein Gemenge von Kohlenwasserstoffen, aus welchen sie durch fractionirte Destillation in inactives Camphen isolirten. Bei der Oxydation desselben entstand ein inactiver Campher, der mit Salpetersäure oxydirt in normaler Weise in eine inactive Camphersäure verwandelt wurde. Ihr Schmelzpunkt wird auf 202° angegeben. Beim Erhitzen bildet sie ein Anhydrid von Schmelzpunkt 223°; das Anhydrid kann in eine Säure zurückverwandelt werden, die wieder über 200° schmilzt.

Durch die Gefälligkeit des Herr Professor TILDENS war es mir möglich, ein von ihm und ARMSTRONG dargestelltes Originalpräparat, nämlich den Campher, bei meiner Untersuchung zu benutzen. Dieser wurde mit Salpetersäure zu der entsprechenden Camphersäure oxydirt. Sie zeigte durchaus die Eigenschaften der i-Camphersäure, indem sie inactiv war, bei 202° schmolz und beim Erhitzen in ein Anhydrid vom Schmelzpunkt 220—221° übergeführt werden konnte. Die daraus regenerirte Säure war wieder i-Camphersäure, mit ihrem Schmelzpunkt 202—203°.

Eine andere Säure als diese war nicht vorhanden.

Die inactive Camphersäure von ARMSTRONG und TILDEN besteht also aus i-Camphersäure.

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1879*, 1756.

Die inactive Camphersäure von MARSH und STOCKDALE.

Beim Erhitzen des Hydrochlorides von rechtsdrehendem Pinen mit Natriumacetat und Eisessig auf etwa 250° erhielten MARSH und STOCKDALE [1]) das Acetat eines inactiven Borneols. Wenn dieses Borneol, das sie nach dem Verseifen mit alcoholischem Kali isolirten, oxydirt wurde, entstand eine Camphersäure, von der nichts Weiteres angegeben wird, als dass sie inactiv sei.

Bei Wiederholung dieser Arbeit wurde viel bei etwa 160° siedendes Camphen und eine über 190° siedende Fraction erhalten, die in der angegebenen Weise auf Borneol verarbeitet wurde. Das rohe Borneol oxydirte ich nachher mit Salpetersäure, und erhielt so eine Säure, die ziemlich unrein war, weil das Borneol noch Condensationsproducte von dem Pinenhydrochlorid enthielt. Um sie zu reinigen, wurde sie mit Acetylchlorid behandelt und somit in ein Anhydrid übergeführt, das bei 220—221° schmolz und wie i-Camphersäureanhydrid krystallisirte. Dieses wurde weiter durch Kochen mit Sodalösung in die entsprechende Säure verwandelt; sie war inactiv und nach dem Äusseren der i-Camphersäure durchaus ähnlich. Der Schmelzpunkt wurde bei 202—203° gefunden.

Derjenige Theil der rohen Säure, welcher nach dem Behandeln mit Acetylchlorid intact blieb und später mit Sodalösung entfernt wurde, war unbedeutend und von schmieriger Consistenz. Daraus eine einheitliche Substanz zu gewinnen, erwies sich unmöglich, und ist ihre Bildung wahrscheinlich auf Verunreinigungen des Ausgangsmaterials zurückzuführen.

Die vorliegende Säure von MARSH und STOCKDALE stellt also auch i-Camphersäure dar.

Aus dem Vorstehenden geht nun hervor, dass von den angegebenen 13 Camphersäuren *nur 6 wirkliche isomere, nämlich vier optisch active und zwei inactive Modificationen existiren.* Jene sind *die gewöhnliche rechtsdrehende Camphersäure, die linksdrehende Camphersäure von CHAUTARD, die l-Isocamphersäure von FRIEDEL* und *die rechtsdrehende isomere Camphersäure von JUNGFLEISCH;* die inactiven sind *die Paracamphersäure von CHAUTARD* und *die zweite inactive Camphersäure von JUNGFLEISCH.*

Die erwähnten Säuren gehören nach dem Mitgetheilten zwei verschiedenen Reihen an, je aus zwei zusammengehörigen, activen und einer inactiven

[1]) Journ. chem. Society. *1890*, 964.

bestehend. Betreffend der Nomenclatur, die schon theilweise in der obigen Zusammenstellung benutzt wurde, sei hier hervorgehoben, dass für diejenige dieser Reihen, wozu die gewöhnliche Camphersäure gehört, der Namen Camphersäure beibehalten wird, während es angemessen erscheint, der anderen Reihe die von FRIEDEL früher für eine der zugehörigen Säuren gewählte Benennung Isocamphersäure zuertheilen. Nach der allgemein angenommenen Nomenclatur von E. FISCHER für optisch isomeren Substanzen wird weiter den drei zugehörigen Säuren die Präfixe *d-*, *l-* und *i-* beigegeben.

An dieser Stelle ist zunächst in Erwägung zu ziehen, ob nicht die Existenz der zwei Camphersäurereihen auf eine structurelle Verschiedenheit beruhen könnte, indem dieselbe vielleicht durch die Formeln

$$1)\ C_8H_{14}\begin{cases} COOH \\ COOH \end{cases} \quad \text{und} \quad 2)\ C_8H_{14}\begin{cases} C(OH)_2 \\ CO \end{cases}\!\!>O$$

ihre Erklärung finden würde. Diese Möglichkeit muss nämlich berücksichtigt werden, was früher nicht gethan wurde, weil die später folgenden Schlüsse sonst völlig werthlos wären. Man hat nämlich auch bei anderen Dicarbonsäuren, die leicht in Anhydride übergehen, diese Art von Isomerie angenommen [1]), und sogar in einigen ihrer Derivate, wie z. B. bei der Phtalsäure und der Tetrachlorphtalsäure durch GÄRBE [2]), nachgewiesen.

Nach dieser Anschauung könnten die Säuren der Camphersäurereihe nach dem Typus 2), diejenigen der Iso-reihe nach dem Typus 1) zusammengesetzt sein. Der leichte Übergang der d- und l-Camphersäure in l- und d-Isocamphersäure und umgekehrt, wurde dadurch leicht seine Erklärung finden, sowie der Umstand, dass d-Camphersäurechlorid, beim Zersetzen mit wenig heissen Wassers [3]), theilweise in l-Isocamphersäure übergeht, dass ferner das aus d-Camphersäure entstehende l-Bromcamphersäureanhydrid bei seiner Reduction mit Zinkstaub und Eissessig l-Isocamphersäure liefert u. s. w. Auch

---

[1]) Vgl. die siebente Auflage von RICHTERS organ. Chemie, herausgegeb. von R. ANSCHÜTZ. I S. 446, 453 u. Annalen der Chemie. *254*, 168; *259*, 137.

[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1883*, 860.

[3]) MARSH. Chemical News. *60*, 307.

die ungleiche optische Activität würde sich gut durch diese Annahme erklären lassen.

Dennoch scheitert diese Erklärungsweise an folgenden Umständen.

Erstens ist zu erwähnen, dass die beiden oben angeführten Typen zweier zusammengehöriger Säuren, z. B. d-Camphersäure und und l-Isocamphersäure, ein gemeinsames Anhydrid

$$C_8H_{14}\begin{matrix} \diagup CO \diagdown \\ \diagdown CO \diagup \end{matrix}O$$

haben müssen. In den That liefern die genannten Säuren beim Erhitzen dasselbe Anhydrid, obwohl mit ungleicher Leichtigkeit. Aber dieses Anhydrid gehört nur der d-Camphersäure an, da es beim Kochen mit Wasser vollständig in dieselbe übergeht; von l-Isocamphersäure bildet sich keine Spur. Andererseits müsste das Anhydrid, wenn es den beiden Säuren angehörig wäre, auch bei niedriger Temperatur, wie beim Kochen mit Acetylchlorid, sowohl aus d-Camphersäure, wie aus l-Isocamphersäure entstehen. Dies trifft auch nicht zu, indem die letztgenannte Säure es nicht liefert.

Auch das Verhalten des Phosphorpentachlorids zu den beiden Säuren lässt sich schwierig mit einer solchen Annahme vereinigen. Die d-Camphersäure geht beim Behandeln mit diesem Reagenz zuerst quantitativ in das Anhydrid über, und erst bei mehrstündiger Einwirkung des zweiten Molekyls erfolgt die Chloridbildung. Da nun das Clorid nach Marsh (l. c.) beim Zersetzen mit Wasser in eine Mischung der ursprünglichen Säure mit l-Isocamphersäure übergeht, würde man umgekehrt erwarten, dass sich die letzgenannte Säure unter dieselben Erscheinungen, also unter intermediäre Anhydridbildung, in ein Chlorid umwandle, die wieder eine Mischung der beiden Säuren beim Zersetzen mit Wasser geben würde. Dem ist aber nicht so. Die l-Isocamphersäure geht ohne Anhydridbildung binnen kürzester Zeit in ihr Clorid über. Dieses giebt bei Einwirkung von Wasser die ursprüngliche Säure zurück, und keine d-Camphersäure tritt auf.

Weiter liefert die Camphansäurebildung ein Beleg für die Unwahrscheinlichkeit der obigen Annahme. Unter Berücksichtigung derselben käme der d-Camphersäure die obige Dihydroxylformel 2) zu. Das Bromcamphersäureanhydrid würde darnach die gewöhnliche Formel $C_8H_{13}Br\begin{matrix} \diagup CO \diagdown \\ \diagdown CO \diagup \end{matrix}O$ besitzen,

aber die bei der Camphansäurebildung intermediär auftretende Bromcamphersäure müsste durch die der d-Camphersäure entsprechende Formel

$$C_8H_{13}Br \begin{matrix} \diagup C(OH)_2 \\ \diagdown CO \end{matrix} \rangle O$$

ausgedrückt werden, da diese beiden Säuren unzweifelhaft derselben Reihe angehören. Demnach käme wieder der Camphansäure die Constitution

$$C_8H_{13} \begin{matrix} \diagup C(O)(OH) \\ \diagdown CO \end{matrix} \rangle O$$

zu, was mit ihrem Verhalten als wahre Carbonsäure schlecht übereinstimmt.

Wenn man diese Gründe als noch nicht genügend bindend hinstellte, lässt sich die Unrichtigkeit der Formel

$$C_8H_{14} \begin{matrix} \diagup C(OH)_2 \\ \diagdown CO \end{matrix} \rangle O$$

für d-Camphersäure durch die von BRÜHL [1]), von FRIEDEL [2]) und von HALLER [3]) gemachten Beobachtung, dass jene Säure *zwei Reihen saurer Ester*, die s. g. orto- und allo-Ester, zu bilden vermag, mit Bestimmtheit nachweisen. Die obige Formel bietet nun keine Möglichkeit dafür, indem die beiden darin vorkommenden Hydroxyle structuridentisch sind, wohl aber ist diese Thatsache mit der Dicarboxylformel

$$C_8H_{14} \begin{matrix} \diagup COOH \\ \diagdown COOH \end{matrix}$$

vereinbar, da in diesem Falle die Carboxyle an verschiedenartig situirte Kohlenstoffatome gebunden sein können.

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellschaft. *1892*, 1797.
[2]) Comptes rendus. *113*, 825.
[3]) Ebendaselbst. *114*, 1516.

Es folgt hieraus, dass die Säuren der Camphersäure- und Isocamphersäurereihe structuridentisch sein müssen, dass also ihre Ungleichheit auf eine verschiedenartige Configuration zurückzuführen ist.

Ehe ich zur Besprechung der Resultate übergehe, die sich aus dem Vorstehenden ergeben, ist es nöthig klarzulegen, ob die auf die van't Hoff-Le Bel'sche Theorie fussenden, stereochemischen Verhältnisse bei ringförmigen Verbindungen die nämlichen sind, wie bei Körpern mit offener Kette. Speciell ist nachzusehen, ob die Asymmetrie der ringbildenden Kohlenstoffatome der gleichen Anzahl optischer Isomeren entspricht, wie diejenige bei aliphatischer Bindung; dies ist nicht ohne Weiteres anzunehmen, da in einer ringförmig angeordneten Kette Complicationen durch die darin vorhandene geometrische Isomerie, welche auf die von Baeyer entdeckte und von ihm als relative Asymmetrie bezeichnete Erscheinung beruht, vielleicht vorkommen können. Auch wegen anderer Erwägungen, die später auseinandergesetzt werden, war ein derartiges Studium vermittelst Modellen von Interesse. Für einzelne Fälle hat wohl van't Hoff [1]) hierauf bezügliche Angaben geliefert, die indess für meine Zwecke ungenügend waren.

Zur Stereochemie ringförmiger Gebilde.

Die Polymethylene stellen naturlich für den genannten Zweck ein geeignetes Material dar. Unter ihnen wählte ich einerseits das Tetramethylen, weil es ein einfacher constituirtes Gebilde darstellt, und andererseits einige Fälle substituirter Penta- und Hexamethylene. In Tetramethylen werden zunächst Substitutionen mit ein, zwei, drei, in gewissen Fällen auch vier Gruppen fingirt, und die Resultate mittelst der Modelle klargelegt. In allen den angegebenen Fällen wird die allgemein angenommene Voraussetzung gemacht, *dass die Kohlenstoffatome des Ringes in einer Ebene gelegen sind;* ohne diese Annahme wäre überhaupt eine derartige Besprechung erfolglos.

A. Einmalige Substitution.

Die Einführung eines Substituenten X verursacht selbstverständlich *keine Asymmetrie.* Einzige Form [2]) C_4H_7X:

---

[1]) Die Lagerung der Atome in Raume. *1894.* S. 83 ff.

[2]) Ich benutze die von van't Hoff gebrauchte bildliche Darstellung der Isomeren, nur werden die Wasserstoffatome der Einfachheit wegen weggelassen.



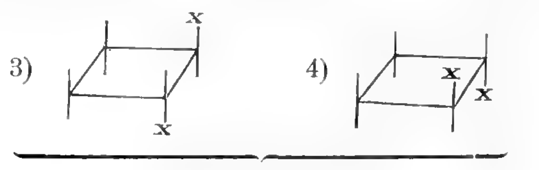
B. Zweimalige Substitution.

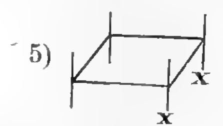
1) Die Substituenten sind gleich, $C_4H_6X_2$.

a) Die Substituenten befinden sich an einem Kohlenstoffatom: *keine Asymmetrie;* einzige Form



b) Die Substituenten befinden sich an verschiedenen Kohlenstoffatomen; *α)* an zwei in Bezug auf dem Kohlenstoffring *unsymmetrisch* (bei den Tetramethylenverbindungen in Stellung 1.2) gelegenen Kohlenstoffatomen. Hierbei tritt sowohl Tetraëder-Asymmetrie wie relative Asymmetrie auf. Mögliche Formen[1]) *drei:*



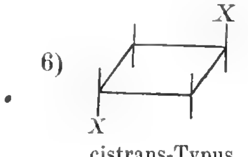


2 optisch isomere Formen: cistrans-Typus.

durch innere Compensation optisch inactiv; cis-Typus.

Hier liegt also der den Weinsäuren entsprechende Fall vor.

β) an zwei in Bezug auf dem Kohlenstoffring *symmetrisch* (bei Tetramethylen in Stellung 1.3) gelegenen Kohlenstoffatomen. Hierbei tritt keine Tetraëder-Asymmetrie, wohl aber relative Asymmetrie auf. *Zwei* inactive, nicht spaltbare Formen sind möglich:



cistrans-Typus.



cis-Typus.

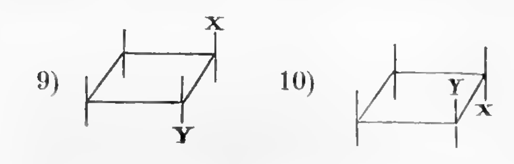
2) Die Substituenten sind ungleich, C_4H_6XY.

[1]) In der Anzahl der Formen wird nicht der spaltbare Typus mitberechnet, weil er kein Individuum darstellt. Durch Klammern an denjenigen der beigefügten Formeln, die eine Spiegelbild-Asymmetrie aufweisen, wird die Existenz dieses Typus angedeutet.

a) Die Substituenten sind mit einem Kohlenstoffatom verbunden. *Keine Asymmetrie.* Einzige Form:



b) Die Substituenten sind mit verschiedenen Kohlenstoffatomen verbunden; *α)* an zwei in Bezug auf dem Ringe *unsymmetrisch* gelegenen Kohlenstoffatomen. Mögliche Formen *vier,* sämmtlich optisch activ, die paarweise gleiches Drehungsvermögen besitzen und sich paarweise zu zwei inactiven Verbindungen racemisiren, die nach der relativen Asymmetrie isomer sind:



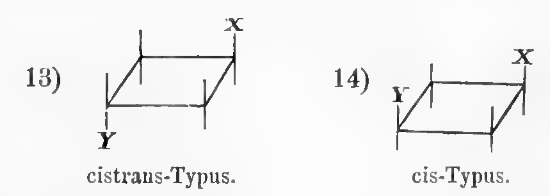
2 optisch isomere Formen; cistrans-Typus.





2 optisch isomere Formen; cis-Typus.

β) an zwei in Bezug auf dem Ringe *symmetrisch* gelegenen Kohlenstoffatomen. In diesem Falle tritt keine Tetraëder-Asymmetrie, aber relative Asymmetrie auf. Mögliche Formen zwei, die inactiv aber nicht spaltbar sind:

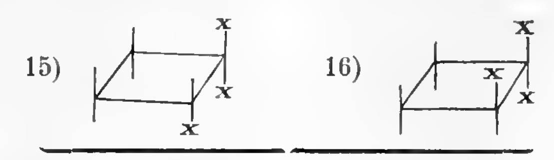


cistrans-Typus. cis-Typus.

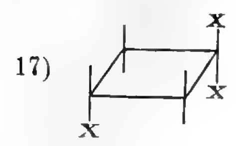
C. Dreimalige Substitution.

1) Alle Substituenten sind gleich, $C_4H_5X_3$.

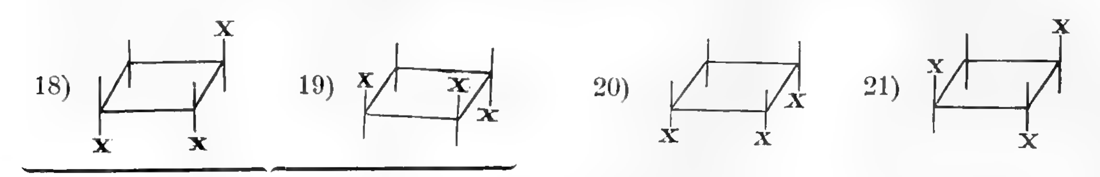
a) Zwei Substituenten sind mit einem und demselben Kohlenstoffatom, der dritte mit einem im Ringe *unsymmetrisch* gelegenen verbunden. Hierbei treten zwei optisch isomere Formen auf, die Spiegelbildisomerie aufweisen. Relative Asymmetrie tritt in diesem Falle nicht auf.



b) Zwei Substituenten sind mit demselben Kohlenstoffatom, der dritte mit einem *symmetrisch* gelegenen verbunden. Nur eine, nicht spaltbare Form ist möglich:

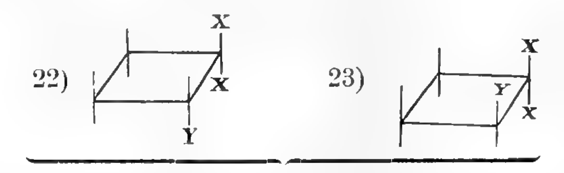


c) Die Substituenten sind an drei verschiedene Kohlenstoffatome gebunden. Dieser Fall entspricht den Trioxyglutarsäuren in der aliphatischen Reihe; es sind 4 Formen möglich, zwei optisch active Spiegelbild-Isomeren und zwei inactive Typen, die unspaltbar sind:

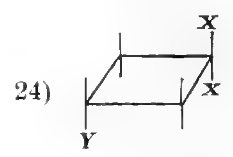


2) Von den Substituenten ist eins ungleich, $C_4H_5X_2Y$.

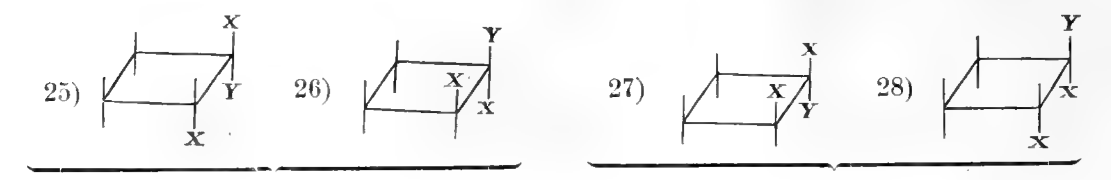
a) Die zwei gleichen Substituenten sind an *demselben* Kohlenstoffatom gebunden; *α)* der dritte liegt an einem anderen, jenem *unsymmetrisch* gelegenen Kohlenstoffatome. Zwei optisch active Formen möglich, die Spegelbildisomeren darstellen. Keine relative Asymmetrie tritt auf:



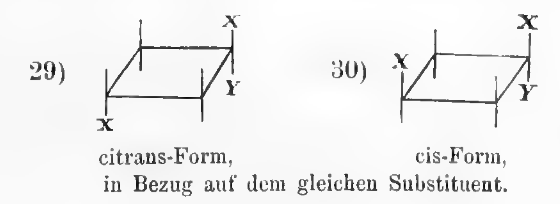
β) der dritte Substituent ist mit einem im Ringe *symmetrisch* gelegenen Kohlenstoffatome verbunden. Nur eine, nicht spaltbare Form ist möglich:



b) Zwei ungleiche Substituenten sind an einem Kohlenstoffatom, *α)* der dritte an einem anderen, jenem *unsymmetrisch* gelegenen gebunden. Vier optisch isomere Formen möglich, die paarweise zusammenhören und paarweise zu zwei racemischen Verbindungen zusammentreten:



β) der dritte Substituent ist an einem im Ringe *symmetrisch* gelegenen Kohlenstoffatom gebunden. Zwei optisch inactive und unspaltbare Formen möglich, die geometrisch isomer sind:



citrans-Form, cis-Form,
in Bezug auf dem gleichen Substituent.

Bevor ich zur Besprechung weiterer Fälle übergehe, will ich wegen der grösseren Anzahl jetzt auftretender Formen eine Vereinfachung der graphischen Darstellung der Formen einführen. Ebenso anschaulich wie durch die obigen Formeln lässt sich nämlich die Darstellung in viel einfacherer Art in der Weise durchführen, dass man die Ebene des Ringes durch eine Linie darstellt, die Substituenten in einer gewissen Reihenfolge aufzählt und über oder unter dieser Linie aufschreibt. Es empfielt sich, wie auch sonst gewöhnlich, die Aufzählung der Substituenten in der Richtung des Uhrzeigers vorzunehmen, oder, wenn Modelle angewendet werden, die Ebene des Kohlenstoffringes horizontal zu legen und von rechts nach links zu zählen. Folgende Beispiele mögen das Gesagte erläutern:

$= \frac{X\quad}{\quad Y\,X}$; $= \frac{X\,X\,Y}{\quad}$; $= \frac{\quad Y\quad V}{X\quad Z\quad}$

u. s. w.

Es ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die gleiche Bezeichnung auch auf den oben relatirten Fällen anwendbar ist; darnach wäre z. B. die Formel 25) oben gleich $\frac{X\quad}{Y\,X}$, 26) gleich $\frac{Y\,X}{X\quad}$. Wenn eine Methylengruppe sich zwischen zwei substituirten Kohlenstoffatome befindet, empfielt es sich dieselbe mit einem verticalen Strich zu bezeichnen. Die Formel 29) wäre z. B. gleich $\frac{X}{Y}\Big|\frac{\quad}{X}$, 30) gleich $\frac{X}{Y}\Big|\frac{X}{\quad}$ u. s. f.

Hiernach kehre ich zu der Fortsetzung zurück.

c) Alle drei Substituenten befinden sich an verschiedenen Kohlenstoffatomen; α) die Substituenten in *unsymmetrischer* Anordnung: Fall $X\,X\,Y$. 8 optisch isomere Formen möglich, die paarweise Spiegelbild-Isomerie aufweisen und demnach zu 4 optisch inactiven, racemischen Verbindungen zusammentreten können:

$$\underbrace{31)\ \frac{X\ X\ Y}{\qquad};\ 32)\ \frac{\qquad}{X\ X\ Y}.}\quad \underbrace{33)\ \frac{\quad X\ Y}{X\quad};\ 34)\ \frac{X\quad}{\quad X\ Y}.}\quad \underbrace{35)\ \frac{X\quad Y}{X};\ 36)\ \frac{X}{X\quad Y}.}$$

$$\underbrace{37)\ \frac{X\ X\quad}{\quad Y};\ 38)\ \frac{\quad Y}{X\ X\quad}.}$$

β) Die Substituenten befinden sich in *symmetrischer* Anordnung: Fall $X\ Y\ X$. In diesem Falle treten 4 Isomeren auf, zwei optisch active mit Spiegelbild-Isomerie, und zwei inactive, unspaltbare Typen:

$$\underbrace{39)\ \frac{\quad Y\ X}{X\quad};\ 40)\ \frac{X\quad}{\quad Y\ X}.}\quad 41)\ \frac{X\ Y\ X}{\qquad}.\quad 42)\ \frac{X\quad X}{Y}.$$

3) Alle Substituenten sind ungleich.

a) Zwei Substituenten sind an einem Kohlenstoffatom gebunden; *α)* der dritte Substituent ist mit einem, den vorigen *unsymmetrisch* gelegenen verbunden. Vier Isomeren möglich, die sämmtlich optisch activ sind und paarweise Spiegelbild-Isomerie aufweisen:

$$\underbrace{43)\ \frac{X\quad Z}{Y\quad};\ 44)\ \frac{Y\quad}{X\quad Z}.}\quad \underbrace{45)\ \frac{Y\quad Z}{X\quad};\ 46)\ \frac{X\quad}{Y\quad Z}.}$$

β) Der dritte Substituent befindet sich an einem im Ringe *symmetrisch* gelegenen Kohlenstoffatom. Zwei optisch inactive Formen möglich, die nicht spaltbar sind:

$$47)\ \frac{X}{Y}\Big|\frac{Z}{\ }.\quad 48)\ \frac{X}{Y}\Big|\frac{\ }{Z}.$$

b) Alle Substituenten befinden sich an verschiedenen Kohlenstoffatomen. Hierbei entstehen 8 optisch active Formen, die paarweise zu vier racemischen Verbindungen zusammentreten können:

$$\underbrace{49)\ \frac{X\ Y\ Z}{\qquad};\ 50)\ \frac{\qquad}{X\ Y\ Z}.}\quad \underbrace{51)\ \frac{\quad Y\ Z}{X\quad};\ 52)\ \frac{X\quad}{\quad Y\ Z}.}\quad \underbrace{53)\ \frac{X\quad Z}{Y};\ 54)\ \frac{Y}{X\quad Z}.}$$

$$\underbrace{55)\ \frac{X\ Y\quad}{\quad Z};\ 56)\ \frac{\quad Z}{X\ Y\quad}.}$$

D. Viermalige Substitution.

In diesem Falle werden die Complicationen noch grösser wie in den Vorigen. Unter den vielen möglichen Variationen mögen doch einige angeführt werden. Es wird angenommen, dass von den Substituenten je einer an einem verschiedenen Kohlenstoffatom befindet.

a) Die Substituenten sind gleich, $C_4H_4X_4$. Hierbei treten vier optisch inactive und unspaltbare Formen auf:

$$57)\ \frac{X\ X\ X\ X}{}.\quad 58)\ \frac{X\quad\ X\ X}{\ \ X\quad\quad}.\quad 59)\ \frac{X\quad\quad\ X}{\ \ X\ X\ \ }.\quad 60)\ \frac{X\quad X\quad}{\quad X\quad X}.$$

b) Von den Substituenten ist einer ungleich, $C_4H_4X_3Y$. Es sind 8 Formen vorauszusehen, nämlich 4 optische Isomeren, die paarweise Spiegelbild-Isomerie aufweisen, dazu 4 inactive und unspaltbare Formen:

$$61)\ \frac{X\ X\quad Y}{\quad\ X\quad};\ 62)\ \frac{\quad\quad X\quad}{X\ X\quad Y}.\quad 63)\ \frac{X\ X\quad\quad}{\quad\ X\ Y};\ 64)\ \frac{\quad\quad X\ Y}{X\ X\quad\quad}.$$

$$65)\ \frac{X\ X\ X\ Y}{}.\quad 66)\ \frac{X\quad\ X\ Y}{\ \ X\quad\quad}.\quad 67)\ \frac{X\ X\ X\quad}{\quad\quad\quad Y}.\quad 68)\ \frac{X\quad X\quad}{\quad X\quad Y}.$$

c) Alle Substituenten sind ungleich, C_4H_4XYZV. Die Anzahl der Isomeren beträgt 16, die alle optisch activ sind und paarweise Spiegelbild-Isomerie aufweisen:

$$69)\ \frac{X\ Y\ Z\ V}{};\ 70)\ \frac{}{X\ Y\ Z\ V}.\quad 71)\ \frac{\quad Y\ Z\ V}{X\quad\quad\quad};\ 72)\ \frac{X\quad\quad\quad}{\quad Y\ Z\ V}.$$

$$73)\ \frac{X\quad\ Z\ V}{\ \ Y\quad\quad};\ 74)\ \frac{\quad Y\quad\quad}{X\quad\ Z\ V}.\quad 75)\ \frac{X\ Y\quad\quad}{\quad\ Z\ V};\ 76)\ \frac{\quad\quad Z\ V}{X\ Y\quad\quad}.$$

$$77)\ \frac{X\ Y\ Z\quad}{\quad\quad\quad V};\ 78)\ \frac{\quad\quad\quad V}{X\ Y\ Z\quad}.\quad 79)\ \frac{X\quad\quad V}{\ \ Y\ Z\ \ };\ 80)\ \frac{\ \ Y\ Z\ \ }{X\quad\quad V}.$$

$$81)\ \frac{X\quad Z\quad}{\quad Y\quad V};\ 82)\ \frac{\quad Y\quad V}{X\quad Z\quad}.\quad 83)\ \frac{\quad\quad Z\quad}{X\ Y\quad V};\ 84)\ \frac{X\ Y\quad V}{\quad\quad Z\quad}.$$

Hierzu gebe ich noch einige Beispiele aus der *Penta-* und *Hexamethylen*reihe hinzu.

1) Pentamethylenderivate von dem Typus $C_5H_7X_2Y$; a) die beiden gleichen Substituenten sind an demselben Kohlenstoffatom (1), der dritte an einem zweiten Kohlenstoffatom (3) gebunden. Hierbei treten nur zwei optisch isomere Formen auf:

$$85)\ \frac{X|\,Y}{X|\ \ };\quad 86)\ \frac{X|\ \ }{X|\,Y}.$$

b) Die substituirenden Gruppen befinden sich an verschiedenen Kohlenstoffatomen (1.3.5), von denen die Atome (1.5) die gleichen Substituenten tragen und somit symmetrisch zu (3) gelegen sind. Vier Formen möglich, von denen zwei optisch isomer und racemisirbar, zwei inactiv und nicht spaltbar sind:

87) $\dfrac{X|\quad|\quad}{\quad|Y|X}$; 88) $\dfrac{\quad|Y|X}{X|\quad|\quad}$. 89) $\dfrac{X|Y|X}{\quad|\quad|\quad}$. 90) $\dfrac{X|\quad|X}{\quad|Y|\quad}$.

Dieselbe Zahl von Formen, die alle auch der gleichen Art sind, entstehen, wenn die gleichen Substituenten an den Ringatomen (1.3), der ungleiche an dem Kohlenstoff (2) gebunden sind. Auch im diesem Falle befindet sich nämlich der ungleiche Substituent symmetrisch zu den beiden Anderen.

2) Pentamethylenderivate vom Typus C_5H_7XYZ; a) von den ungleichen Substituenten sind zwei an demselben Kohlenstoffatom (1) gelegen, der dritte befindet sich an einem anderen Kohlenstoffatom (3). Es treten 4 optische isomere Formen auf, die sich paarweise zu zwei racemischen Verbindungen zusammensetzen können:

91) $\dfrac{Y|\quad}{X|Z}$; 92) $\dfrac{X|Z}{Y|\quad}$. 93) $\dfrac{Y|Z}{X|\quad}$; 94) $\dfrac{X|\quad}{Y|Z}$.

b) Die ungleichen Substituenten befinden sich an verschiedenen Kohlenstoffatomen, *α)* in der Lage (1.2.3): Die mögliche Anzahl Formen beträgt acht; sie sind paarweise optisch isomer und können demnach zu vier racemischen Verbindungen zusammentreten:

95) $\dfrac{X\;Y\;Z}{\quad}$; 96) $\dfrac{\quad}{X\;Y\;Z}$. 97) $\dfrac{\quad Y\;Z}{X\quad\quad}$; 98) $\dfrac{X\quad\quad}{\quad Y\;Z}$.

99) $\dfrac{X\quad Z}{\quad Y\quad}$; 100) $\dfrac{\quad Y\quad}{X\quad Z}$. 101) $\dfrac{\quad\quad Z}{X\;Y\quad}$; 102) $\dfrac{X\;Y\quad}{\quad\quad Z}$.

β) die ungleichen Substituenten befinden sich an Kohlenstoffatomen, die in der Lage (1.2.4) gelegen sind. Mögliche Formen wie im vorigen Falle acht:

103) $\dfrac{X\;Y|Z}{\quad\quad|\quad}$; 104) $\dfrac{\quad\quad|\quad}{X\;Y|Z}$. 105) $\dfrac{\quad Y|Z}{X\quad|\quad}$; 106) $\dfrac{X\quad|\quad}{\quad Y|Z}$.

107) $\dfrac{X\quad|Z}{\quad Y|\quad}$; 108) $\dfrac{\quad Y|\quad}{X\quad|Z}$. 109) $\dfrac{\quad\quad|Z}{X\;Y|\quad}$; 110) $\dfrac{X\;Y|\quad}{\quad\quad|Z}$.

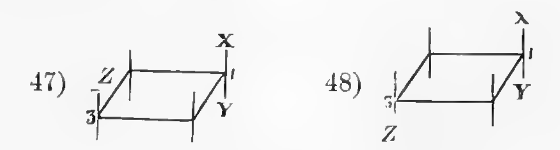
Unter den Hexamethylenderivaten sei nur ein Fall in Betracht gezogen. Es wird angenommen, dass zwei ungleiche Substituenten X, Y an den Kohlenstoffatomen (1,4), also in symmetrischer Stellung vorkommen, und zwei gleiche, aber mit den vorigen nicht identische Substituenten, Z, Z, an einem dritten Kohlenstoffatom (2, 3, 4 oder 5, die alle unter einander gleich sind) gelegen sind. Es sind vier Formen möglich, die alle optisch activ sind und paarweise zu inactiven Verbindungen zusammentreten können:

$$\underbrace{111)\ \frac{X\,Z|\,Y}{Z|\quad};\quad 112)\ \frac{Z|\quad}{X\,Z|\,Y}.}\qquad \underbrace{113)\ \frac{X\,Z|\quad}{Z|\,Y};\quad 114)\ \frac{Z|\,Y}{X\,Z|\quad}.}$$

Dieser Fall stellt das Menthon dar, wie seine Constitution jetzt angenommen wird.

Aus den mitgetheilten Beispielen geht nun, unter Voraussetzung einer planen Anordnung der Kernatome, zunächst hervor, dass *die Zahl der optischen Isomeren bei den Polymethylenen ganz dieselbe ist, wie bei offenen Ketten.* Wenn ein asymmetrisches Kohlenstoffatom vorhanden ist, ist das Auftreten zweier Spiegelbildisomeren möglich, wie die Formeln 15)—16), 22)—23), 85)—86) zeigen. Bei zwei asymmetrischen Ringatomen können vier optische Isomeren auftreten, was die Fälle 9)—12), 25)—28), 43)—46), 91)—94), 111)—114) veranschaulichen. Steigt der Anzahl der genannten Atome auf drei, vermehrt sich die Anzahl optischer Isomeren auf acht, wie aus den Formeln 31)—38), 49)—56), 95)—102), 103)—110) hervorgeht. Bei Eintritt noch eines asymmetrischen Kohlenstoffatoms wird die Anzahl derartiger Isomeren auf sechszehn vermehrt; ein Beispiel hierauf stellt der Fall 69) bis 84) dar. Es herrscht also auch bei den ringförmigen Kohlenstoffverbindungen die Regel, dass bei n asymmetrischen Kohlenstoffatomen 2^n optische Isomeren zu erwarten sind.

Wie aus mehreren der gegebenen Beispiele hervorgeht, ist es nicht immer gleich ersichtlich, wieviel asymmetrische Kohlenstoffatome vorhanden sind. Man wäre z. B. im Falle 47)—48), die ich hier von Neuem anschaulicher ausschriebe:



geneigt anzunehmen, dass die Kohlenstoffatome (1.3) in gewöhnlichem Sinne asymmetrisch wären, weil die Gruppe Z in den beiden Fällen eine andere Stellung zu den Gruppen $X\ Y$ einnimmt, und somit auch diese Gruppen zu jener. Dem ist doch nicht so, was hervorgeht, wenn man diese Typen an einer Modelle studirt. Der genannte Fall stellt einen Analogon zu den monosubstituirten Abkömmlingen der Fumar-Maleinsäure-Typus dar, die auch nach der Theorie in optisch activen Formen nicht auftreten können. Statt activer Formen treten nun auch in jenem Falle zwei inactive, unspaltbare Formen auf.

Als weiterer Beispiel mag unter Anderen der unter dem Falle 87)—90) gedachte angeführt werden:

$$\begin{array}{l} \overset{5}{C}H_2 - \overset{1}{C}HX \\ \qquad\qquad \searrow \\ \qquad\qquad\quad \overset{2}{C}HY \\ \qquad\qquad \nearrow \\ \underset{4}{C}H_2 - \underset{3}{C}HX \end{array}$$

Hier könnte man erwarten, dass, weil die Kohlenstoffatome (1.3) asymmetrisch sind, da jedes mit vier verschiedenen Gruppen vereinigt ist, nämlich mit H, X, CHY und mit dem Ringreste ($\overset{5}{C} - \overset{4}{C} - \overset{3}{C}$ resp. $\overset{4}{C} - \overset{5}{C} - \overset{1}{C}$), vier optisch Isomeren auftreten würden. Doch lässt die Modelle nur zwei Spiegelbild-Isomere voraussehen. Dies beruht nun darauf, dass die mit den beiden Kohlenstoffatomen verbundenen Gruppen mit einander structurell identisch sind. Weiter wäre man geneigt anzunehmen, dass der Kohlenstoff 2 asymmetrisch sei, da er vereinigt ist, einerseits mit H und Y, andererseits mit den beiden Bruchstücken des Ringes $-\overset{1}{C}HX\,.\,\overset{5}{C}H_2\,.\,\overset{4}{C}H_2-$ und $-\overset{3}{C}HX\,.\,\overset{4}{C}H_2\,.\,\overset{5}{C}H_2-$, die wohl ihrer Structur nach identisch sind, aber eine ungleiche Configuration im Sinne der Formeln:

$$\begin{array}{cccc} & & | & | \\ H - {}^1C - X & X - {}^3C - H & X - {}^1C - H & H - {}^3C - X \\ | & | & | & | \\ {}_5CH_2 & {}_4CH_2 & {}_5CH_2 & {}_4CH_2 \\ | & & | & \\ {}_4CH_2 & {}_5CH_2 & {}_4CH_2 & {}_5CH_2 \\ & | & | & | \end{array}$$

besitzen können. Dies trifft jedoch nicht zu; diese dem Kohlenstoff 2 theoretisch zukommende Assymmetrie kommt nicht zum Vorschein, in dem statt der vier zu erwartenden Formen zwei inactive Typen auftreten. Es liegt hier ein Fall von der Weinsäure- — oder vielmehr von der Trioxyglutarsäure-Typus vor. Andere Beispiele hierauf giebt es noch mehrere.

Derartige Complicationen sind immer mit dem Auftreten optisch inactiver, unspaltbarer Isomeren verbunden. In den beiden angeführten Fällen lassen sich nämlich zwei inactive Modificationen voraussehen. Weiter ist hervorzuheben, dass wo solche Fälle auftreten, immer *eine Symmetrie bei dem betreffenden Molekyle* vorhanden ist.

Es tritt hier die von Baeyer zuerst beobachtete relative Asymmetrie auf, und da sie eine optische Isomerie nicht hervorrufen kann, verschwinden die activen Formen vollständig oder theilweise.

Aus der früheren Darstellung geht weiter hervor, dass nicht nur die den asymmetrischen Kohlenstoffatomen am Nächsten gelegenen Ringkohlenstoffsysteme, sondern auch weiter Entfernerte in Betracht kommen, dass also der Ring die Function einer substituirenden Gruppe übernimmt und somit auch Asymmetrie bei einem oder mehreren seiner constituirenden Atomen hervorruft. Ein Körper z. B. von folgender Formel

$$C_3H_7 . HC \begin{array}{l} \diagup CH_2 - CO \diagdown \\ \diagdown CH_2 - CH_2 \diagup \end{array} CH - CH_3$$

welche das Menthon darstellt, enthält deshalb nicht, wie BECKMANN annimmt[1], nur *ein* asymmetrisches Kohlenstoffatom, sondern zwei. Das Vorstehende geht prägnant hervor z. B. aus dem Falle 85)—86), der einen Körper der Typus

$$\begin{array}{lll} \overset{5}{C}H_2 - \overset{1}{C}X_2 & & \\ & & CH_2 \\ \underset{4}{C}H_2 - \underset{3}{C}HY & & \end{array}$$

darstellt. Wenn hier nur die nächstliegenden Kohlenstoffsysteme in Betracht gezogen würden, wäre das Kohlenstoffatom (3) nicht asymmetrisch, weil es an zwei gleichen (Methylen-) Gruppen gebunden ist. Aber dennoch tritt Asymmetrie an der Modelle ein, weil die Gruppe $\overset{1}{C}X_2$ die Symmetrie des Ringcomplexes stört.

Bei den Polymethylenverbindungen übt demnach, unter Voraussetzung einer planer Anordnung der Ringkohlenstoffatome, *die Symmetrie beszw. Asymmetrie des betheiligten Ringsystemes einen entscheidenden Einfluss auf die Zahl der auftretenden optisch isomeren Formen.* Wie bei den Körpern aliphatischer Natur kommen hier die Wirkungen der Symmetrie resp. Asymmetrie *des ganzen Molekyl-complexes* zum Vorschein. Falls das Molekyl symmetrisch gebaut ist, verschwindet die sich auf diese Symmetrie beziehende Activität. Besitzt das Molekyl keine Symmetrie-ebene, tritt die vorauszusehende Anzahl optisch isomerer Formen auf. Auf diesem Umstand wird weiter in dem dritten Abschnitt ausführlicher eingegangen.

Auf Basis der vorangehenden Untersuchung könnte man nun geneigt sein, ohne Weiteres zur Entscheidung der wichtigen Frage, wieviel asymmetrische Kohlenstoffatome in der Camphersäure worhanden wären, schreiten. Wenn man nämlich im Vorigen nachsieht, findet man, dass die Fälle 9—12), 25)—28), 43)—46) und 111)—114) mit der experimentell festgestellten Thatsache, dass nur vier optisch isomere Camphersäuren, die sich paarweise racemisiren,

[1]) Annalen der Chemie *250*, 362.

vorhanden sind, übereinstimmen. Hieraus würde sich, unter Verallgemeinerung der aus den genannten Fällen zu ergebenden Schlüsse, der Satz ergeben, dass die Camphersäure zwei asymmetrische *C*-Atome enthält.

Allein, die angeführten Fälle behalten vorläufig ihre Richtigkeit nur unter der Voraussetzung, dass die asymmetrischen Kohlenstoffatome Theile des ringförmigen Kernes sind. Es haben schon früher einige Forscher, unter denen Marsh[1]), Friedel[2]), Oddo[3]), Bouveault[4]) zu nennen sind, gelegentlich bei ihren Betrachtungen über die Configuration der Camphersäuren diesen Punkt berührt; ihre Ansichten werden später im dritten Abschnitt ausführlicher dargelegt. Sie nehmen ohne Weiteres an, dass die asymmetrischen *C*-Atome im Ringkerne gelegen sind und benutzen sogar diese Annahme bei der Aufstellung ihrer Formeln für die Camphersäure.

Derjenige aber, der keine vorgefasste Meinung über die Vorzüge einer gewissen Camphersäureformel vertritt, wird das Problem etwas anders auffassen. Es gälte nicht, die Thatsachen an ein vorausbestimmtes Schema anzupassen, sondern zu untersuchen, welche Schlüsse in der That berechtigt sind.

Vor Entscheidung der Frage, wieviel asymmetrische *C*-Atome in der Camphersäure vorhanden, muss also eine andere zuerst beantwortet werden, diejenige nämlich, ob diese Atome Theile des Polymethylenringes sind oder nicht. Dies lässt sich durch die folgenden Erwägungen bestimmen. Sie fussen wieder auf die Annahme v. Baeyers, *dass der Kohlenstoffring einer jeden beliebigen Polymethylenverbindung in einer Ebene liegt.*

Gegen die Ansicht v. Baeyers steht die von Sachse[5]). Nach ihm wäre eine plane Anordnung des Kernes nur bei Tri-, Tetra- und Pentamethylenverbindungen anzunehmen. Für Hexamethylen dagegen nimmt er dasselbe nicht an, sondern denkt sich die constituirenden Atome des Ringes in zwei Ebenen symmetrisch vertheilt, mit abwechselnd auf- und absteigenden Verbindungslinien. Da aber nach diesem Schema auch die Monoderivate des Hexamethylens in zwei geometrisch isomeren Formen auftreten können, was niemals beobachtet worden ist, und da zweitens die geometrische Isomerie bei der Hexahydrophtalsäuren, Hexahydroisophtalsäuren und -terephtalsäuren mit derjenigen in den von Buchner unlängst[6]) untersuchten Trimethylenpolycarbon-

---

[1]) Chemical News LX. *1889*, 308.
[2]) Comptes rendus. *113*, 825.
[3]) Chem. Centralblatt *1892*. I 532.
[4]) Bulletin Soc. chim. (3). *1894*, 144, 147.
[5]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1890*, 1363.
[6]) Annalen der Chemie *284*, 208.

säuren, in welchen die plane Anordnung der drei Kernatome einzig möglich ist, durchaus übereinstimmt, so behält die Annahme v. Baeyers auch für die Hexamethylenverbindungen ihre Gültigkeit.

Über die Lage der asymmetrischen Kohlenstoffatome in Camphersäure.

In einer activen Polymethylenverbindung können natürlich die Atome, welche die Asymmetrie erzeugen, entweder Theile des Ringkernes sein, oder ausserhalb des Ringsystemes liegen. Wenn die zweite Möglichkeit zutreffen würde, kann die Zahl jener Atome, wenn eine Verbindung vorliegt, die, wie Camphersäure, nur in vier optisch activen Formen existirt und keine durch innere Compensation inactive Modificationen erzeugt, nicht grösser wie zwei sein [1]). Bei der Lösung der Aufgabe kommen also folgende drei Möglichkeiten in Betracht. Entweder enthält die Camphersäure zwei, ausserhalb des ringförmigen Kernes gelegenen, asymmetrischen Kohlenstoffatome, oder es liegt nur ein Kohlenstoff dieser Art vor, oder drittens, die optische Activität erzeugende Asymmetrie ist mit der Atomanordnung des Kernes verbunden.

I. Zunächst nehme ich an, dass zwei asymmetrische *C*-Atome ausserhalb des Ringsystemes gelegen sind, und untersuche, wie die in diesem Falle vorauszusehenden Möglichkeiten mit der Anzahl und Art der isomeren Camphersäuren übereinstimmen.

Entweder befinden sich dann beide in einer Seitenkette oder in zwei. Für den ersten Fall ist nun Folgendes zu berücksichtigen:

Wenn man in Campher, wie üblich, zwei condensirte Polymethylenkerne, die wenigstens zwei Kohlenstoffatome gemeinsam haben, annimmt, so bleiben, bei der Oxydation des Ketons zu Camphersäure, die Carboxyle getrennt gebunden und können nicht beide in einer und derselben Seitenkette auftreten. Auch ist der Fall nicht möglich, dass das eine Carboxyl an demjenigen *C*-Atom im Ringe gebunden wird, welches das asymmetrische System und auch das zweite Carboxyl tragende Seitenkette bindet. Unter dieser Voraussetzung wird, von den dem Kerne nicht angehörigen Kohlenstoffatomen, wenigstens fünf zum Aufbau der Seitenkette, welche die zwei asymmetrischen Atome trägt, und wenigstens eins zu dem zweiten Carboxyl verbraucht, in Allem also sechs. Da die Camphersäure zehn Kohlenstoffe enthält, bleiben also vier Kohlenstoffatome zum Aufbau des Ringsystemes übrig. Sie kann in diesem Falle ein Tri- oder Tetramethylenderivat sein.

---

[1]) Unter asymmetrischen Kohlenstoffatomen verstehe ich hierbei nur solche, die mit optischer Activität verbunden sind (vergl. hierüber weiter im dritten Abschnitt unter dem Aufschrift „molekulare Asymmetrie“).

Wenn die Camphersäure also ein nach Obigem constituirtes Derivat des Tetramethylens darstellt, so kommen folgende Formeln für dieselbe in Betracht:

$$1)\quad \begin{array}{l} CH_2 - CH\,.\,CH(CH_3)\,.\,CH(CH_3)\,.\,COOH \\ | \\ CH_2 - CH\,.\,COOH \end{array} \qquad 2)\quad \begin{array}{l} CH_2 - CH\,.\,CH(CH_3)\,.\,CH(CH_3)\,.\,COOH \\ |\quad\;\; | \\ COOH\,.\,CH - CH_2 \end{array}$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die längere Seitenkette die obige Gestalt $-CH(CH_3)\,.\,CH(CH_3)\,.\,COOH$ haben muss, wenn sie aus nur 5 C-Atome besteht und zugleich zwei asymmetrische Systeme einschliessen soll.

Was nun der Formel 1) betrifft, so kann ein darnach constituirter Körper in 16 optisch activen Modificationen auftreten. Auch eine Zusammensetzung, wie sie die Formel 2) darstellt, ist mit einer unzulässig grossen Anzahl optisch activer Formen, nämlich acht, verbunden. Keine von beiden kann also die Formel der Camphersäure darstellen.

Obwohl es weniger wahrscheinlich ist, dass die Camphersäure ein Trimethylenderivat darstellt, da ihr Kern durchaus resistent gegen Brom und Halogenwasserstoff ist, muss diese Eventualität hier dennoch in Betracht gezogen werden, nachdem kürzlich Buchner [1]) nachgewiesen hat, dass sich verschiedene Di- und Tricarbonsäuren des Trimethylens auch bei erhöhter Temperatur von Brom nicht angegriffen werden.

Gesetzt also, dass die Camphersäure ein Trimethylenderivat darstellte, worin sich die beiden asymmetrischen C-Atome in einer und derselben Seitenkette befinden, so enthält eine derartige Seitenkette wenigstens fünf Kohlenstoffatome, die mit den drei im Ringe und dem einen, dem anderen Carboxyl zugehörigen gleichen Atom, neun Kohlenstoffatome ausmachen. Es bleibt also eins übrig, das entweder als Methyl oder Methylen in das Gebilde

$$H_2C\begin{array}{l} \diagup CH\,.\,CH(CH_3)\,.\,CH(CH_3)\,.\,COOH \\ \diagdown CH\,.\,COOH \end{array}$$

eintritt, um eine Säure $C_{10}H_{16}O_4$ zu erzeugen. Dies kann nun in der Art stattfinden, dass der genannte Kohlenstoff entweder 1) die längere Seitenkette verlängert resp. vergrössert, ohne dass ihre Asymmetrie gestört wird, oder 2) die Bindung des zweiten Carboxyls vermittelt, oder 3) als Substituent in den ringförmigen Kern eintritt.

In den Fällen 1) und 2) sind je 16 optisch activen Formen vorauszusehen.

Im Falle 3) tritt das zehnte Kohlenstoffatom als Methyl entweder a) an diejenigen Kernatome, die die Seitenkette tragen, oder b) an das dritte Kernatom. Im ersten Falle sind wieder 16 optische Modificationen an der Modelle vorauszusehen, im zweiten steigt deren Anzahl auf 32.

Wie hieraus ersichtlich, kann die Camphersäure ein Trimethylenderivat, welches die beiden asymmetrischen Atome in einer und derselben Seitenkette enthält, nicht darstellen.

Wenn weiter angenommen wird, dass die beiden asymmetrischen Systeme wohl ausserhalb des ringförmigen Kernes liegen, dass sie aber in zwei verschiedenen Seitenketten auftreten, so ergiebt eine ähnliche Betrachtung wie oben Folgendes:

---

[1]) Annalen der Chemie. 284, 208.

Da die Camphersäure zehn Kohlenstoffatome enthält, sind wenigstens sechs derselben nöthig, um zwei asymmetrische Systeme, welche dann die Constitution $-CH(CH_3).COOH$ haben müssen, ausserhalb des Ringes zu erzeugen. Für den Kern bleiben somit vier übrig. In diesem Falle stellt die Camphersäure wieder eine Tetramethylen- oder Trimethylenverbindung dar. Wenn ein Tetramethylenderivat vorliegt, muss sie (siehe auch oben) eine der beiden Formeln besitzen

$$\begin{array}{l} CH_2 - CH.CH(CH_3).COOH \\ CH_2 - CH.CH(CH_3).COOH \end{array} \qquad \begin{array}{r} CH_2 - CH.CH(CH_3).COOH \\ | \quad\quad | \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\ HOOC.CH(CH_3).CH - CH_2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \end{array}$$

Im vorigen Falle sind zehn optische Isomeren und eine inactive Form möglich, in dem Letzteren kann man zwar vier active Verbindungen, aber ausserdem noch zwei inactive, nicht spaltbare Typen voraussehen.

Wenn zweitens eine Trimethylenverbindung vorliegt, so bleibt weiter, da der Kern hier nur aus drei Atomen besteht, ein Kohlenstoff übrig, der entweder als Methyl oder Methylen in die folgendermassen constituirte Verbindung

$$H_2C\left\langle\begin{array}{l} CH.CH(CH_3).COOH \\ | \\ CH.CH(CH_3).COOH \end{array}\right.$$

eintreten kann. Es sind hierbei drei Fälle möglich. Entweder wird 1) die eine Seitenkette vergrössert, ohne dass die Asymmetrie gestört wird, oder ein Methyl tritt als Substituent: 2) an eins der beiden Kernatome, die die Seitenketten tragen, oder 3) an das dritte Kernatom ein. Im ersten und zweiten Falle sind je 16 optisch isomere Formen möglich, im dritten ist eine grosse Anzahl activer und dazu noch inactive Modificationen vorauszusehen.

Es ist demnach unmöglich, dass die Camphersäure zwei asymmetrische Kohlenstoffatome ausserhalb des Ringes enthält, da in allen vorauszusehenden Fällen die Zahl der Isomeren zu gross ist.

II. Die Annahme wird gemacht, dass ein asymmetrisches *C*-Atom ausserhalb des Ringes liegt.

Da, wie erwähnt, zur Erzeugung eines asymmetrischen Systemes ausserhalb des Ringcomplexes wenigstens drei Kohlenstoffe nöthig sind, und ein vierter in dem zweiten Carboxyl vorhanden sein muss, so bleiben für den Kern sechs *C*-Atome übrig. Im vorliegenden Falle könnte also die Camphersäure eine Hexamethylen-, Pentamethylen-, Tetra- oder Trimethylenverbindung darstellen. Wenn man, wie früher, in Betracht zieht, dass die zweite Carboxyl-tragende Gruppe an demselben Ringkohlenstoff, welcher die asymmetrische Seitengruppe trägt, nicht gebunden sein kann, so bleiben folgende Fälle für die weitere Betrachtung übrig:

1) Es liegt eine Hexamethylenverbindung vor. Unter dieser Voraussetzung muss das zweite Carboxyl direct am Ringe gebunden sein.

a) Es wird angenommen, dass sich die asymmetrische Seitenkette $— CH(CH_3) . COOH$ (sie mag X genannt werden) in der Stellung (1.2) oder (1.3) zum zweiten Carboxyl (Y) befindet, dass also die betheiligten C-Atome des Ringes eine unsymmetrische Lage zu einander einnehmen, wie die folgenden Formeln zeigen:

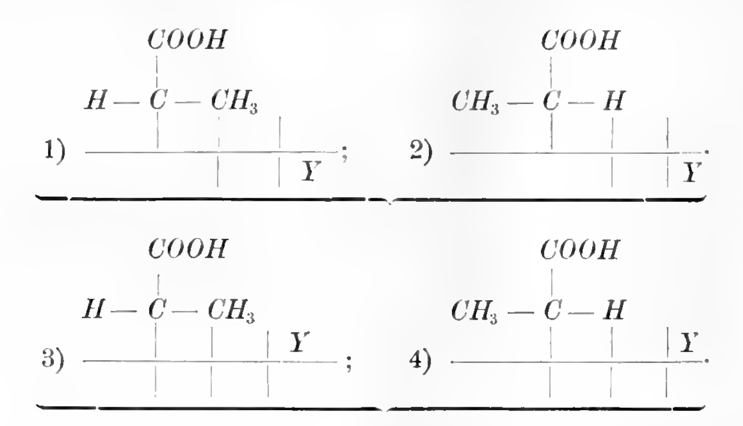
$$\begin{array}{l} CH_2 — CH_2 — CHX \\ | \qquad\qquad\quad | \\ CH_2 — CH_2 — CHY \end{array} \qquad \begin{array}{l} CH_2 — CH_2 — CHX \\ | \qquad\qquad\quad | \\ CH_2 — CHY — CH_2 \end{array}$$

In beiden diesen Fällen sind acht optisch active Formen möglich, da auch die beiden Ringatome asymmetrisch werden.

b) Wenn die Seitenkette in der Stellung (1.4) zum zweiten Carboxyl sich befindet:

$$\begin{array}{l} \quad CH_2 — CH_2 — CHX \\ \quad | \qquad\qquad\quad | \\ YCH — CH_2 — CH_2 \end{array}$$

sind vier isomere Formen möglich, die im Folgenden sämmtlich angeführt werden:



Diese vier Formen sind alle optisch activ und *haben alle das gleiche Drehungsvermögen*, weil nur ein einziges drehendes System vorhanden ist, und zwar drehen zwei nach rechts, und zwei nach links. *Je zwei können paarweise zu racemischen Verbindungen zusammentreten, aber nicht beliebig, sondern nur 1) mit 2) und 3) mit 4)*, dagegen nicht 1) mit 4) und 2) mit 3). Weiter lässt sich voraussehen, dass *die Formen 1) und 2) einerseits, 3) und 4) andererseits verschiedene physikalische Eigenschaften besitzen*, wie z. B. Schmelzpunkt, Siedepunkt u. s. w. Man ist deshalb gezwungen, dieselben als *vier verschiedene optisch isomere Formen zu betrachten.* Es liegt hier eine Combination der gewöhnlichen Tetraëder-Asymmetrie mit der relativen Asymmetrie von Baeyer vor. Der Fall zeigt zugleich, dass die Ringsysteme, auch was deren Spiegelbildisomerie betrifft, unter gewissen Umständen eine Ungleichheit mit den aliphatischen Systemen zeigen können. In dem letzgenannten Falle ist nämlich nur ein einziges in gewöhnlichem Sinne asymmetrisches C-Atom vorhanden; trotzdem treten vier optisch isomere Formen auf.

2) Es liegt eine Pentamethylenverbindung vor. Hierbei wird ein weiteres *C*-Atom disponibel, das entweder a) zur Vergrösserung der asymmetrischen Seitenkette, oder b) zur Bindung des zweiten Carboxyles verwendet wird, oder schliesslich c) als Methylgruppe im Ringe vorkommen kann.

a) Die asymmetrische Seitenkette wird vergrössert. Dabei ist es für meine Zwecke gleichgültig, ob die Seitenkette verlängert wird ($- CH_2 . CH(CH_3) . COOH$), oder die vorhandene Methylgruppe zu einem Aethyl wächst ($- CH(C_2H_5) . COOH$). In beiden Fällen ist das zweite Carboxyl als solches direct am Ringe gebunden.

Es kommen zwei Structurmöglichkeiten vor: die Substituenten, X, Y, befinden sich entweder in der Stellung (1.2) oder in (1.3).

$$H_2C\begin{array}{l} \diagup CH_2 - CHX \\ \qquad\qquad\quad | \\ \diagdown CH_2 - CHY \end{array} \qquad H_2C\begin{array}{l} \diagup CH_2 - CHX \\ \qquad\qquad\quad | \\ \diagdown CHY - CH_2 \end{array}$$

In beiden Fällen lassen sich acht optisch isomere Formen voraussehen. Hervorzuheben ist, dass ein derartiger Fall, wie in b) oben bei dem Hexamethylenring hier nicht vorkommen kann, weil bei Pentamethylen zwei Ringatome eine symmetrische Lage nicht einnehmen können.

b) Das zweite Carboxyl wächst zu der Gruppe $- CH_2 . COOH$. Hierbei sind die Verhältnisse wieder mit dem in vorigen Falle a) Dargelegten ähnlich, was ohne Weiteres ersichtlich. Es treten wieder acht active Modificationen auf.

c) Eine Methylgruppe ist in dem Ringsystem gebunden.

Um die Darlegung zu verkürzern, seien alle hierbei eintretenden Fälle auf einmal vorgeführt. Wenn die drei betheiligten, substituirenden Gruppen mit X, Y, Z, ohne Angabe ihrer Zuzammensetzung, bezeichnet werden, und zwei an demselben Kohlenstoff gebunden sind, genügen hierzu die zwei folgenden Typen:

$$H_2C\begin{array}{l} \diagup CH_2 - CXY \\ \qquad\qquad\quad | \\ \diagdown CH_2 - CHZ \end{array} \qquad H_2C\begin{array}{l} \diagup CH_2 - CXY \\ \qquad\qquad\quad | \\ \diagdown CHZ - CH_2 \end{array}$$

Weil eine der substituirenden Gruppen eine Asymmetrie einschliesst, ist in allen diesen Fällen das Auftreten acht activer Formen zu erwarten (vergl. die Formen 91)—94) an der Seite 72).

In den folgenden Fällen

$$H_2C\begin{array}{l} \diagup CH_2 - CHX \\ \qquad\qquad\quad | \\ \diagdown CHZ - CHY \end{array} \quad \text{und} \quad ZHC\begin{array}{l} \diagup CH_2 - CHX \\ \qquad\qquad\quad | \\ \diagdown CH_2 - CHY \end{array}$$

können je 16 optisch active Modificationen auftreten (vergl. die Formen 95)—102) und 103)—110) Seite 72),

3) Es liegt eine Tetramethylenverbindung vor. Es bleibt ein weiteres Kohlenstoffatom für andere Substitutionen übrig. Es können wieder die oben bei 2) angeführten Fälle eintreten: entweder wird die asymmetrische Seitengruppe vergrössert, oder es kommt zu der zweiten

Carboxylgruppe oder zu beiden ein Kohlenstoff hinzu, oder auch tritt ein Methyl als weiterer Substituent in den Ringkern ein.

a) Die asymmetrische Seitengruppe wird vergrössert. Hierbei ist es in stereochemischer Hinsicht gleichgültig, in welcher Weise die Vergrösserung geschieht, ob also die Seitengruppe die Gestalt $- CH_2 . CH_2 . CH(CH_3) . COOH$, $- CH_2 . CH(C_2H_5) . COOH$, $- CH(C_3H_7) . COOH$ oder $- C(CH_3)(C_2H_5) COOH$ u. s. w. erhält, wenn nur die vorfindliche Asymmetrie beibehalten bleibt. Das Carboxyl bleibt direct an einem Ringkohlenstoff gebunden. Es können wieder zwei Fälle vorkommen

$$\alpha) \begin{array}{l} CH_2 - CHX \\ | \\ CH_2 - CHY \end{array} \qquad \beta) \begin{array}{l} CH_2 - CHX \\ | \qquad\quad | \\ YCH - CH_2 \end{array}$$

Im ersten Falle treten acht active Modificationen auf. Der zweite Fall stellt ein Analogon zu dem oben (S. 80) angeführten 1 b) dar, wonach vier optisch isomere Formen erscheinen können, die sämmtlich die gleiche Drehung aufweisen müssen aber dennoch nicht beliebig, sondern nur paarweise racemisirt werden können. Mit Ausnahme der optischen Activität müssen je zwei dieser Formen andere physicalische Eigenschaften, wie die beiden übrigen, aufweisen.

b) Das zweite Carboxyl wächst zu den Gruppen $- CH_2 . COOH$ resp. $- CH_2 . CH_2 . COOH$. Es sind wieder dieselben Möglichkeiten vorhanden wie oben in a). Entweder treten acht active Formen auf, oder vier, die sämmtlich in der angegebenen Weise gleiches Drehungsvermögen besitzen.

Unter a) und b) gehört auch der Fall, dass die beiden Seitengruppen vergrössert werden. Die Zahl der möglichen Formen ist auch in diesem Falle die gleiche.

c) Noch eine weitere Methylgruppe ist als Substituent an dem Kern vorhanden. Hierbei ist eine grosse Anzahl Fälle möglich, die sich zunächst auf zwei Haupttypen zurückführen lassen: α) Der ringförmige Kern enthält entweder eine oder β) zwei Methylgruppen. Die erstgenannte Bedingung wird durch die Formeln

$$C_4H_5 \begin{cases} C_3H_6 . COOH \\ COOH \\ CH_3 \end{cases} \quad \text{und} \quad C_4H_5 \begin{cases} C_2H_4 . COOH \\ CH_2 . COOH \\ CH_3 \end{cases}$$

wozu noch die Formel

$$C_4H_5 \begin{cases} C_2H_4 . COOH \\ COOH \\ C_2H_5 \end{cases}$$

hinzukommt, erfüllt. Diese Formeln lassen sich allgemein durch das Schema C_4H_5XYZ ausdrücken. Nach dem a. d. Seite 70 Angegebenen, kann ein derartiges Tetramethylenderivat in den drei Formen

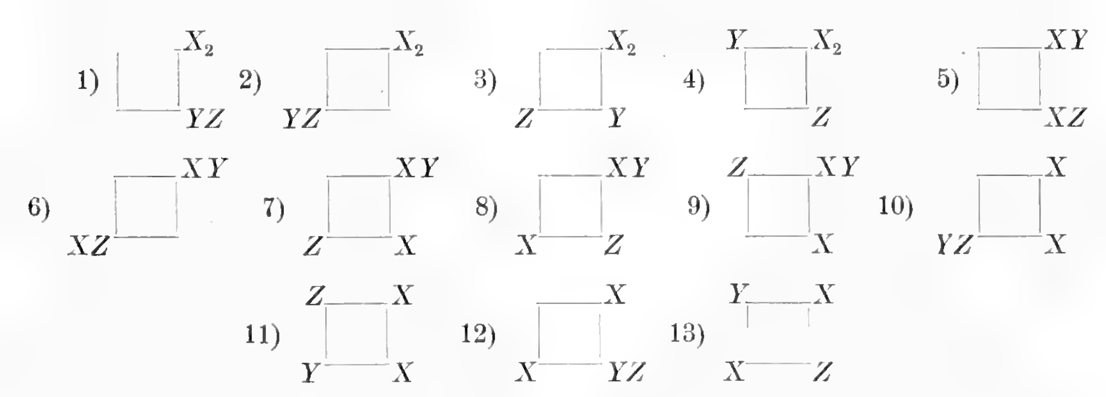
$$1)\ \begin{array}{c} CH_2 - CXY \\ | \qquad\quad | \\ CH_2 - CHZ \end{array} \qquad 2)\ \begin{array}{c} CH_2 - CXY \\ | \qquad\quad | \\ ZCH - CH_2 \end{array} \qquad 3)\ \begin{array}{c} CH_2 - CHX \\ | \qquad\quad | \\ ZCH - CHY \end{array}$$

auftreten, und da einer der drei Substituenten ein asymmetrisches System einschliesst, ist die Anzahl der auftretenden activen Modificationen die Folgende: Für die Form 1) *acht*, für die Form 2) *vier*, die alle das gleiche Drehungsvermögen aufweisen müssen (vergl. S. 80), und für die Form 3) *sechszehn* isomere, optisch active Typen.

β) Wenn zwei Methylgruppen an dem Ringkern gebunden sind, lässt sich Folgendes anführen. Zunächst ist zu bemerken, dass in diesem Falle ein tetrasubstituirter Tetramethylen

$$C_4H_4 \begin{cases} CH_3 \\ CH_3 \\ CH(CH_3) \, . \, COOH \\ COOH \end{cases}$$

von den allgemeinen Formel $C_4H_4X_2YZ$ vorliegt, worin X_2 die beiden Methyle, Y und Z die beiden anderen Gruppen, die in diesem Falle die Zusammensetzung $- CH(CH_3) \, . \, COOH$ und $COOH$ haben müssen, darstellen. Für eine Verbindung dieses Typus können folgende Structurfälle unterschieden werden:



Von diesen Formen kommen zunächst die mit 1), 2), 10) und 12) bezeichneten, welche die Gruppen YZ an *demselben* C-Atom enthalten, gar nicht in Betracht. Unter der Voraussetzung, das Campher ein dicyklisches Polymethylensystem darstellt, worin die beiden Kerne wenigstens zwei Kohlenstoffatome gemeinsam haben, kann nämlich in der Camphersäure ein Carboxyl an demjenigen C-Atom, welches mit der das zweite Carboxyl tragenden Seitenkette verbunden ist, *nicht* vorhanden sein. Unter den übrigen neun Fällen können nun, weil eine der Seitengruppe X, Y ein asymmetrisches System einschliesst, Folgende unterschieden werden: Die Formeln 3), 4) und 5) lassen acht, die Formeln 7), 8) und 9 sechszehn, die Formel 11) zwei und dreissig, die Formel 13) sechszehn, die Formel 6) nur vier optisch active Modificationen voraussehen. Die letztgenannte Formel stellt wieder den oben schon mehrmals behandelten Fall dar, wobei vier optisch active Formen, die sämmtlich das gleiche Drehungsvermögen aufweisen, auftreten können.

4) Es liegt eine Trimethylenverbindung vor. In diesem Falle bleiben drei Kohlenstoffatome für eine weitere Substitution in der einfachst denkbaren Verbindung.

$$H_2C\begin{matrix} \diagup CH \,.\, CH(CH_3) \,.\, COOH \\ | \\ \diagdown CH \,.\, COOH \end{matrix}$$

übrig. Der Einfachheit wegen unterscheide ich zwischen folgende Möglichkeiten, die alle denkbaren Fälle einschliessen:

A) Die drei Kohlenstoffe vergrössern die asymmetrische Seitenkette. Hierbei ist gleichgültig, ob dieselben als Methylene, Methyle, Aethyl oder Propyl eintreten, wenn nur die vorhandene Asymmetrie erhalten bleibt und kein weiteres asymmetrisches System entsteht. In jedem Falle sind acht Isomere vorauszusehen.

B) Die drei Kohlenstoffatome vergrössern die zweite Seitenkette. Wie dies geschicht, ist gleichgültig, wenn nur keine weitere Asymmetrie erzeugt wird. Zahl der optisch activen Formen acht.

Unter A) und B) gehören noch die Fälle, worin beide Seitenketten vergrössert werden. Wenn die ursprüngliche Asymmetrie erhalten bleibt, beläuft sich die Anzahl der optisch activen Modificationen wie vorher auf acht.

C) Die drei Kohlenstoffatome treten an einen Kernkohlenstoff substituirend heran: a) als Propyl(Isopropyl-)gruppe; *α)* bei einem der beiden Kohlenstoffe, die die Seitengruppen tragen: acht active Formen. *β)* bei dem dritten Kohlenstoff: sechszehn active Formen.

b) Als Methyl und Aethyl; *α)* die beiden Substituenten befinden sich an den beiden *C*-Atomen des Kernes, die mit den Seitengruppen verbunden sind: acht active Modificationen. *β)* Der eine Substituent befindet sich an einem Kohlenstoff letzgenannter Art, der zweite an dem dritten Kohlenstoffatom des Trimethylens: Zahl der activen Formen sechszehn. *γ)* Die beiden Substituenten sind mit dem dritten Trimethylenkohlenstoff verbunden: sechszehn active Formen.

c) Als drei Methyle; *α)* ein Methyl befindet sich an jedem Kohlenstoff des Kernes: sechszehn active Formen. *β)* Ein Methyl ist an einem der beiden Ringatome, die die Seitenketten tragen, zwei Methyle an dem dritten *C*-Atom des Ringes gebunden: acht active Formen.

D) Die drei Kohlenstoffatome treten theils in die Settenketten, in eine oder beide, theils substituirend an den ringförmigen Kern heran. Hierbei können zwei Fälle unterschieden werden, vorausgesetzt, dass die Seitengruppen nur ein asymmetrisches System einschliessen, nämlich: a) ein Substituent (Methyl oder Aethyl) wird mit dem Kern verbunden; Zahl der activen Formen entweder acht oder sechzehn (vergl. oben unter C a); *α)* und *β)*). b) zwei Methyle sind als Substituenten in Kern vorhanden; Zahl der activen Modificationen acht oder sechszehn (vergl. oben unter C b); *α)*, *β)* und *γ)*).

Aus dem Vorstehenden geht hervor, das keine andere Fälle mit der Zahl optischer Isomeren, die bei Camphersäure vorhanden ist, übereinstimmen, wie die folgenden: II, 1) b; 3) a *β)*; 3) b; 3) c 2); 3) c *β)* 6 angeführten, vorausgesetzt, dass das Drehungsvermögen der Camphersäuren und Isocamphersäuren *das gleiche* ist. Durch eine Combination von einem, ausserhalb eines symmetrisch gebauten (also nur Hexa- und Tetramethylen-)Ringkernes gelegenen, asymmetrischen System mit der von A. v. Baeyer entdeckten „relativen Asymmetrie" des Kernes, kann der eigenthümliche Fall eintreten, dass ein einziges [1]) asymmetrisches *C*-Atom vier gleichdrehende optisch active Formen erzeugt, die paarweise aber nicht beliebig racemisirt werden können, und paarweise verschiedenene physicalische Constanten aufweisen müssen. Er könnte vorläufig der Fall der „*optischen Doppelisomerie*" genannt werden.

Betreffend der Frage, ob die Glieder der beiden Camphersäurereihen in der That ein gleiches oder ungleiches Drehvermögen aufweisen, kann der auf Seite 52 geführte Nachweis, dass sie in absolut alcoholischer, 10-procentiger Lösung wirklich einen Unterschied hierin zeigen, nunmehr nicht genügen. Ein Lösungsmittel beeinflusst bekanntlich das Rotationsvermögen nicht unbedeutend bei verschiedenen Verbindungen. Eigentlich müsste die Bestimmung direct an den unverdünnten Substanzen in flüssigem Zustande vorgenommen werden. Da dies hier nicht durchführbar war, musste man sich mit der Bestimmung der Drehung in mehreren und möglichst ungleich zusammengesetzten Lösungsmitteln begnügen. Dies habe ich nun auch für Lösungen in *Aceton*, *Eisessig*, *Methylalcohol* und *Essigæther* durchgeführt; ich wählte nur solche Lösungsmittel, die die Darstellung verhältnissmässig konc. Lösungen zuliessen (Wasser war deshalb ausgeschlossen), und führte die Bestimmungen wieder in etwa 10 % Lösung aus. Als Vergleichsobjecte wählte ich die leichter zugänglichen d-Camphersäure und l-Isocamphersäure.

Die Untersuchung ergab Folgendes (auch die früher bestimmten Zahlen in absolutem Alcohol sind zum Vergleich angeführt):

Lösungsmittel.	Concentration.	d-Camphersäure. $[\alpha]_j$	l-Isocamphersäure. $[\alpha]_j$
Aceton	etwa 13 %	$+ 52{,}2^0$	$- 52{,}4^0$
Eisessig	„ 10 %	$+ 49{,}1^0$	$- 51{,}7^0$
Methylalcohol . . .	„ 10 %	$+ 49{,}8^0$	$- 48{,}4^0$
Essigæther	„ 10 %	$+ 53{,}6^0$	$- 52{,}9^0$
Aethylalcohol . . .	„ 10 %	$+ 49{,}7^0$	$- 48{,}9^0$


[1]) Die relative Asymmetrie erzeugt bekanntlich keine Activität.

Hieraus ist ersichtlich, dass das spec. Drehungsvermögen der beiden Säuren nicht nur mit dem Lösungsmittel variirt, sondern auch relativ ungleich ist. Diese Ungleichheit tritt schon bei Aceton und am Schroffsten bei Eisessig auf; in beiden Fällen tritt umgekehrt die l-Isocamphersäure stärker drehend wie d-Camphersäure auf, während jene in den übrigen angewandten Lösungsmitteln schwächer drehend ist.

Aus den Versuchen geht es allerdings weiter hervor, dass die Drehung in keinem der angegebenen Fälle absolut gleich gross ist. Hieraus zu schliessen, dass die beiden Säuren auch in unverdünntem Zustande ungleich drehen würden, wäre jedoch weniger angemessen. Die Erzielung einer Gleichheit sogar in Lösung wäre bei Anwendung passender Mischungen von Eisessig mit irgend einem der angewandten anderen Lösungsmitteln nicht undenkbar. Die oben in Betracht genommene Möglichkeit, dass die Camphersäure einen Fall mit „optischer Doppelisomerie" darstelle, tritt jetzt noch mehr hervor.

Dennoch lässt sich stereochemisch darthun, dass dieses für Camphersäure nicht zutrifft, und zwar auf zwei verschiedene Wege: erstens auf Grund des Verhalten des Camphers und zweitens auf Grund der Verhaltens der Camphersäure beim Umlagern.

Betrachten wir einen beliebigen Fall, der nach Obigem die „optische Doppelisomerie" aufweisen muss, z. B. die Formel

$$\begin{array}{ccc} H_3C & & CH(CH_3).COOH \\ & C & \\ H_2C & & CH_2 \\ & C & \\ CH_3 & & COOH \end{array}$$

die dem Fall II 3) c β) 6) S. 83 entspricht. Dem zugehörigen Campher käme dann eine der beiden Formeln

$$\begin{array}{ccccc} CH_3 & & & & CH_3 \\ & C & — & \mathbf{CH} & \\ H_2C & & CH_2 & & CO \\ & C & — & CH_2 & \\ CH_3 & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} CH_3 & & & & CH_3 \\ & C & — & \mathbf{CH} & \\ H_2C & & CH_2 & & CH_2 \\ & C & — & CO & \\ CH_3 & & & & \end{array}$$

zu — welche von beiden, ist für dem Zweck gleichgültig; wichtig ist nur, dass der einzige Kohlenstoff, welcher optische Asymmetrie erzeugt (in den Formeln kursiv bezeichnet), nur mit zwei anderen Atomen des Hexamethylen-

ringes gebunden ist. Von einem derartigen in einer cyklischen Kette vorhandenen System ist bekannt, dass es bei der Einwirkung geeigneter Agentien oder bei höherer Temperatur einer Umlagerung unterliegt; die Configuration wird unter Erzeugung der geometrisch isomeren Form geändert. Die Umwandlung der Borneole, der Menthone, der Dicarbonsäuren der Polymethylene u. s. w. sind Beispiele hierauf. Wenn nur ein einziger asymmetrischer Kohlenstoff, wie oben, vorhanden ist, und der betreffende Körper optische Activität zeigt, so fällt die geometrische Isomerie mit der optischen zusammen. Bei der Umlagerung müsste der optische Antipode entstehen; der Körper wurde sich inactiviren lassen.

Von den beiden, zugehörigen activen Modificationen des Camphers lehrten die auf eine event. Umlagerung gerichteten Untersuchungen Beckmanns[1]), dass sie in einander nicht überführbar sind. Sie behalten auch nach dem Erhitzen auf höhere Temperatur ihr Drehungsvermögen völlig ungeschwächt bei. Hieraus ist zu schliessen, dass das asymmetrische C-Atom im Campher nicht an zwei, sondern an drei Atomen des Polymethylenringes gebunden vorkommt. Dieser Umstand wird im dritten Abschnitt noch ausführlicher erörtert.

Wenn das asymmetrische C-Atom im Campher mindestens mit drei Ringatomen verbunden sein muss, so kann es in der Camphersäure, die durch das Schema

$$C_8H_{14}\left\langle\begin{matrix} CH_2 \\ | \\ CO \end{matrix}\right. \longrightarrow C_8H_{14}\left\langle\begin{matrix} COOH \\ \\ COOH \end{matrix}\right.$$

aus jenem entsteht, nicht in einer Seitengruppe vorkommen.

Dasselbe lässt sich aus der Untersuchung über die Umlagerungen der isomeren Camphersäuren schliessen.

Wählen wir nun wieder einen beliebigen Fall mit „optischer Doppelisomeri", zum Beispiel II 1) b) S. 80 aus, lässt sich dieser durch die Formel

$$\begin{array}{ccccc} & H & CH_2 - CH_2 & H & \\ & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & \\ & C & & C & \\ & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & \\ HOOC & & CH_2 - CH_2 & & CH(CH_3).COOH \end{array}$$

ausdrücken. Ein derartiger Körper kann die Umlagerung in zweierlei Art erleiden. Erstens wird sie der von Baeyer zuerst studirten cis-cistrans-Umla-

[1]) Annalen d. Chemie. *250*, 352.

gerung fähig sein. Wie ohne Weiteres ersichtlich, erfährt das Drehungsvermögen hierdurch keine Veränderung zur Grösse und Richtung. Zweitens kann das in der Seitengruppe befindliche asymmetrische System unter Umkehrung der Drehungsrichtung verändert werden. Welche Art der Umlagerung leichter erfolgt, ist von vorn herein nicht zu ersehen. Wohl aber lässt sich voraussehen, dass sich beide Reactionen vollziehen müssen. Alle bisher bekannten Polymethylendicarbonsäuren lassen sich nämlich in geeigneter Weise ziemlich leicht umlagern im Sinne der cis-cistrans-Isomerie. Und da ein Körper der obigen Zusammensetzung das asymmetrische *C*-Atom in aliphatischer Bindung enthält, ist auch seine Inactivirung (resp. Umwandlung zur Hälfte in den optischen Antipoden) zu erwarten [1]), gleichgültig welcher von den in Betracht kommenden Fällen gewählt sind.

Unter der Annahme, dass „optische Doppelisomerie“ bei der Camphersäure vorliegt, hätte man also bei genügend langem Erhitzen eine inactive Mischung zu erwarten, die aus einem Gemenge der *beiden racemischen Verbindungen* bestehen würde, gleichgültig welche Art der Umlagerung zuerst erfolgt. Allein, wenn die angewandten Versuchsbedingungen vielleicht nicht ausreichten, um die Umwandlung in beiden Richtungen herbeizuführen, müsste wenigstens die eine Art vorkommen, da die Camphersäure nachgewiesenermassen eine Umlagerung erfährt. Wenn also bei der angewandten Temperatur das eine geometrische Isomere weniger beständig wäre und somit spärlicher auftreten würde resp. gänzlich verschwände, so würde das Endproduct in diesem Falle *inactiv durch Racemation* sein. Wenn aber die Länge oder Intensität der Erhitzung nicht zur Umlagerung des asymmetrischen Systemes in der Seitengruppe genügte, würde man als Endproduct eine Mischung zweier optisch activen geometrisch isomeren Säuren, die ein gleich grosses *und zu gleicher Zeit auch ein gleichgerichtetes Drehungsvermögen* besitzen, erwarten. Schliesslich könnten diese drei Möglichkeiten vereinigt auftreten; dann wären *Mischungen von Racematen mit activen Verbindungen vorauszusehen.*

Wie weiter unten ausführlich dargelegt wird, wurde die Umlagerung sämmtlicher activer Camphersäuren unter ungleicher Dauer und Intensität der Erhitzung untersucht. Es stellte sich als ausnahmslose Regel heraus, dass *aus einer Modification der einen (Camphersäure- oder Isocamphersäure-) Reihe diejenige der anderen (Isocamphersäure- oder Camphersäure-) Reihe als einziges Umlagerungsproduct entsteht, die das entgegengesetzte Drehungsvermögen besitzt.*

---

[1]) Vergl. hierüber VAN'T HOFF, Lagerung der Atome im Raume II Aufl. S. 31, 48.

Racemische Verbindungen treten gar nicht auf. Derjenige Theil der beliebig gewählten Camphersäure, die die Umwandlung erlitt, war also vollständig in die entgegengesetzt drehende Modification verwandelt, was dem von van't Hoff theoretisch ermittelten Gesetz[1]) über den Gleichgewichtszustand einer Verbindung, die nur ein einziges asymmetrisches System enthält, wiederspricht; gleichzeitig hatte dieser Theil, und, was speciell zu bemerken ist, nur dieser Theil, der anderweitigen Umlagerung im Sinne der cis-cistrans-Isomerie erlitten.

Hieraus ergiebt sich, dass die Camphersäure nicht derartig constituirt sein kann, dass sie den Bedingungen für die „optische Doppelisomerie" entspricht. Es folgt aus dem Obigen dann weiter allgemein, dass sie ein asymmetrisches System in einer Seitengruppe nicht enthalten kann. Früher wurde schon bewiesen, dass sie auch nicht zwei asymmetrische Systeme ausserhalb des ringförmigen Kernes einschliesst. Somit kann der folgende wichtige Satz ausgesprochen werden:

Im Molekyle der Camphersäure sind die Bedingungen, welche ihre optische Activität hervorbringen mit dem Kohlenstoff des ringförmigen Kernes verknüpft.

Die obige Darlegung bietet ein weiteres Beispiel darauf, dass stereochemische Erwägungen zur Bestimmung der Structur organischer Verbindungen verwerthet werden können.

Die Zahl der asymmetrischen Kohlenstoffatome in der Camphersäure.

Nachdem somit bewiesen wurde, dass die in der Camphersäure auftretende Asymmetrie an dem Polymethylenringe gebunden ist, lässt sich nunmehr, unter Zugrundelegung des Obigen, die Zahl der asymmetrischen *C*-Atome in derselben ohne Weiteres ermitteln.

Ich gehe von der Voraussetzung aus, dass nur vier optisch active, isomere Camphersäuren existiren, die sich paarweise zu zwei inactiven Verbindungen racemisiren; ausser diesen sind keine andere, inactive Formen vorhanden.

Die SS. 65—75 geführte Untersuchung lehrt nun, dass die Polymethylenverbindungen bei planer Anordnung der Kernatome, was die Zahl der zu erwartenden, activen Modificationen betrifft, sich den aliphatischen Verbindun-

[1]) L. c. S. 32, 33.
[2]) Trans. chem. Soc. *1895*, 341.

gen vollkommen analog verhalten müssen. Beim Vorhandensein eines asymmetrischen Systems treten zwei active Formen an der Modelle auf, bei zwei Systeme dieser Art vier, bei drei acht u. s. w. Bei Symmetrie des Molekyles wird die Anzahl der Formen entsprechend vermindert. Unter Berücksichtigung der aus dem stereochemischen Lehre hervorgehenden Schlussfolgerungen erfolgt hieraus der folgende Satz, der den früher (S. 20) angegebenen vier Sätzen anzureihen wäre:

Die Camphersäure enthält, bei Unsymmetrie des Molekyls, zwei asymmetrische Kohlenstoffatome.

Dieser Satz behält seine Gültigkeit, bis neue Modificationen der Camphersäure entdeckt werden. In Anbetracht der vielen Arbeiten, die über Camphersäure vorliegen, und speciell der verhältnissmässig grossen Anzahl Umlagerungsversuche, die sowohl andere Forscher, wie ich selbst während dieser Untersuchung ausgeführt habe, erscheint indess seine Gültigkeit auch für die Zukunft gesichert. Er kann also nunmehr zum Ausgang weiterer Schlüsse dienen.

Bevor ich dazu übegehe, ist zu erwähnen, dass dieselbe Ansicht auch schon von anderer Seite ausgesprochen wurde. Dies konnte nur vermuthungsweise geschehen, da es an einer consequent durchgeführten Untersuchung mangelte. Übrigens standen die Thatsachen mit dieser Anschauung in Wiederspruch, da die Existenz der vielen inactiven Camphersäuren mit derselben nicht in Übereinstimmung zu bringen war. Erst durch die vorliegende Arbeit hat die Ansicht ihre experimentelle Bestätigung erhalten.

Brühl [1]) hat meines Wissens zuerst ausgesprochen, dass Camphersäure zwei asymmetrische Kohlenstoffatome enthält, indem er hervorhebt, das ausser einer rechtsdrehenden, einer linksdrehenden und einer durch Vermischen dieser beiden desactivirten Form noch eine vierte (inactive), die Mesocamphersäure von Wreden, existirt. Er weist weiter auf die Möglichkeit hin, dass noch eine fünfte, und vielleicht sogar eine sechste isomere Camphersäure existiren würde. Nachdem er hervorgehoben hat, dass in solchem Falle sechs optische Isomeren erwartet werden können, nämlich zwei zugehörige stärker drehende, zwei schwächer drehende und zwei racemische Säuren, knüpft er daran einige Bemerkungen über die Existensmöglichkeit einer durch innerer Compensation entstehenden weiteren Isomeren, die bei einer gewissen Orientirung der beiden drehenden Systeme entstehen könnte. Er schliesst seine Er-

---

[1]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1891*, 3413.

wägungen mit den Worten: „Es ist hier nicht der Ort, auf diese gerade bei der Camphersäure besonders komplicirten Erscheinungen, deren erneuerte und eingehendere Untersuchung manches Interessante zu Tage fördern könnte, näher einzutreten. Für den vorliegenden Zweck genügt es festzustellen, das der Zahl der bisher schon bekannten optisch verschiedenen Modificationen der Camphersäure mit Kekulé's Constitutionsformel absolut nicht vereinbar, mit der (von ihm zu der Zeit vertheidigten V. Meyer'schen) Tetramethylenformel dagegen leicht erklärlich ist".

In einer späteren Abhandlung [1]) kommt Brühl zu derselben Thema nochmals zurück, indem er einige neu beschriebene Modificationen der Camphersäure aufzählt, und das Vorhandensein zweier asymmetrischen Kohlenstoffatome nochmals hervorhebt.

Weiter hat Friedel [2]) bei der Aufstellung seiner Formel für Camphersäure (vergl. S. 11) unter Anderm angenommen, dass zwei asymmetrische Kohlenstoffatome in ihrem Molekyle vorhanden wären. Dasselbe stellt van't Hoff in seinen neueren Publicationen [3]) wiederholt als möglich vor. Er drückt sich doch, dem Stand der diesbezüglichen experimentellen Grundlage entsprechend, mit einem gewissen Vorbehalt aus.

Die Erkenntniss, dass das Molekyl der Camphersäure zwei asymmetrische Kohlenstoffatome enthält, kann zunächst zur weiterer Bestätigung der an S. 20 geübten Kritik über die Camphersäureformeln dienen. Von diesen werden folgende, welche entweder eine kleinere oder grössere Zahl solcher Atome enthalten, beseitigt: 2) Die von Hlasivetz, 4) die von Wreden [4]), 5) die von Kekulé, 8) die von Armstrong, 14) die von Marsh, 16) die von Collie, 18) die von Errera, 23) die von Bouveault und 25) die von Tiemann. Aus weiter unten klarzulegenden Gründen, wodurch das Verhältniss der Anzahl asymmetrischer Kohlenstoffatome im Campher zu derjenigen in Camphersäure näher erläutert wird, werden ebenso die folgenden Campherformeln unwahrscheinlich gemacht: 1) die von V. Meyer, 2) die von Hlasivetz, 5) die von Kekulé, 6) die von Blanshard, 8) die von Armstrong, 9) die von Flavitzky, 10) die

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1892*, 1797.

[2]) Comptes rendus. *113*, 825.

[3]) *Stereochemie* von van't Hoff-Meyerhoffer 1892. S. 41 u. 87. *Die Lagerung der Atome im Raume.* Zweite Auflage 1894. S. 41 u. 50.

[4]) Diese Formel enthält wohl 2 asymm. *C*-Atome, wegen der Symmetrie der Ringebene können aber nur zwei optische Isomeren entstehen.

von BALLO, 11) die von SCHIFF, 14) die von MARSH, 16) die von COLLIE, 17) die von ODDO, 18) die von ERRERA, 19) von unbekantem Autor, 20) von CAZENEUVE, 21) von ETARD, 23) die von BOUVEAULT, 24) die von GILLET und 25) die von TIEMANN.

Betreffend der Constitution der in Camphersäure vorfindlichen beiden asymmetrischen Systeme lässt die Untersuchung keine weitere Schlüsse ziehen, als dass diese ungleich sind. Dies erfolgt nämlich ohne Weiteres aus der Lehre über das asymmetrische Kohlenstoffatom in ihrer jetzigen Entwickelung, da vier optisch isomere Camphersäuren existiren.

Über die Beziehungen des Campher zu der Camphersäure wurde schon Eingangs angeführt, dass die Bildung der letzteren aus jenem einzig durch die Schema:

$$C_8H_{14}\left<\begin{matrix} CH_2 \\ | \\ CO \end{matrix}\right. + 3\,O = C_8H_{14}\left<\begin{matrix} COOH \\ \\ COOH \end{matrix}\right.$$

auszudrücken ist. Da in den beiden bei dieser Reaction theilnehmenden Gruppen $\diagup CH_2$ und $\diagdown CO$ keine Asymmetrie vorhanden ist, lässt sich der umgekehrte Schluss-satz ziehen, dass die Anzahl asymmetrischer Kohlenstoffatome im Campher der in der Camphersäure vorhandenen gleich ist. Hieraus folgt weiter, *dass der Molekyl des Camphers zwei asymmetrische Kohlenstoffatome einschliesst.*

Das Ergebniss steht nicht mit der Erfahrung im Einklang, indem nur zwei optisch active Campher bekannt sind, nämlich der gewöhnliche Rechtscampher und der von CHAUTARD entdeckte [1]) Linkscampher, welcher später von BECKMANN [2]) untersucht und als der optische Antipode des erstgenannten erkannt wurde. Diese beiden Körper treten zu dem racemischen i-Campher von HALLER [3]) zusammen. Auf dieser Umstand wird unten in dritten Abschnitt näher eingegangen. Ob der von ARMSTRONG und TILDEN [4]) aus inactivem Terecamphen durch Oxydation erhaltene, inactive Campher mit dieser racemischen Verbindung identisch oder structurisomer sei, lässt sich vorläufig nicht aus-

[1]) Jahresbericht. *1863*, 555.
[2]) Ann. d. Chemie. *250*, 353.
[3]) Comptes rendus. *105*, 68.
[4]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1879*, 1756.

sagen. Da er aus einem Camphen erhalten wird, könnte er sowohl die eine, wie die andere der beiden (jetzt als structurisomer gedachten) Formeln

$$C_8H_{11}\begin{matrix} \diagup CH_2 \\ \,\,| \\ \diagdown CO \end{matrix} \quad \text{und} \quad C_8H_{11}\begin{matrix} \diagup CO \\ \,\,| \\ \diagdown CH_2 \end{matrix}$$

haben. Aus beiden kann nämlich, bei weiterer Oxydation, die Formel der racemischen i-Camphersäure, die auch nach Obigem thatsächlich entsteht, hergeleitet werden.

III. Zur Configuration einiger Campher-verbindungen.

1. Über die Camphersäuren.

Durch ADOLF VON BAEYERS Untersuchungen über die hydrirten Abkömmlinge der Terephtalsäure und andere in para-Stellung substituirten Hexamethylenverbindungen, sowie durch die daran verknüpften theoretischen Betrachtungen, wurde die Möglichkeit einer geometrischen Isomerie — welche auf die in ähnlichen Fällen auftretende s. g. *relative Asymmetrie* beruht — bei Verbindungen mit geschlossenem Kern erwiesen. v. BAEYERS Betrachtungen fussen auf der Annahme, dass die Atome des Kohlenstoffringes sämmtlich in **einer Ebene** gelegen sind, eine Annahme, die sich bis jetzt mit den Thatsachen durchaus vereinbar gezeigt hat. Seitdem wurde die relative Asymmetrie bei vielen cyklischen Verbindungen nachgewiesen.

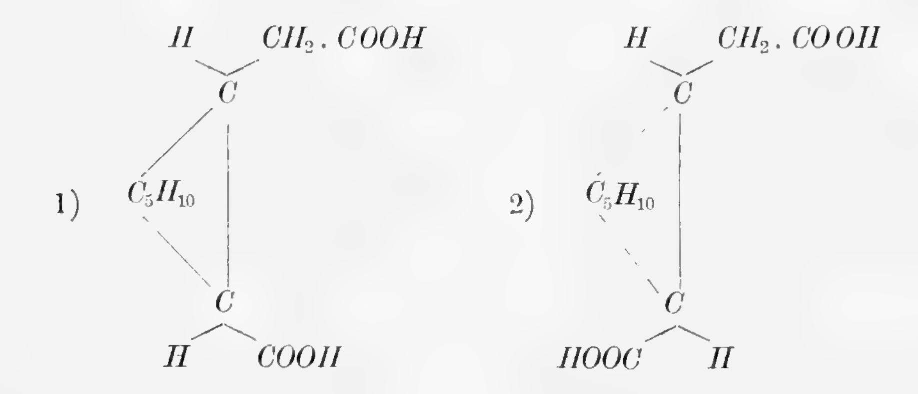
Diese geometrische Isomerie kann, wie aus dem im vorigen Abschnitt Dargelegten ohne Weiteres ersichtlich, mit optischer Activität verbunden sein, wenn nämlich zu gleicher Zeit irgend ein Kohlenstoffatom, sei es im Kerne, sei es im einer Seitenkette, Asymmetrie in gewöhnlichem Sinne aufweist. Hieraus erfolgt aber keineswegs umgekehrt, dass, wenn optische Activität bei einer Polymethylenverbindung vorhanden, jene nothwendiger Weise mit einer ungleichen Configuration der auftretenden Formen im Sinne der cis-cistrans-Isomerie verbunden sein muss. Dieses trifft nämlich nur dann zu, wenn die asymmetrischen Systeme Theile des Ringcomplexes sind.

Dieser Umstand ist für den, übrigens ziemlich wenigen, activen Polymethylenverbindungen, wo eine Configurations-bestimmung möglich ist, nicht im-

mer berücksichtigt worden. Dies ist vor Allem bei der Camphersäure der Fall, welche als Dicarbonsäure diese Möglichkeit darbietet und dazu unter derartigen alicyklischen Gebilden deshalb eine hervorragende Stellung einnimmt, weil sie in mehreren optisch activen Modificationen auftritt.

In der folgenden Zusammenstellung werden die Ansichten verschiedener Forscher, die sich mit den Camphersäuren in genannter Hinsicht beschäftigt haben, in aller Kürze dargelegt. Alle gingen von der Voraussetzung aus, dass nur vier optisch active Modificationen vorhanden sein können; die vielen bekannt gewordenen, inactiven Formen wurden von ihnen gar nicht berücksichtigt.

Der erste, welcher sich über die Configuration der verschiedenen Camphersäuren aussprach, war J. E. Marsh [1]), als er nämlich die l-Isocamphersäure, bei der Zersetzung des d-Camphersäurechlorides mit wenig heissem Wasser, erhielt. Er hebt hervor, dass die Säure, obwohl linksdrehend, der optische Antipode der gewöhnlichen d-Camphersäure nicht darstellen kann, sondern in derselben Beziehung zu der letzteren steht, wie Fumarsäure zu Maleinsäure. Die linksdrehende Camphersäure von Chautard würde das optische Isomere der gewöhnlichen Camphersäure darstellen, und somit auch eine malenoide Configuration besitzen, dagegen wäre die entsprechende fumaroide Form nicht bekannt (die d-Isocamphersäure von Jungfleisch war damals noch nicht dargestellt). Indem er von seinen Seite 11 angeführten Formeln für Campher und Camphersäure ausgeht, giebt er in folgender Weise:



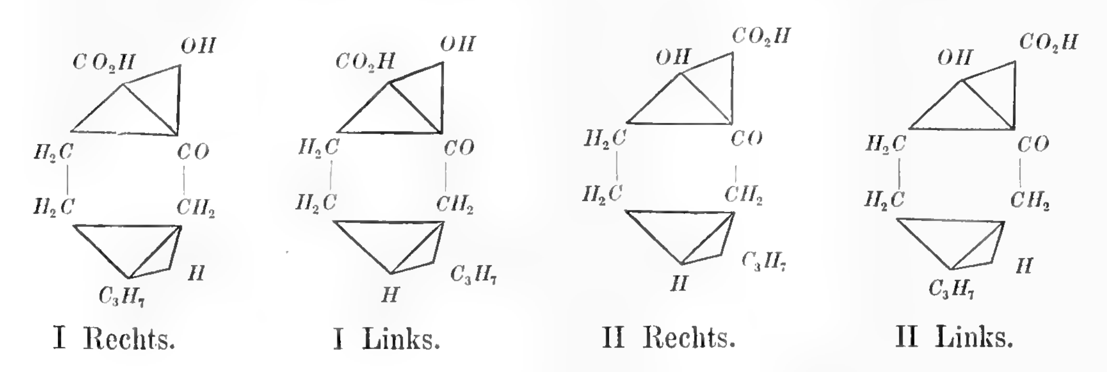
seinen Ansichten Ausdruck. Die Formel 1) würde die malenoide, 2) die fumaroide Form darstellen. Weiter schliesst er sich der Nomenclatur v. Baeyers

[1]) Chemical News. LX. *1889*, 308—309.

an, indem die Säuren 1) „cis“, die Säuren 2) „cistrans“ genannt werden. Die neue Säure (l-Isocamphersäure) würde deshalb links-cistrans-Camphersäure heissen.

Hierbei zieht MARSH gar nicht in Betracht, dass seine Formel drei asymmetrische C-Atome enthält, und dass sie demnach die Existenz 8 optisch isomerer Camphersäuren voraussetzt, von denen vier Modificationen dem cis-Typus, vier dem cistrans-Typus angehören.

In den folgenden Jahren haben sich weiter zwei Forscher, nämlich FRIEDEL und ODDO, mit demselben Problem beschäftigt. FRIEDEL [1]) nimmt, unter Berücksichtigung der von ihm aufgestellten Formel (vergl. Seite 11) an, dass das Molekyl der Camphersäure zwei asymmetrische C-Atome einschliesst, woraus die Existenz der Rechts- und Links-camphersäure, und der Rechts- und Links-isocamphersäure verständlich würde. Er drückt die Formeln der vier Säuren durch folgende Symbole aus:



Über die Configuration, die den verschiedenen activen Camphersäuren zukäme, spricht sich FRIEDEL nicht bestimmt aus [2]).

Fast zu gleicher Zeit, im Anfang des Jahres 1892, äussert sich ODDO in einer grösseren Arbeit, die die Camphergruppe [3]) behandelt, über die Configuration der Camphersäuren. Unter Zugrundelegung seiner Camphersäure-

---

[1]) Comptes rendus. *113*, 825.

[2]) An dieser Stelle sei wieder auf dem Umstand hingewiesen, dass die Auffassung von FRIEDEL über die Constitution der Camphersäure mit ihrem Verhalten nicht vereinbar ist. Dass die Camphersäure zwei Carboxyle enthält, geht besonders von den erwähnten Arbeiten BRÜHLS (Ber. deutsch. chem. Gesellsch. *1892*, 1797) und HALLERS (Compt. rend. *114*, 1516) über die isomeren sauren Ester derselben, sowie aus der Untersuchung HALLERS (Compt. rend. *115*, 19) über die Einwirkung von Phenylcyanat auf die beiden sauren Methylester, unbedingt hervor.

[3]) Gazetta chim. Ital. *21*. II. 505—509. Das Original war mir leider nicht zugänglich, weshalb ich zur Benutzung des übrigens ziemlich ausführlichen Referates in Chem. Centralblatt. *1892*. I. 532, angewiesen war.

formel (vergl. S. 12) stellt er folgende sechs Formeln für dieselben auf, worin die rechtsdrehenden mit δ-, die linksdrehenden mit α- bezeichnet werden:

1) $C{<}^{H}_{CH_2 . COOH}$ / $C{<}^{H}_{CH_2 . COOH}$
δ-cis-Camphersäure (gewöhnliche).

2) $C{<}^{CH_2 . COOH}_{H}$ / $C{<}^{CH_2 . COOH}_{H}$
δ-trans-Camphersäure von Friedel.

3) $C{<}^{CH_2 . COOH}_{H}$ / $C{<}^{H}_{CH_2 . COOH}$
δ-cistrans-Camphersäure von Marsh.

4) ${}^{H}_{HOOC . CH_2}{>}C$ / ${}^{H}_{HOOC . CH_2}{>}C$
α-cis-Camphersäure von Chautard.

5) ${}^{HOOC . CH_2}_{H}{>}C$ / ${}^{HOOC . CH_2}_{H}{>}C$
α-trans-Camphersäure von Jungfleisch.

6) ${}^{HOOC . CH_2}_{H}{>}C$ / ${}^{H}_{HOOC . CH_2}{>}C$
α-cistrans-Camphersäure unbekannt.

„Die Versuchsergebnisse stehen mit diesen Formeln im Einklange. Die Säuren, die als cis- und trans-Camphersäuren bezeichnet wurden, können sich in einander umwandeln und haben gleiches, aber entgegengesetztes Drehungsvermögen, weil die eine das Spiegelbild der anderen ist. Aus demselben Grunde geben sie durch Compensation eine inactive Säure (Meso-Camphersäure) und liefern leicht das Anhydrid, weil die beiden Carboxyle in dem Molekyl in demselben Sinne orientirt sind. Umgekehrt kann die cistrans-Camphersäure mit der cis- oder trans-Säure keine inactive Säure, und auch kein Anhydrid geben“.

Wenn die Camphersäure einen Hexamethylenring enthält, worin zwei Wasserstoffatome durch die gleichen Reste — $CH_2 . COOH$ substituirt sind, wie Oddo annimmt, so stehen seine Behauptungen auf keinem sicheren Boden. Eine einfache Überlegung zeigt nämlich, dass ein derartig constituirtes Gebilde das Auftreten von nur zwei optisch activen Modificationen und einem inactiven Typus voraussehen lässt. Die oben mit 1), 2), 4) und 5) bezeichneten Formeln sind alle gleich und stellen diesen Typus dar, die Formeln 3) und 6) sind wirkliche Spiegelbildisomeren. Auch die angeblichen Versuchsergebnisse sind mit den Thatsachen nicht übereinstimmend, indem die Säure

von MARSH, wie dieser Autor auch voraussieht[1]), mit der l-Isocamphersäure von FRIEDEL identisch ist.

Schliesslich hat sich BOUVEAULT[2]) mit den Configurationsverhältnissen beschäftigt. Er geht von der Annahme aus, dass vier Stereomeren der Camphersäuren existiren können, die er, unter Bezugnahme auf seiner letzteren Campherformel (S. 15) und unter der Annahme, dass die in dem Sechseck eingeschriebenen Gruppen über, die ausserhalb gezeichneten hinter die Ebene des Papiers liegen, in folgender Weise formulirt:

Jede dieser Formen würden zwei optisch activen Modificationen mit gleich grossem Rotationsvermögen, aber mit verschiedenem Zeichen entsprechen.

BOUVEAULT setzt also, was übrigens damit gut übereinstimmt, dass seine Formel drei asymmetrische *C*-Atome einschliesst, voraus, dass die Camphersäure in acht activen Formen auftreten könnte. Dies steht aber mit den bis jetzt bekannten Thatsachen nicht in Einklang.

Wie aus dem Angeführten ersichtlich, haben die genannten Forscher die optische Isomerie der Camphersäuren mit einer geometrischen Isomerie verbunden. Aus verschiedenen Gründen, die theils auf die angenommene Constitution und die Anzahl der darin vorkommenden asymmetrischen *C*-Atome, theils auf eine nicht richtige Interpretation der Thatsachen beruhen, sind ihre Schlüsse nicht berechtigt. Bei MARSH war doch der leitende Grundgedanke unzweifelhaft richtig, nämlich dass die Säuren der Camphersäurereihe dem Säuren der cis-Typus, die der Isocamphersäurereihe denen der cistrans-Typus v. BAEYERS entsprechen.

[1]) Chemical News. *60*, 309.
[2]) Bulletin de la Soc. chim. (3). *1894* 144, 147.

Erst nachdem in vorigem Abschnitt dargelegt wurde, dass die beiden asymmetrischen Kohlenstoffatome der Camphersäure in den ringförmigen Kern gebunden sind, liegt die Möglichkeit nunmehr vor, eine bestimmte Ansicht über die geometrische Configuration der verschiedenen optischen Modificationen auszusprechen.

Da in der Camphersäure zwei Carboxyle vorhanden sind, lässt sich unter Anwendung derselben Principien, die J. Wislicenus in seiner bekannten Schrift: *Über die räumliche Anordnung der Atome in organischen Molekylen* für die Verbindungen des Fumar-Maleinsäuretypus und A. v. Baeyer für die Dicarbonsäuren der Polymethylene entwickelt haben, aussprechen, dass in denjenigen Säuren, welche leicht in Anhydride übergehen, die Carboxyle an einer und derselben Seite der Ringebene orientirt sind, während dieselben bei den nicht anhydridbildenden Säuren an verschiedenen Seiten der Ebene liegen. Nun geben die Säuren der Camphersäurereihe Anhydride schon bei gewöhnlicher Temperatur, bei der Einwirkung von Acetylchlorid, während die der Isoreihe in die entsprechenden Anhydride nicht verwandelt werden können. Unter Anwendung der Baeyer'schen Nomenclatur sind die Säuren jener Reihe als *cis-Camphersäuren,* diejenigen der Isoreihe als *cistrans-Camphersäuren* zu betrachten, also in Übereinstimmung mit der von Marsh entwickelten Anschauung.

Bei der graphischen Wiedergabe der verschiedenen Formen stösst man nun auf einige Schwierigkeiten, da keine Structurformel zu Grund der Darstellung gelegt werden kann. Man muss sich in diesem Falle mit einer schematischen Formel, z. B. mit der folgenden genügen:

$$\begin{cases} c - C \begin{matrix} a \\ COOH \end{matrix} \\ \vdots \\ d - C \begin{matrix} COOH \\ b \end{matrix} \end{cases}$$

Diese Formel stellt nur die zwei asymmetrischen Systeme dar. Sie soll angeben, dass die beiden asymmetrischen C-Atome im Polymethylenringe gelegen, dass sie entweder direct oder indirect mit einander und mit den zwei Carboxylen verbunden sind, dass an denselben weiter zwei Systeme a und b, die auch mit einander gleich sein können, und noch ein Ringcomplex $\underbrace{c\quad d}$, worin c und d die dem Ring zugehörigen, an der Asymmetrie der beiden Kohlenstoffatome theilnehmenden Momente darstellen, gebunden vorkommen; c und d können auch mit einander gleich sein, dass heisst, der Ring kann

Symmetrie aufweisen, wenn entweder *a* und *b* einerseits, oder die carboxyltragenden Gruppen andererseits ungleich sind. Doch ändert sich die Anzahl der Isomeren nicht, auch wenn alle betheiligten Gruppen ungleich sind.

Wenn man nunmehr annimmt, dass die Ebene des Papiers mit derjenigen des nicht beweglichen Polymethylenringes zusammenfällt, und dass die nach oben orientirten Gruppen hinter dieser Ebene, die nach unten geschriebenen vor der Ebene liegen, lässt sich die Configuration der verschiedenen Modificationen der Camphersäure in folgender Weise darstellen:

$$\left\{\begin{array}{l} c - C\begin{smallmatrix} a \\ COOH \end{smallmatrix} \\ d - C\begin{smallmatrix} b \\ COOH \end{smallmatrix} \end{array}\right.$$

d-Camphersäure.

$$\left\{\begin{array}{l} c - C\begin{smallmatrix} COOH \\ a \end{smallmatrix} \\ d - C\begin{smallmatrix} COOH \\ b \end{smallmatrix} \end{array}\right.$$

l-Camphersäure.

$$\left\{\begin{array}{l} c - C\begin{smallmatrix} a \\ COOH \end{smallmatrix} \\ d - C\begin{smallmatrix} COOH \\ b \end{smallmatrix} \end{array}\right.$$

l-Isocamphersäure.

$$\left\{\begin{array}{l} c - C\begin{smallmatrix} COOH \\ a \end{smallmatrix} \\ d - C\begin{smallmatrix} b \\ COOH \end{smallmatrix} \end{array}\right.$$

d-Isocamphersäure.

Hierbei ist zu bemerken, dass es, ebensowenig wie bei den offenen Ketten, in diesem Falle möglich ist, Auskunft darüber zu geben, welche von diesen Formeln der d-Camphersäure oder der l-Camphersäure gehört. Ebensowenig lässt sich bestimmen, welche Formel für die Isocamphersäuren der mit der d-Camphersäure in genetischer Hinsicht nahe verwandten l-Isocamphersäure entspricht. Da doch die Symbole *a*, *b*, *c*, *d* beliebig gewählt sind, kommt es auch hierauf nicht an, nur möchte ich bemerken, dass unter den oben angeführten Schemas diejenigen künftig für die verschiedenen Camphersäuren angewandt werden, die unter jeden vermerkt sind.

Die Umlagerung der Camphersäuren in einander.

Die Erfahrung hat gelehrt, dass viele optisch active Substanzen beim Erhitzen auf höherer Temperatur, mit oder ohne Anwendung gewisser

Reagenzien, ihr Drehungsvermögen verändern, indem entweder völlige Inactivität eintritt, oder das Zeichen der Drehung wechselt, oder indem sie in Gemenge verschiedenartig drehender Isomeren übergehen, welche eine ungleiche Activität aufweisen.

Nach VAN'T HOFF [1]) verhalten sich die Verbindungen, die ein einziges asymmetrisches C-Atom enthalten, anders als die mit mehreren asymmetrischen Systeme, indem jene, wenigstens der Theorie nach, nur inactivirt werden können, während die Umlagerung bei den letzgenannten schrittweise erfolgt. VAN'T HOFF spricht Folgendes über diesen Gegenstand aus [2]):

„Die Verbindungen mit zwei oder mehreren asymmetrischen Atomen verhalten sich anders. Offenbar entspricht auch hier das inactive Gemenge dem sich schliesslich einstellenden Gleichgewichte; nur wird dieser Endzustand in zwei Phasen erreicht, da im Allgemeinen einer der beiden asymmetrischen Gruppierungen eine Umwandlung mit grösserer Geschwindigkeit entspricht. Letztere wird sich mithin unter Umständen vollziehen, unter denen die andere Gruppierung noch unverändert bleibt".

Weiter hebt VAN'T HOFF hervor, dass die Mengen der am ersten Phase gebildeten Producte keineswegs die gleichen sein müssen, da die beiden Molekyle im Allgemeinen eine verschiedene Stabilität aufweisen. Es könnte der Fall eintreten, was thatsächlich durch Beispiele erläutert wird, dass fast die gesammte Menge einer Verbindung $A + B$, unter Umkehrung des Drehungszeichens, in die entsprechender Verbindung $A - B$ überzugehen anfängt.

Übrigens findet, wie VAN'T HOFF schliesslich betont, die Umwandlung im sauerstoffreichsten Theile des Molekyls statt, also möglichst in der Nähe der Carboxylgruppe, falls diese vorhanden ist.

Wie schon bei der Beschreibung der isomeren Camphersäuren hervorgehoben, gehen d- resp. l-Camphersäure durch Erhitzen mit Wasser theilweise in l- resp. d-Isocamphersäure über; ebenso können die Isocamphersäuren wieder theilweise in die resp. Camphersäuren verwandelt werden. Nachdem eine Methode ausgearbeitet wurde, welche unter Anwendung von Eisessig und Chlorwasserstoffsäure als umlagerndes Agenz nicht nur die Reaction in kurzer Zeit vollenden, sondern auch die beiden Componenten des Umlagerungsgemisches gut von einander trennen liess, was durch die Anwendung von Acetylchlorid möglich wurde, habe ich die Übergänge der verschiedenen Camphersäure in einander genauer studirt.

---

[1]) Die Lagerung der Atome im Raume II Aufl. 30, 48.
[2]) L. c. S. 48.

Diese Untersuchung gewinnt schon dadurch an Interesse, dass sie quantitativ studirt werden konnte, was früher bei derartigen Reactionen überhaupt nicht möglich war. Andererseits wurde das Studium, wegen dem Vorhandensein sämmtlicher optischen Modificationen, mit einer Vollständigkeit durchgeführt, die bei anderen Reihen optisch activer Verbindungen nicht erreicht werden konnte.

Die Umlagerung der Camphersäuren wurde in dreierlei Weise ausgeführt: 1) unter Erhitzen mit dem oben angeführten Säuregemische; 2) unter einfacher Erhitzung, entweder trocken oder in einer Lösung von Chinolin, und 3) unter Bromierung der Säuren und Reduction des bromirten Derivates.

Von diesen Methoden giebt nur die erste einen Einblick in die Verhältnisse, unter denen die Umlagerung stattfindet, weil einzig bei ihrer Anwendung die Bedingungen für einen durch andere Reactionen ungestörten Verlauf vorhanden waren; sie erlaubte somit die Umkehrbarkeit der Reaction zu studieren. Diese Methode wurde deshalb auch für alle Camphersäuren angewandt. Die zwei anderen führen allerdings ebenfalls Umlagerungen hierbei; wegen der Bildung von anderen Producten, hauptsächlich von Anhydriden, wird aber die vorhandene Labilität der asymmetrischen Systeme aufgehoben, und die Reaction verläuft in einer für gewisse Modificationen bevorzugten Richtung. Die Umlagerung wurde in diesen Fällen nur mit den leichter zugänglichen Säuren ausgeführt.

Aus dem gesammelten Beobachtungsmaterial lässt sich Folgendes entnehmen.

Sämmtliche Modificationen der Camphersäure erleiden beim Arbeiten nach der ersten Methode, also durch Erhitzen mit einem Gemenge gleicher Theile Eisessig und concentrirter Salzsäure (spec. Gew. 1.2) auf etwa 180°, eine Umlagerung in einer bestimmten Richtung. Jede Säure wird theilweise *in diejenige Modification der geometrisch isomeren Form, welche das entgegengesetzte Drehungsvermögen besitzt, umgewandelt.*

Betreffend *der Menge der ursprünglichen Säure*, welche die Umlagerung erleidet, lässt sich aus den Versuchen schliessen, dass *diese Menge fast die Hälfte erreicht.* In allen Fällen nähern sich nämlich die ermittelten Zahlen für die Bestandtheile des entstandenen Gemenges 50 %; etwaige auftretende Ungenauigkeiten lassen sich meistens auf die Unvollkommenheit der Trennungsmethode zurückführen [1].

---

[1]) Fast dieselben Mengenverhältnisse hat Perkin j:r bei der Umlagerung der beiden geometrisch isomeren (1.3)-Hexamethylendicarbonsäuren in einander erhalten (Journ. chem. Soc. *1891*, 798).

Es lagern sich also die Säuren in folgender Weise um:

d-Camphersäure	liefert	etwa	50 %	*l-Isocamphersäure;*
l-Camphersäure	„	„	„	*d-Isocamphersäure;*
d-Isocamphersäure	„	„	„	*l-Camphersäure;*
l-Isocamphersäure	„	„	„	*d-Camphersäure.*

Die beiden inactiven Camphersäuren verhalten sich, ihrer racemischen Natur entsprechend, in ähnlicher Weise. Es liefert also

i-Camphersäure	etwa	50 %	*i-Isocamphersäure;*
i-Isocamphersäure	„	„	*i-Camphersäure.*

Es liegt also unter diesen Verhältnissen ein umkehrbarer Process vor. Weiter lässt sich der Schluss ziehen, dass *die Stabilität der Säuren der cis- und cistrans-Reihe bei der angegebenen Temperatur anscheinend gleich gross ist.* Dies folgt nämlich ohne Weiteres aus dem Umstande, dass die Umlagerung kaum weiter fortschreitet, wenn einmal die Hälfte der angewandten Säuren der Verwandlung erlitten hat.

Aus der Untersuchung folgt weiter, dass nur das eine asymmetrische System umgelagert wird. Unter Zugrundelegung der oben angeführten schematischen Formeln für die Camphersäuren ist ohne Weiteres ersichtlich, dass wenn ein Platzwechsel der Gruppen an den beiden asymmetrischen Atomen stattfinden würde, sollten die optischen Antipoden entstehen, und nicht die geometrischen Isomeren, z. B.

$$\left\{\begin{array}{l} c - C\begin{array}{l} a \\ COOH \end{array} \\ d - C\begin{array}{l} b \\ COOH \end{array} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{Umlagerung der beiden Systeme}} \left\{\begin{array}{l} c - C\begin{array}{l} COOH \\ a \end{array} \\ d - C\begin{array}{l} COOH \\ b \end{array} \end{array}\right.$$

d-Camphersäure → l-Camphersäure

u. s. w. Statt also l-Isocamphersäure als ausschliessliches Umwandlungsproduct bei der Umlagerung der d-Camphersäure zu erhalten, würde man in diesem Falle auch l-Camphersäure, oder was dasselbe wäre, i-Camphersäure, als Product ihrer Racemation mit vorhandener d-Camphersäure, auftreten fin-

den. Dies ist nun nicht der Fall, wie besonders angestellten Versuche mit längerem Versuchsdauer gelehrt haben. Wenn hierbei die Menge der gebildeten i-Camphersäure nur in so winzigen Mengen vorhanden gewesen wäre, dass sie, ungeachtet ihrer viel grösseren Unlöslichkeit, bei der mechanischen Trennung übersehen worden wäre, so müsste doch die Bestimmung des Drehungsvermögens Aufschluss hierüber gegeben haben. Indess ist die Constante $[\alpha]_j$ unter diesen Umständen keineswegs kleiner, sie ist sogar etwas grösser gefunden worden. Statt der diesbezüglichen Zahl $+49{,}7^0$ für reine Camphersäure (Seite 48), wurde das Drehungsvermögen der Säure nach vierstündigem Erhitzen auf 180^0 zu $+50{,}0^0$, nach acht Stunden zu $+50{,}0^0$, nach 24 Stunden zu $+49{,}9^0$, nach 16-stündigem auf 280 zu $+50{,}1^0$ bestimmt.

Wenn ein Bestreben zur Umlagerung der beiden asymmetrischen Systeme vorhanden wäre, müsste andererseits, da die Erfahrung lehrte, dass die Umlagerung schon nach etwa 4 Stunden ihrem Grenzzustand fast erreicht hatte, die hierbei entstandene l-Isosäure auch zu einer Verwandlung im gleichen Sinne geneigt gewesen sein, nach dem Schema:

```
  ⎧c — C⟨ a                                              ⎧c — C⟨ COOH
  ⎪      COOH                                            ⎪      a
  ⎨                  ———————————————————→               ⎨
  ⎪      COOH        Umlagerung der beiden Systeme       ⎪      b
  ⎩d — C⟨ b                                              ⎩d — C⟨ COOH

  l-Isocamphersäure                                      d-Isocamphersäure.
```

Es müsste also im selben Umlagerungsgemische auch d-Isocamphersäure als racemische i-Isocamphersäure vorhanden gewesen sein, was durch die Bestimmung des Drehungsvermögens der dabei isolirten Isocamphersäuren hervorginge.

Die Constante $[\alpha]_j$ für l-Isocamphersäure beträgt nämlich (Seite 52) $-48{,}9^0$. Nach vierstündigem Erhitzen auf 180^0 betrug sie $-48{,}5^0$, nach achtstündigem $-48{,}5^0$, nach 24 Stunden $-48{,}3^0$; bei 16-stündigem Erhitzen auf 280^0 $-48{,}2^0$. Diese Resultate scheinen in der That dafür zu sprechen, dass eine Racemation in geringem Grade stattgefunden hätte. Indess glaube ich bestimmt, dass die Erniedrigung auf Beobachtungsfehler zurückzuführen ist, da einerseits die rohe, nicht umkrystallisirte Säure zur Polarisation ge-

langte[1]), und andererseits, wenn wirklich eine Neigung zur Umlagerung bei der l-Isocamphersäure vorhanden, die Menge der in dieser Richtung veränderten Substanz doch grösser gewesen sein müsste, wie die angeführten Zahlen ergeben, wenn die Zeit von vier Stunden auf vierundzwanzig verlängert, und die Temperatur von 180° auf 280° gesteigert würde.

Folglich erleidet nur das eine asymmetrische System eine Umlagerung.

Weiter lehren die Versuche, dass diese Umlagerung nicht bei einer beliebigen, sondern immer an einem und demselben asymmetrischen *C*-Atome stattfindet.

Zunächst ist zu erwähnen, dass in der Formel

$$\left\{\begin{array}{l} c - C \begin{array}{l} a \\ \cdots COOH \end{array} \\ d - C \begin{array}{l} b \\ \cdots COOH \end{array} \end{array}\right.$$

der d-Camphersäure nicht der Fall eintreten kann, dass die drehenden Systeme gleich sind, also $a = b$, $c = d$ und $\cdots COOH = \cdots COOH$, weil sich die Anzahl der Isomeren hierbei auf drei Formen, nämlich zwei activen und eine durch innere Compensation inactive, beschränken würde. In allen übrigen Fällen, worin vier optisch active Modificationen vorauszusehen sind, sind die Ergebnisse der Umlagerung die nämlichen.

Wenn also keine weitere Voraussetzungen über die Gleichheit resp. Ungleichheit der betheiligten Gruppen der asymmetrischen Systeme gemacht werden, würden z. B. bei der d-Camphersäure bei einer beliebigen, einmaligen Änderung der Gruppenreihenfolge folgende zwei verschiedene Formen auftreten:

---

[1]) Als Vergleichszahl wäre es in diesem Falle unzweifelhaft richtiger, nicht das für die reine, umkrystallisirte Isocamphersäure ermittelte Drehungsvermögen — 48,9° zu wählen, sondern die Zahl — 48,5°, welche für die nach vierstündigen Erhitzen isolirten Säuren erhalten wurde. Diese ist nämlich unter ganz dieselben Umstände wie die reine Säure dargestellt worden, nur war sie nicht umkrystallisirt. Hierdurch werden die Abweichungen nicht grösser als oben bei der d-Camphersäure, nur ist das Zeichen der Abweichung hier entgegengesetzt.

$$\left\{\begin{array}{l} c - \overset{1}{C}\begin{array}{l} \diagup a \\ \diagdown COOH \end{array} \\ d - \underset{2}{C}\begin{array}{l} \diagup b \\ \diagdown COOH \end{array} \end{array}\right. \xrightarrow[\text{bei Umlagerung des Systems 2}]{} \left\{\begin{array}{l} c - \overset{1}{C}\begin{array}{l} \diagup a \\ \diagdown COOH \end{array} \\ d - \underset{2}{C}\begin{array}{l} \diagup COOH \\ \diagdown b \end{array} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} c - \overset{1}{C}\begin{array}{l} \diagup a \\ \diagdown COOH \end{array} \\ d - \underset{2}{C}\begin{array}{l} \diagup b \\ \diagdown COOH \end{array} \end{array}\right. \xrightarrow[\text{bei Umlagerung des Systems 1}]{} \left\{\begin{array}{l} c - \overset{1}{C}\begin{array}{l} \diagup COOH \\ \diagdown a \end{array} \\ d - \underset{2}{C}\begin{array}{l} \diagup b \\ \diagdown COOH \end{array} \end{array}\right.$$

Die beiden entstehenden Producte stellen Spiegelbildisomere dar. Wenn also die eine Formel, z. B. die obere, die l-Isocamphersäure darstellt, veranschaulicht die andere die Configuration der d-Isocamphersäure, und umgekehrt. Hieraus folgt, dass wenn eine Umlagerung in einem Theil der angewandten d-Camphersäure an dem *C*-Atom 1 erfolgt, in einer anderen an dem Atom 2, so müsste das entstehende Product i-Isocamphersäure enthalten. Dies ist indess nicht der Fall, indem nur l-Isocamphersäure auftritt, wie oben hervorgehoben. Eben dasselbe lässt sich für die übrigen Camphersäuren beweisen. Folglich *erfolgt die Umlagerung immer an einem bestimmten asymmetrischen C-Atom*, während das andere intact bleibt. Die Ungleichheit der beiden carboxyltragenden Systeme äussert sich, wie schon bekannt, auch in ihrem chemischen Verhalten; BRÜHL[1]) hat nämlich gezeigt, dass die d-Camphersäure zwei Reihen saurer Ester bildet, die nicht nur was ihre Bildung betrifft, sondern auch zu ihren chemischen Eigenschaften ungleich sind. Dasselbe wurde von FRIEDEL[2]) für die l-Isocamphersäure dargethan.

Auch in dem *ungleichen Drehungsvermögen der beiden asymmetrischen Systeme* zeigt sich die Verschiedenartigkeit derselben. Weil diese physicalische Constante für die beiden isomeren Reihen der Camphersäuren bekannt ist, lässt sich nämlich die drehende Wirkung der beiden Systeme berechnen.

Eine derartige Berechnung ist berechtigt, da man weiss, das jedem asymmetrischen System eine bestimmte Drehung zukommt, namentlich nachdem

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1892*, 1797.
[2]) Comptes rendus. *113*, 825.

Guye Untersuchungen bezüglich der Übereinanderlagerung der optischen Effecte asymmetrischer Kohlenstoffatome eines und derselben activen Molekyls ausgeführt hat. Kürzlich theilte er nämlich mit [1]), dass seine zusammen mit Gautier ausgeführten Studien über das Amyloxyd, das Amylvalerat und den amylglykolsauren Amylester ergeben haben, *dass jedes einzelne Kohlenstoffatom für sich allein wirkt,* wie wenn das übrige Molekyl inactiv wäre, und dass die Effecte der verschiedenen Kohlenstoffatome eines Molekyls sich algebraisch addiren. Weitere Stütze für die Richtigkeit der obenerwähnten Übereinanderlagerung konnte er ferner aus den Untersuchungen von Guye und Fayollat über die substituirten Weinsäureester, sowie aus der von Welt übernommenen Untersuchung über die activen Kohlenwasserstoffe Aethylamyl, Propylamyl, Isobutylamyl und Diamyl entnehmen.

Es sei in der Camphersäure die drehende Wirkung des einen Systems, wie üblich, mit A, diejenige des zweiten Systems mit B bezeichnet. Die Grösse der Drehung kann nun zahlengemäss durch den Winkel α_j ausgedruckt werden, oder auch, obwohl weniger genau, durch die Grösse $[\alpha]_j$, welche aus der Formel

$$[\alpha]_j = \frac{100\ \alpha_j}{l.\ p.\ d},$$

worin l die Länge der drehenden Schicht, p die Concentration und d das spec. Gewicht der angewandten Lösung bedeutet, abgeleitet wird. Dass das specifische Drehungsvermögen überhaupt als Maas benutzt werden kann, beruht darauf, dass alle Bestimmungen in fast 10-procentiger alcoholischer Lösung und bei wenig wariirender Temperatur gemacht wurden, wobei erstens p und d nur geringe Schwankungen erleiden, und zweitens die Unterschiede im specifischem Gewichte bei den Säuren der Camphersäure- und Isocamphersäurereihe, wenn überhaupt vorhanden, auf einen zehnmahl kleineren Betrag gebracht werden. Es zeigen sich deshalb, unter Zugrundelegung der in absolut alcoholischer Lösung ermittelten Zahlen, die Werthe α_j und $[\alpha]_j$ bei gleichem l fast durchgehend proportional, indem

$$[\alpha]_j = 4{,}74\ \alpha_j,$$

worin α_j die bei einer Röhrenlänge von 1 dm und der Concentration 10 direct

---

[1]) Chemiker-Zeitung. *1895,* 37.

an dem Instrument von Schmidt & Haensch abgelesene Anzahl Grade bedeutet.

Unter den beschriebenen Verhältnissen kann also die berechnete spec. Drehung annähernd als Grundlage für die Berechnung der drehenden Einflüsse der beiden Systeme angewandt worden.

Nun ist zu bemerken, dass in den Säuren der Camphersäurereihe, worin $[\alpha]_j = \pm 49{,}7^0$ (in abs. æthylalcoholischer Lösung) die Reihenfolge der Gruppen die nämliche ist wie in der inactiven Mesoweinsäure; die beiden drehenden Systeme sind in entgegengesetzter Richtung orientirt, und das gesammte Drehungsvermögen stellt also den Unterschied der Wirkungen der beiden Systeme dar. Hier ist also

$$A - B = 49{,}7^0,$$

Die Säuren der Isocamphersäurereihe, bei denen $[\alpha]_j = \pm 48{,}9^0$ (in selben Lösungsmittel), entsprechen dagegen den activen Weinsäuren, worin die drehenden Systeme in gleicher Richtung orientirt sind; sie verstärken sich deshalb gegenseitig. Folglich gilt hier die Gleichung

$$A + B = 48{,}7^0.$$

Es ist also

$$2\ A = 98{,}6^0,$$

woraus sich A zu $49{,}3^0$, B zu $-0{,}4^0$ berechnet.

Aus diesen Zahlen lässt sich zunächst schliessen, dass, weil B einen negativen Werth bekommt, und da nach dem an der S. 90 Dargelegten zwei asymmetrischen Systeme vorhanden sein müssen, weshalb B nicht gleich 0 werden kann, die Säuren der Camphersäuregruppe in unverdünntem Zustande ein kleineres Drehungsvermögen besitzen müssen, wie die der Isocamphersäurereihe. Die a. d. S. 85 angeführten, in Aceton und Eisessig ermittelten Werthe sind demnach ohne Zweifel dem wirklichen Sachverhalt mehr entsprechend. Dies steht auch besser damit im Einklang, dass die Camphersäuren nach dem Mesoweinsäuretypus, die Isocamphersäuren nach dem Weinsäuretypus zusammengesetzt sind. Weiter folgt hieraus, dass die eine asymmetrische Gruppe ein viel höheres Drehungsvermögen besitzt wie das andere, und dass diese beiden

Systeme demnach ziemlich ungleich constituirt[1]) sein müssen. Schliesslich ersieht man, dass die Umlagerung aus der cis- in die cistrans-Form und umgekehrt an derjenigen Gruppe (A) stattfindet, welche das grössere Drehungsvermögen besitzt. Sonst wäre der Umschlag, zum Beispiel aus dem stark positiven Werth bei d-Camphersäure zu dem stark negativen bei l-Isocamphersäure und umgekehrt, nicht erklärlich.

Unter Bezugnahme auf die auf Seite 34 erwähnten Untersuchungen von Walker und Noyes lässt sich sogar mit einiger Wahrscheinlichkeit schliessen, welches von den beiden carboxyltragenden, asymmetrischen Systemen die grössere Drehung aufweist. Es geht nämlich aus diesen Untersuchungen hervor, dass das freie Carboxyl der β-Campheraminsäure dem alkylirten Carboxyl der orto-Aethylcamphersäure entspricht, da beide die campholytische Säure $C_8H_{13}.COOH$ (resp. deren Aethylester) liefern. In der α-Campheraminsäure dagegen entspricht das Carboxyl dem alkylirten Carboxyl der allo-Aethylcamphersäure, weil aus beiden die allocampholytische Säure entsteht. Von der α-Campheraminsäure hat nun Noyes[2]) bewiesen, dass sie identisch mit der Campheraminsäure von Claisen und Manasse[3]) ist, die durch Umlagerung des Isonitrosocamphers entsteht:

$$C_8H_{14}\begin{cases} C:NOH \\ | \\ CO \end{cases} + H_2O = C_8H_{14}\begin{cases} CO.NH_2 \\ COOH \end{cases}$$

Folglich entspricht das Carboxyl der allocampholytischen Säure dem Carbonyl des Camphers, und das Carboxyl der campholytischen Säure dem Methylen desselben:

---

[1]) Es scheint mir auch diese Thatsache gegen die letzte Formel von Bredt

$$\begin{array}{l} H_2C - \overset{H}{C}\begin{cases} COOH \\ \\ \end{cases} \\ \quad\quad\quad\quad\quad C(CH_3)_2 \\ H_2\dot{C} - \underset{CH_3}{\dot{C}}\begin{cases} \\ COOH \end{cases} \end{array}$$

zu sprechen; in derselben herrscht nämlich, bis auf einem Wasserstoffatom und einer Methylgruppe, völlige Symmetrie.

[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellschaft. *1895*, 547.

[3]) Annalen der Chemie. *274*, 71.

$$C_8H_{14}\left<\begin{matrix}CH_2\\ |\\ CO\end{matrix}\right. \rightarrow C_8H_{14}\left<\begin{matrix}C:NOH\\ |\\ CO\end{matrix}\right. \rightarrow C_8H_{14}\left<\begin{matrix}CO.NH_2\\ COOH\end{matrix}\right. \rightarrow C_8H_{13}\diagdown COOH \leftarrow C_8H_{14}\left<\begin{matrix}COOH\\ COOR\end{matrix}\right.$$

Campher. Isonitrosocampher. α-Campheraminsäure. allocampholytische Säure. allo-Aethylcamphersäure.

$$C_8H_{14}\left<\begin{matrix}CH_2\\ |\\ CO\end{matrix}\right. \rightarrow C_8H_{14}\left<\begin{matrix}CO\\ CO\end{matrix}\right>NH \rightarrow C_8H_{14}\left<\begin{matrix}COOH\\ CO.NH_2\end{matrix}\right. \rightarrow C_8H_{13}\diagup COOH \leftarrow C_8H_{14}\left<\begin{matrix}COOR\\ COOH\end{matrix}\right.$$

Campher. Camphersäureimid. β-Campheraminsäure. campholytische Säure. orto-Aethylcamphersäure.

Walker hat nun [1]) das spec. Drehungsvermögen der beiden ungesättigten Säuren der Formel $C_8H_{13}.COOH$ bestimmt, und für allocamphylytische Säure $[\alpha]_D = 57{,}4^0$ bei 12^0 gefunden, für die campholytische Säure $[\alpha]_D = -5{,}0^0$. Da nur zwei asymmetrische C-Atome in Camphersäure vorhanden, die mit den Carboxylen (directer oder indirecter Weise) gebunden sind, und da bei Abspaltung eines der beiden Carboxyle die Asymmetrie an dem zugehörigen Ringkohlenstoff, wegen der Enstehung einer Doppelbindung, verloren geht, so kann vorausgesetzt werden, dass die in der entstehenden, einbasischen Säure verbleibende Drehung dem Drehungsvermögen desjenigen Systemes in der ursprünglichen Camphersäure, das intact bleibt, ziemlich gleich kommen wird. Umgekehrt kann man aus der Drehung der ungesättigten Säure auf die Drehung desselben ursprünglichen Systems in Camphersäure schliessen.

Hieraus lässt sich mit einiger Wahrscheinlichkeit schliessen, dass das in der allocampholytischen Säure vorhandene System, dessen Carboxyl dem Carbonyl des Camphers entspricht, demjenigen in Camphersäure, welches bei einer event. Umlagerung afficirt wird, entspricht.

Bei den anderen Umlagerungsmethoden treten, wie schon hervorgehoben, andere Umstände hinzu, die auf dem freiwilligen Uebergang der Säuren in einander störend einwirken.

Bei dem trocknem Erhitzen tritt die Wasserabspaltung unter Anhydridbildung in Vordergrund. Es erfolgt zunächst eine Umlagerung der Carboxyle in die cis-Stellung, falls diese Anordnung nicht vorhanden, und als Endproduct wird ein Anhydrid der cis-Reihe gebildet. Auch in diesem Falle tritt (natürlich nur an den Säuren der Isoreihe) eine Umlagerung bei derjenigen

[1]) Trans. chem. Soc. *1895*, 341.

Gruppe ein, welche nach Obigem instabil ist und das grössere Drehungsvermögen besitzt. Die Säuren der Camphersäurereihe bilden die zugehörigen Anhydride, diejenigen der Iso-reihe wandeln sich in die Anhydride derjenigen Säuren um, welche die entgegengesetzte Drehung aufweisen. Aus l-Isocamphersäure entsteht demnach das l-Camphersäureanhydrid [1]), aus ihrem optischen Antipoden das d-Camphersäureanhydrid, und aus der racemischen i-Isocamphersäure das i-Camphersäureanhydrid. Obwohl keine quantitativ durchgeführten Versuche vorliegen, lässt sich doch aussprechen, dass die Umwandlung der Säuren der Isoreihe in die Anhydride der Camphersäurereihe ungleich träger verläuft als bei den Letztgenannten, was ja auch durch den vorauszusehenden grösseren Energieaufwand erklärlich wird.

In einer Lösung von fast bis zum Kochen erhitztem Chinolin sind dieselben Erscheinungen sichtbar. In diesem Falle ist auch eine Neigung zur Bildung der entgegengesetzt drehenden, geometrisch isomeren Form deutlich bemerkbar. Dies geht daraus hervor, dass nicht nur die Anhydridbildung ungleich träger als im trocknen Zustande erfolgt, was allerdings auch auf eine eintretende Salzbildung zurückgeführt werden kann, sondern auch daraus, dass die d-Camphersäure, obwohl die für eine Anhydridbildung günstige Temperatur vorhanden, kleine Mengen von l-Isocamphersäure erzeugt. Bei einem Versuche mit dieser Säure liess sich nämlich aus dem Reactionsgemisch, das in gewöhnlicher Art mit Acetylchlorid behandelt wurde, eine kleine Menge einer Säure mit dem Schmelzpunkt 171—172^0 isoliren, deren wässerige Lösung deutlich nach links drehte und die demnach als l-Isocamphersäure erkannt wurde. Schliesslich können die Säuren der verschiedenen Reihen durch Bromierung in einander übergeführt werden. Weil die Umlagerung vermittelst hierbei auftretenden Zwischenproducte, den Bromcamphersäureanhydriden, herbeigeführt wird, ist die Erscheinung auch in diesem Falle keine recht geregelte. Sie wurde nur bei der d-Camphersäure und der entsprechenden l-Isocamphersäure durchgeführt, doch lässt sich voraussehen, dass auch die anderen Säuren in gleichem Sinne verändert werden müssen.

d-Camphersäure lässt sich, wie verschiedene Forscher [2]) dargethan haben, unter geeigneten Bedingungen (bis auf 70 %) in das l-Bromcamphersäureanhydrid überführen. Wenn ich dieses mit Zink und Eisessig reducirte, entstand

---

[1]) Dieses wurde früher von Friedel nachgewiesen (Compt. rend. *108*, 980). Betreffend der Nomenclatur sei hervorgehoben, dass das Anhydrid der d-Camphersäure, wie unten gezeigt wird, linksdrehend ist und deshalb l-Camphersäureanhydrid genannt wird.

[2]) Vergl. Wreden, Ann. der Chemie. *163*, 323; Reyher. Inaug. Diss. Leipzig *1891*, 27; Rupe und Maull, Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1893*, 1201; Auwers und Schnell, ebendaselbst. *1893*, 1517; O. Aschan, ebendaselbst. *1893*, 1640; *1894*, 3504.

l-Camphersäureanhydrid und ein Gemenge von d-Camphersäure und l-Isocamphersäure, die man vermittelst Acetylchlorid trennte. Bei einem quantitativ durchführten Versuche entstand in Allem d-Camphersäure zu 58,9 % und l-Isocamphersäure zu 41,1 %. Auch hier nähert sich also die Menge des Umlagerungsproductes 50 %.

Andererseits geht die l-Isosäure, bei vorsichtigem Bromiren ihres Chlorides, theilweise in das l-Bromcamphersäureanhydrid über; die Menge desselben übersteigt fast immer den halben, theoretisch zu erwartenden Betrag. Das bromirte Anhydrid geht wieder, wie erwähnt, beim Reduciren in d-Camphersäure resp. deren Anhydrid über. Es kann also behauptet werden, dass auch bei dieser Art der Umlagerung eine gewisse Modification zum grösseren oder geringeren Theil *in diejenige Säure der geometrisch isomeren Reihe übergeht, die das entgegengesetzte optische Drehungsvermögen besitzt.*

Das Chloranhydrid der d-Camphersäure verhält sich bei der Reduction durchaus ähnlich. Es sei noch erwähnt, dass beim Erhitzen von d-Camphersäure in alkalischer Lösung keine Umlagerung erfolgt. Dagegen geht dieselbe Säure schon beim längerem Kochen mit Salzsäure und Eisessig zu einem kleineren Theil in l-Isocamphersäure über.

Über die Lage des Bromatomes in Bromcamphersäureanhydrid.

An dieser Stelle mag auch diese Frage, die keineswegs bedeutungslos für die Structurverhältnisse in der Camphergruppe ist, erörtert werden. Die Bromirung der Camphersäure führt in ihr Molekyl ein angreifbares Moment ein, welches die Darstellung neuer Derivate, wie Camphansäure und daraus ableitbaren Verbindungen erlaubt. Andererseits geschieht die Bildung des Bromanhydrides unter Ersatz eines Wasserstoffatomes. Kann also die Lage des Bromatomes bestimmt werden, so weiss man auch, dass das bromirte Atom in den unsubstituirten Campherderivaten mit Wasserstoff beladen ist.

Über diese Frage giebt zunächst der Umstand Aufschluss, dass beim Bromieren des l-Isocamphersäurechlorides zu gleicher Zeit l-Bromcamphersäureanhydrid und die aus der Isocamphersäure derivirende Bromisocamphersäure entstehen. Der Eintritt des Halogens erzeugt also hier eine Umlagerung. Wie VAN'T HOFF in seiner letzten Broschüre [1]) hervorhebt, findet eine Isomerisirung bei Einführung von Halogen am *asymmetrischen Kohlenstoffatom* sehr

[1]) Die Lagerung der Atome im Raume. II. Aufl. 1894. S. 32.

leicht statt. Schon hieraus scheint also die Annahme berechtigt, dass das Bromatom in Bromcamphersäureanhydrid resp. Bromisocamphersäure an dem einen asymmetrischen *C*-Atome gelegen sei.

Eine weitere Stütze erhält diese Auffassung aus dem Umstande, dass bei Reduction des l-Bromcamphersäureanhydrids zwei geometrisch isomere Säuren, d-Camphersäure und l-Isocamphersäure, entstehen.

Der Übergang einer Verbindung in ihrem geometrischen Isomeren bei Reduction ihrer Bromverbindung ist vielfach beobachtet worden. Ich brauche hier nur an die Verwandlung der Brommaleinsäure in Fumarsäure, die Entstehung von Brommaleinsäure aus Fumar-, und Bromfumarsäure aus Maleinsäure [1]), sowie an die gleichzeitige Bildung von cis- und cistrans-Hexahydroterephtalsäure bei der Reduction der Dibromhexahydroterephtalsäure zu erinnern. v. Baeyer, welche die letztgenannte Reaction entdeckte, giebt seine Ansicht über derartige Vorgänge folgendermassen kund [2]):

„Die Beständigkeit der Gruppirung der vier mit einem Kohlenstoffatom verbundenen Atome, welche die Existenz von geometrisch isomeren Verbindungen möglich macht, hört bekanntlich in der Wärme auf. Dasselbe findet nun auch bei jedem chemischen Eingriff statt, welcher an dem asymmetrischen Kohlenstoff selbst vor sich geht. Infolge dessen gruppiren sich die mit dem asymmetrischen Kohlenstoff verbundenen Atome jedesmal anders, *wenn Brom durch Wasserstoff, oder Wasserstoff durch Brom ersetzt wird.* Das Erhitzen mit Salzsäure hat einen ähnlichen Erfolg. Wie viel von der einen oder anderen geometrischen Form gebildet wird, hängt von den Bedingungen des Versuches ab“.

v. Baeyers Worte beziehen sich auch auf geometrisch isomere cyklische Verbindungen, und dieselben gelten demnach für die Camphersäure, nachdem früher nachgewiesen, dass die asymmetrischen Kohlenstoffatome im Molekyle desselben Theile des Ringes sind.

Noch ein weiterer Umstand kann zum gleichen Zwecke herangezogen werden. Gesetzt, dass die Substitution an einem asymmetrischen Kohlenstoff nicht geschehe, würde sie Asymmetrie an einem weiteren Kohlenstoffatom erzeugen, da das Bromatom jedenfalls an einem Ringatom und nicht etwa in einer Seitenkette eintritt. Dies lässt sich, wie Auwers und Schnell zuerst betont haben [1]), daraus schliessen, dass sich dieses Atom auffallend indifferent

---

[1]) Handbuch der Stereochemie von Bischoff-Walden. S. 48.
[2]) Ebendaselbst. S. 87.
[3]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1893*, 1521.

gegen verschiedene Agentien zeigt, in den Fällen nämlich, wo sich die Anhydridgruppe nicht betheiligen kann. Dann würde man aber, wie z. B. bei Übergang der beiden Campher in je zwei Borneole, das Auftreten zweier isomeren Bromcamphersäureanhydride aus jeder der beiden Säuren der Camphersäurereihe erwarten. Thatsächlich entsteht aber in beiden Fällen nur ein einziges, wie mehrere Versuche gezeigt haben.

Aus dem Gesagten kann folgender Schluss gezogen werden:

Das Bromatom im Bromcamphersäureanhydrid befindet sich an einem der in Camphersäure vorfindlichen, asymmetrischen Kohlenstoffatome.

Dasselbe gilt von der *Bromisocamphersäure* und den *Chlorcamphersäureanhydriden*, welche Verbindungen dieselben Camphersäuren liefern wie die Bromanhydride.

Da der Lactonring der *Camphansäuren* an demselben *C*-Atom, welcher Brom im Bromcamphersäureanhydrid trägt, gebunden sein muss, ist *jener Lactonring mit einem asymmetrischen Koklenstoff verbunden.*

Schliesslich gelangt man zu dem wichtigen Schlusse:

Campher und Camphersäure enthalten ein Wasserstoffatom an einem der asymmetrischen Kohlenstoffatome.

---

2. Über Campherverbindungen, die einen doppelten Ringkern enthalten.

Ausser den Camphersäuren habe ich einige Derivate derselben dargestellt und untersucht. Hierher gehören die Anhydride der d- und l-Camphersäure, die entsprechenden Chlor- und Bromanhydride und die Camphansäuren. Alle diese Körper zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen doppelten Ringkern enthalten, der einerseits durch den schon im Camphersäuremolekyle verhandenen Polymethylenring, und andererseits durch die Anhydrid- resp. Lactonbrücke hergestellt wird.

An den genannten Körpern, deren Umlagerungsfähigkeit bei der Untersuchung speciell berücksichtigt würde, reihen sich weiter die Modificationen des Camphers selbst, der auch einen Doppelring enthält. Es empfielt sich zunächst an dem zu erinnern, was über den Grundsubstanz der Camphergruppe in der genannten Hinsicht bekannt ist.

Wie schon früher (Seite 92) erwähnt, kennt man nur zwei activen Modificationen des Camphers, nämlich den gewöhnlichen Rechtscampher und den

linksdrehenden Matricariacampher; sie sind die optischen Antipoden von einander und treten zu einer racemischen Verbindung zusammen. Über die Schmelz- und Siedepunkte sowie das Drehungsvermögen mag Folgendes mitgetheilt werden:

d-Campher. Schmelzpunkt $178,6^0$; Siedepunkt 204^0 (von Haller[1]) bestimmt). Drehungsvermögen in alcoholischer ($p = 20$) Lösung: $[\alpha]_D = + 44,22^0$ (von Beckmann[2]) bestimmt).

l-Campher. Schmelzpunkt $178,6^0$; Siedepunkt 204^0 (Haller l. c.); Drehungsvermögen in alcoholischer Lösung ($p = 20$) $[\alpha]_D = - 44,22^0$ (Beckmann l. c.).

i-Campher, durch Racemation der beiden activen Componenten erhalten: Schmelzpunkt $178,6^0$; durch Oxydation des racemischen Borneols dargestellt: Schmelzpunkt $178,8^0$ (Haller l. c.).

Über die Umlagerung der activen Camphermodificationen liegt eine eigens für den genannten Zweck ausgeführte Untersuchung von Beckmann (l. c.) vor, welche ergeben hat, dass das Drehungsvermögen des d-Camphers sowohl beim Destilliren, wie beim Erhitzen mit Wasser oder Eisessig auf 230—250^0, beim Kochen mit alcoholischem Natron und beim Lösen in conc. Schwefelsäure unverändert bleibt. Bei der Behandlung des l-Camphers in der letztgenannten Weise wird auch nicht eine Veränderung herbeigeführt.

Es ist hieraus zu schliessen, dass die beiden Modificationen des Camphers, unter den genannten Umständen, die bei anderen activen Kärpern eine Umlagerung herbeiführen, weder in einander noch in andere Modificationen überführt werden können.

Hiernach kehre ich zu den erwähnten anderen Derivaten, die ebenfalls einen doppelten Ringkern enthalten, zurück.

Die Anhydride der Camphersäuren.

Dass die beiden Säuren der Camphersäurereihe sowie ihre racemische Verbindung Anhydride erzeugen, ist eine längst bekannte Thatsache, die, wie schon hervorgehoben, von verschiedener Seite zu Configurationsbestimmungen der Camphersäuren verwerthet worden ist.

---

[1]) Comptes rendus. *105*, 229.
[2]) Annalen der Chemie. *250*, 352.

Das *Anhydrid der d-Camphersäure* wurde schon im Jahre 1799 von BOUILLON-LAGRANGE entdeckt, und ist seitdem vielfach untersucht worden. Es entsteht leicht bei der Einwirkung von verschiedenen wasserentziehenden Agentien auf die Säure. Ich habe es immer vermittelst Acetylchlorid in der Kälte dargestellt. Der Schmelzpunkt wird vielfach zu 216—217° angegeben. BRÜHL [1]) giebt 220,3—220,8° an. Damit übereinstimmend habe ich diese Constante bei 220—221° liegend gefunden.

Über das Drehungsvermögen liegen wiedersprechende Beobachtungen vor. Nach MONTGOLFIER, der eine 2,7 % Lösung in Benzol untersuchte [2]), ist $[\alpha]_D = -7^0 7'$. HARTMANN [3]) untersuchte ein vermittelst Acetylchlorid dargestelltes Präparat (das allerdings nicht rein gewesen zu sein scheint, da der Schmelzpunkt zu 217° angegeben wird) in 4-procentinger Lösung sowohl in Benzol wie in Chloroform, und fand es inactiv. Etwas später wieder hat MARSH [4]) eine erneute Bestimmung ausgeführt und $[\alpha]_D$ zu $-3,7^0$ angegeben. Auch FRIEDEL [5]) hat es inactiv gefunden.

Bei der Wiederholung der Bestimmung des Drehungsvermögens, die unter diesen Verhältnissen von besonderem Interesse war, wurden ganz reine Präparate angewandt. Es ergab sich das etwas überraschende Resultat, dass seine Chloroformlösung ($p = 9,5$) ganz inactiv war, während die Lösung in Benzol ($p =$ etwa 4,5) eine Drehung $[\alpha]_j = -3,68^0$, die mit der Bestimmung von MARSH eine gute Übereinstimmung zeigt, aufwies. Für ein anderes Präparat, das vielleicht nicht gleich peinlich gereinigt und aus einer Camphersäure, die 4 Stunden mit Salzsäure und Eisessig auf 180° erhitzt worden, dargestellt war, wurde $[\alpha]_j$ zu $-3,22^0$ gefunden; ebenso zeigte ein Präparat, das aus einer während 8 Stunden in gleicher Art behandelten d-Camphersäure erhalten wurde, das Drehungsvermögen $[\alpha]_j = -3,51^0$.

Hiernach ist das Anhydrid der d-Camphersäure optisch activ und linksdrehend. Dass seine Chloroform-lösung dennoch inactiv ist, muss auf eine Compensirung der Activität durch das Lösungsmittel beruhen. Alle active Verbindungen zeigen, fast ohne Ausnahme, in verschiedenen Lösungsmitteln eine verschiedene Drehung. Zufälliger Weise wird bei dem untersuchten Anhydride die durch das genannte Lösungsmittel erzeugte Verminderung des Drehungsvermögen unter die vorhandenen Concentrations- und Temperatur-

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1891*, 3410.
[2]) Ann. de chim. phys. (5). *14*, 86.
[3]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1888*, 224.
[4]) Chemical News. *60*, 307.
[5]) Comptes Rendus. *108*, 978.

verhältnisse so gross, dass sie gerade die in der Benzollösung beobachtete Drehung paralysirt. Hieraus geht hervor, wie nothwendig die Anwendung verschiedener Lösungsmittel bei der optischen Diagnose von Körpern ist, die sich in unverdünntem Zustande nicht messen lassen und die, trotzdem man Activität erwarten könnte, doch Inactivität in einem Lösungsmittel zeigen können. Der vorliegende Fall wurde übrigens von VANT' HOFF vorhergesehen [1]).

Zur weiteren Charakteristik des Körpers wurde die Löslichkeit bestimmt. Bei $19,5^0$ beträgt sie in *Benzol* *6,36 g* auf 100 g des Lösungsmittels, bei 20^0 in *absolutem Alcohol* wurde *1,18 g* auf 100 g des Lösungsmittels gefunden.

Um die Möglichkeit einer Umlagerung kennen zu lernen, wurde das Anhydrid während 20 Stunden auf 270^0 erhitzt. Hierbei war eine geringe Zersetzung unter Bildung kleiner Mengen eines brenzlich riechenden Oeles eingetreten. Das gereinigte Anhydrid zeigte aber den Schmelzpunkt 220^0 und das Drehungsvermögen $[\alpha]_j = -3,45^0$; beim Kochen mit Kaliumcarbonatlösung wandelt es sich in eine Säure mit dem Schmelzpunkt und dem Drehungsvermögen der d-Camphersäure um. Andere Agenzien, die zu Umlagerungsversuche empfohlen sind, konnten wegen der Natur der Substanz nicht angewandt werden.

Der Versuch zeigt, dass trotz der langen Versuchsdauer und der hohen Temperatur eine Umlagerung des Anhydrides nicht herbeigeführt wird.

Das *Anhydrid der l-Camphersäure* wurde zuerst von CHAUTARD [1]) dargestellt, ist aber seitdem nicht untersucht worden. Der genannte Autor giebt betreffend desselben nur an, dass es dieselbe Krystallform wie die der d-Camphersäure und der Paracamphersäure (i-Camphersäure) zeigt.

Aus l-Camphersäure mittelst Acetylchlorid dargestellt, stellt das Anhydrid das vollständige Analogon des Anhydrides der d-Säure dar, mit Ausnahme der Drehungsrichtung. Ich fand übereinstimmend den Schmelzpunkt zu $220-221^0$. Auch die Krystallform, welche von Herrn Dr. K. VON KRAATZ in Heidelberg gemessen würde, zeigt die Ähnlichkeit mit dem optischen Antipoden. In Chloroformlösung war es ebenfalls inactiv, in Benzollösung wurde $[\alpha]_j$ zu $+3,93^0$ gefunden.

Die Löslichkeit in *Benzol* beträgt bei 19^0 *6,26 g* Anhydrid auf 100 g Lösungsmittel, in absolutem *Alcohol* bei 20^0 *1,18 g* auf 100 g Lösungsmittel.

[1]) Stereochemie von VANT' HOFF-MEYERHOFFER. S. 73.

[2]) Annalen der Chemie *127*, 124.

Beim Erhitzen während 14 Stunden auf 260° erleidet auch dieses Anhydrid keine Veränderung. Die aus dem Producte dargestellte l-Camphersäure zeigt nämlich das normale Drehungsvermögen.

Anhydrid der i-Camphersäure. Dieser Körper wurde zuerst von CHAUTARD (l. c.) dargestellt. Über seine Eigenschaften ist nur erwähnt, dass er in seiner Krystallform ganz dem der d- und l-Camphersäure gleicht. Dasselbe Anhydrid erhielten ARMSTRONG und TILDEN [1]) aus ihrer inactiven Camphersäure von Schmelzpunkt 202° (vergl. S. 60); den Schmelzpunkt geben sie zu 223° an.

Ich habe dieses Anhydrid sowohl durch Zusammenmischen gleicher Theile der Anhydride der d- und l-Camphersäuren, wie durch Einwirkung von Acetylchlorid auf i-Camphersäure bereitet. In beiden Fällen enstand ein Körper, der, aus Alcohol umkrystallisirt, ein ganz anderes Aussehen wie die Componenten zeigte. Die von Herrn Dr. K. VON KRAATZ ausgeführte Bestimmung der Krystallform hat dies bestätigt; nach ihm krystallisirt das i-Camphersäureanhydrid im monosymmetrischen, die Anhydride der Componenten im rhombischen System.

Den Schmelzpunkt fand ich übereinstimmend bei 221° liegend. Ob hier wirklich ein Unterschied in Bezug auf den Schmelzpunkt der activen Anhydride vorliegt, will ich doch unentschieden lassen. Die Lösungen des Anhydrids sind inactiv, sowohl in Chloroform wie in Benzol. Die Löslichkeit ist der der activen Componenten verschieden; sie beträgt für i-Anhydrid bei 20° *1,88 g* in 100 g absolutem Alcohol.

Beim Kochen mit Kaliumcarbonatlösung verwandelt sich das Anhydrid wieder in i-Camphersäure vom Schmelzpunkt 202—203°.

Die Bromcamphersäureanhydride.

Das von WREDEN schon frühzeitig [1]) dargestellte, *gewöhnliche Bromcamphersäureanhydrid* wurde seitdem vielfach untersucht, doch sind seine wichtigeren physicalischen Constanten nicht bestimmt worden.

l-Bromcamphersäureanhydrid. Wie die meisten Derivate der d-Camphersäure ist das entsprechende Bromcamphersäureanhydrid, dessen Schmelzpunkt in reinem Zustande bei 216° liegt, linksdrehend. Das Drehungsvermögen be-

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1879*, 1756.
[2]) Annalen der Chemie. *163*, 330.

trug in Chloroformlösung $[\alpha]_j = -21{,}1^0$, die Löslichkeit in Chloroform bei 19^0 $8{,}89$ *g* Substanz in 100 g Lösungsmittel, bei 16^0 war die Löslichkeit $8{,}47$ *g*, auf 100 g Lösungsmittel berechnet.

Zur Umlagerung der l-Bomcamphersäureanhydrids wurden mehrere Versuche ausgeführt, die theilweise an seine Zersetzlichkeit scheiterten. Beim Erhitzen desselben mit Eisessig und Salzsäure (gleiche Theile), mit wasserfreiem Eisessig, der trocknes Bromwasserstoff enthielt, sowie mit Eisessig allein auf $160-200^0$, trat immer Dunkelfärbung und Verschmierung ein. Nur beim Kochen mit Chinolin (während zwei Stunden) und beim trocknen Schmelzen wurde die Substanz in eine Form zurückerhalten, die die Bestimmung ihres Drehvermögens gestattete. In beiden Fällen blieb das Anhydrid unverändert; es wurden $[\alpha]_j$ zu resp. $-21{,}1^0$ und $21{,}2^0$ erhalten.

d-Bromcamphersäureanhydrid. Dieser Körper ist früher nicht dargestellt worden. Ich erhielt ihn aus l-Camphersäure in derselben Weise, wie das oben beschriebene Bromanhydrid aus d-Camphersäure, nämlich durch Einwirkung von Brom auf dem Chlorid der Säure.

Der Schmelzpunkt liegt ebenfalls bei 216^0. Das Drehungsvermögen beträgt in Chloroformlösung $[\alpha]_j = +21{,}6^0$ und die Löslichkeit in Chloroform wurde bei $18{,}5^0$ zu $8{,}91^0$ *g* auf 100 g Lösungsmittel bestimmt.

Das *i-Bromcamphersäureanhydrid* wurde durch Zusammenmischen conc. Lösungen von d- und l-Bromcamphersäureanhydrid erhalten. Der Schmelzpunkt liegt ebenfalls bei 216^0. Seine Lösung in Chloroform zeigte sich inactiv. Die Löslichkeit beträgt in Chloroform (20^0) $6{,}24$ *g*, in absolutem Alcohol (20^0) $0{,}363$ Substanz auf 100 g Lösungsmittel.

Die Bestimmung der Krystallform der Bromanhydride, die von Herrn Professor J. F. Wiik gütigst übernommen wurde, ergab Gleichheit für die activen Anhydride; dagegen krystallisirt das i-Anhydrid etwas verschieden.

Die Chlorcamphersäureanhydride.

Diese Körper sind früher nicht dargestellt worden. Ich erhielt sie durch Einwirkung von Chlor auf die Chloride der d- und l-Camphersäure. Sie stellen gut krystallisirte Verbindungen dar, deren Schmelzpunkt etwas höher wie der der Bromanhydride liegt.

l-Chlorcamphersäureanhydrid. Der Schmelzpunkt dieses aus d-Camphersäure erhaltenen Chlorcamphersäureanhydrides liegt bei 234^0. Das Drehungsvermögen beträgt in Cloroformlösung (10%): $[\alpha]_j = -16{,}3^0$; in gesättigter ab-

solut alcoholischer Lösung wurde $[\alpha]_j$ bei 18^0 zu $-15{,}4^0$ gefunden. Die Löslichkeit beträgt bei 18^0 *0,96 g* Substanz auf 100 g absolutem Alcohol. Beim Kochen mit Chinolin findet keine Umlagerung statt, indem das Drehvermögen unverändert bleibt, ebenso beim Erhitzen für sich auf höhere Temperatur.

d-Chlorcamphersäureanhydrid, aus l-Camphersäure dargestellt, schmilzt ebenfalls bei 234^0. $[\alpha]_j$ (in abs. alcoholischer Lösung bei 18^0) $= -15{,}1^0$. Löslichkeit in absolutem Alcohol bei $17{,}8^0$: *1,10 g* Substanz in 100 g Lösungsmittel.

i-Chlorcamphersäureanhydrid, durch Zusammenmischen äqvivalenter Mengen in alcoholischer Lösung erhalten. Schmelzpunkt 234^0. Inactiv. Löslichkeit in absolutem Alcohol: *1,26 g* Substanz auf 100 g Lösungsmittel bei $18{,}5^0$.

Die Camphansäuren.

l-Camphansäure. Diese aus dem gewöhnlichen l-Bromcamphersäureanhydrid darstellbare Lactonsäure, die zuerst von WREDEN [1]) erhalten wurde, ist mehrmahls untersucht, doch ist das Drehungsvermögen sowie ihre Umlagerungsfähigkeit nicht bestimmt worden.

Die Säure, deren Schmelzpunkt bei $200-201^0$ gefunden wurde, ist linksdrehend und zwar beträgt $[\alpha]_j = -7{,}14^0$ in etwa 10 % absolut alcoholischer Lösung; die obige Constante ist das aritmetische Mittel zweier gut übereinstimmenden Versuche.

Versuche zur Umlagerung der l-Camphansäure wurden sowohl in alkalischer, wie in saurer Lösung ausgeführt. Einerseits wurde die Säure in 50 % Natronlange aufgelöst und die Lösung langsam eingekocht, bis sich das Natronsalz völlig abschied. Andererseits erhitzte ich die Lösung der Säure in Eisessig längere Zeit auf 150^0 und 200^0. In beiden Fällen erhielt ich die Säure mit unverändertem Drehungsvermögen zurück.

Die *d-Camphansäure* wurde aus dem aus l-Camphersäure erhaltenen d-Bromcamphersäureanhydrid dargestellt. Der Schmelzpunkt liegt ebenfalls bei $200-201^0$. Das Drehungsvermögen beträgt $[\alpha]_j = 7{,}0^0$.

i-Camphansäure wurde sowohl durch Zusammenmischen gleicher Theile der Componenten, wie auch durch Zersetzung des i-Bromcamphersäureanhydrids mit Kaliumacetat gewonnen. In beiden Fällen erwies sie sich, sowohl

---

[1]) Annalen der Chemie. *163*, 330.

in wässeriger, wie in alcoholischer Lösung, inactiv. Der Schmelzpunkt liegt bei 201—202°, wie der der Componenten.

Wie aus dem obigen Zusammenstellung ersichtlich, lässt sich, aus d- und l-Camphersäure ausgehend, je zwei active Anhydride, Brom- und Chloranhydride sowie Camphansäuren darstellen, die mit Ausnahme der entgegengesetzten Drehungsrichtung alle physicalischen Constanten gemeinsam haben und demnach optische Isomerie aufweisen. Weiter lässt sich dem Obengesagten entnehmen, dass es durch geeignete Versuche *nicht möglich war, eine Umlagerung der activen Verbindungen weder in einander noch in andere Modificationen herbeizuführen*, obwohl sie die beiden in Camphersäure ursprünglich vorhandenen, asymmetrischen Kohlenstoffatome enthalten müssen. Nach Schliessung der Anhydrid- resp. Lactonbrücke sind nämlich diese *C*-Atome, wie vorher, mit vier verschiedenen Gruppen verbunden. Dasselbe Verhalten zeigten auch die activen Modificationen des Camphers, wie schon erwähnt.

Die genannten Körper unterscheiden sich also, betreffend ihrer Umwandlungsfähigkeit und der Zahl der Isomeren, entschieden von den activen offenkettigen und Polymethylenverbindungen. Eine natürliche Erklärung ihrer Ausnahmestellung scheint mir auf den molekularen Bau der betreffenden Verbindungen ungezwungen zurückgeführt werden zu können.

Sie haben alle in dieser Hinsicht zwei Momente gemeinsam: erstens, dass *sie einen doppelten Ringkern enthalten*, und zweitens: *dass die beiden asymmetrischen Kohlenstoffatome für die beiden Kerne gemeinsam sind.*

Dieses lässt sich, was zunächst dem Campher betrifft, aus der früher (Seite 89) bewiesenen Thatsache, dass die asymmetrischen Kohlenstoffatome in Camphersäure Theile des Polymethylenringes sind, ableiten. Der Campher stellt nämlich, nach der allgemein getheilten Anschauung, ein Gebilde dar, dessen Kern ringformig gebaut, und worin noch zwei Kohlenstoffatome des Ringes entweder direct oder durch Vermittelung anderer Kohlenstoffatome mit einander verbunden sind, wodurch ein doppelter Ringkern entsteht. Da die Camphersäurebildung unter Sprengung des einem Kernes erfolgt, nach dem Schema:

$$C_8H_{14}\left\langle\begin{array}{l} CH_2 \\ \mid \\ CO \end{array}\right. \longrightarrow C_8H_{14}\left\langle\begin{array}{l} COOH \\ \\ COOH \end{array}\right.$$

so bleiben die beiden entstehenden Carboxyle an zwei verschiedenen Atome des zweiten Kernes entweder direct oder indirect verbunden. Da die in Campher ursprünglich vorhandene Asymmetrie durch die Oxydation keine Veränderung erleidet, lässt sich der Rückschluss ziehen, dass die in der Camphersäure vorhandene Anzahl asymmetrischer *C*-Atome, die zu zwei bestimmt worden sind, auch im Campher vorhanden sein muss.

Auch in den übrigen erwähnten Verbindungen ist, wie im Campher, ein Doppelkern vorhanden; sie enthalten alle zwei asymmetrischen *C*-Atome, die die beiden Ringkerne verbinden. Es folgt dies für die Anhydride, Chlor- und Bromanhydride der Camphersäure und für die Camphansäuren ohne Weiteres aus der an der Seite 114 angeführten, wenn man zugleich die obenanstehende Darlegung berücksichtigt.

Eine allgemeine Betrachtung derartig gebauter Körper lässt nun in der That Gesichtspuncte hervortreten, die zur Erklärung ihres anomalen Verhaltens genügen.

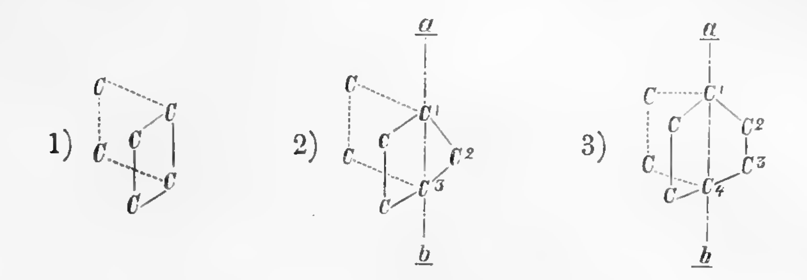
Zur Theorie doppelter resp. dreifacher Ringsysteme.

v. Baeyer hat bekanntlich angenommen, dass die Polymethylenverbindungen ihre Ringkohlenstoffatome in planer Anordnung enthalten, und die bis jetzt bekannten Thatsachen stehen hiermit durchaus in Übereinstimmung. Diese Annahme beruht auf Erwägungen mechanischer Art, indem angenommen wird, dass, bei Anordnung der Ringatome in einer Ebene, die kleinsten intramolekularen Spannungen vorauszusehen sind.

Ähnliche Spannungsverhältnisse, wie in den einfachen Polymethylensystemen, müssen auch im Molekyle der Körper mit doppelten Ringkernen herrschen. Sie sind nämlich ähnlich gebaut, nur mit der Ausnahme, dass sie zwei Ringsysteme statt eines enthalten. Eine Übertragung der Anschauung v. Baeyers auf diese Verbindungen enthält demnach nichts Befremdendes. Ich setze also als richtig voraus, dass die Kohlenstoffatome, welche die doppelcyklischen Kernsysteme bilden, die gegenseitige Stellung einnehmen, welche der geringsten Spannung entspricht.

Wie die Anwendung der Modelle sofort ergiebt, folgt hieraus zunächst nicht unbedingt, dass die Ringatome in jedem bliebigen Doppelsystem in zwei Ebenen vertheilt werden müssen. Es sind nämlich zwei Fälle möglich, deren Unterschied darauf beruht, ob 1) zwei Kohlenstoffatome für die beiden Ringsysteme gemein sind, oder 2) drei oder mehrere gleizeitig zu beiden gehö-

ren [1]). In erstem Falle sind die Ringatome in je zwei, im zweiten in je drei Ebenen vertheilt, wie z. B. die folgenden schematischen Formeln veranschaulichen sollen:



In Formel 1) sind die Kohlenstoffatome in zwei Ebenen vertheilt, von denen keine mit der Ebene des Papiers zusammenfällt. Die Formeln 2) und 3) veranschaulichen die Anordnung bei Doppelsystemen, die drei und vier Kohlenstoffatome gemeinsam haben. In diesen Fällen vertheilen sich die Atome in je drei Ebenen, die sich in der Linie *ab* schneiden. Die mit 1, 2, 3 resp. 1, 2, 3, 4 bezeichneten sollen in der Ebene des Papiers, die übrigen in zwei gegen diese geneigten liegen [2]).

---

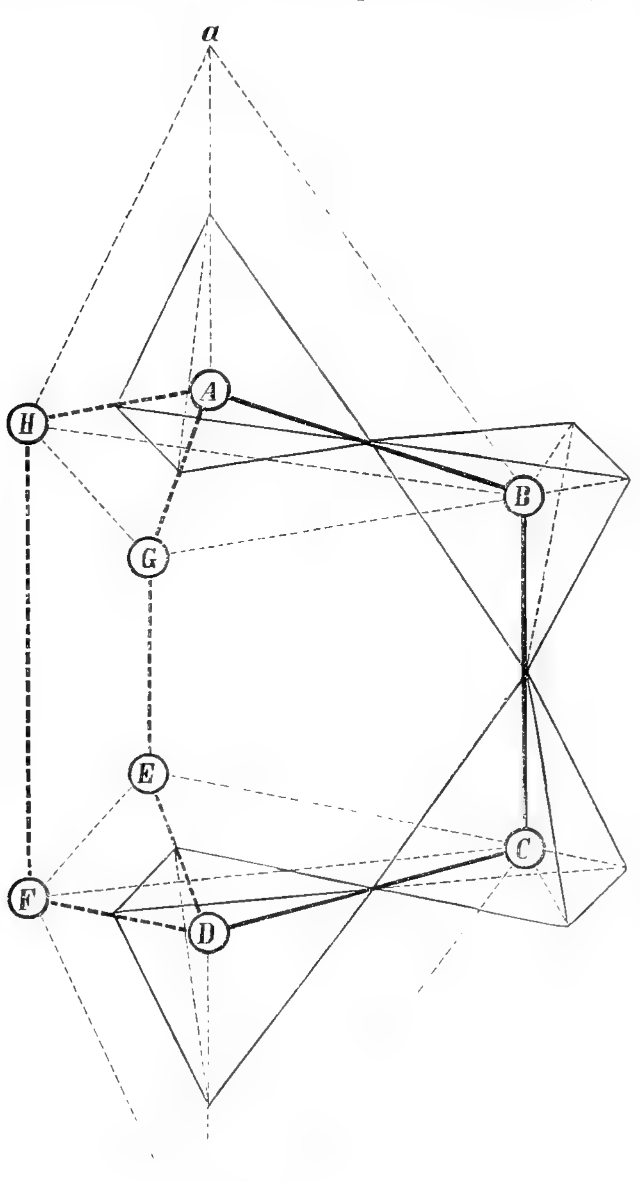
[1]) Hierbei ziehe ich den einfachsten Fall, dass die beiden Systeme nur einen einzigen *C*-Atom gemeinsam haben, gar nicht in Betracht, weil in diesem Falle eine auf die Ringschliessung beruhende Asymmetrie nur an diesem einen Kernatom auftreten kann, während die zu besprechenden Verbindungen zwei solche enthalten.

[2]) Für das Schema 3) oben wäre man vielleicht geneigt sein anzunehmen, dass die darin herrschende Spannung, ähnlich wie im Hexamethylen (Vergl. die Note [5]) S. 76), die Ringe zusammenzudrücken bestrebt wäre. Dem ist jedoch nicht so, weil in einem derartig gebauten Ringsystem gar keine Spannung vorhanden ist, was leicht an einem Modelle zu ersehen ist. Dasselbe lässt sich auch durch Construction zeigen. Durch die perspectivische Zeichnung (siehe Umstehend) wird der Fall veranschaulicht. Man denke sich ein gleichseitiges Prisma *BHGCFE*, worin also die Kanten *BC*, *HF* und *GE* einander parallel und gleich sind (wegen der perspectivischen Anordnung des Bildes tritt es verzerrt auf); die Basenebenen *BHG* und *CFE* des Prismas stellen zwei gleich grosse und gleichseitige Dreiecke dar. Diese Dreiecke werden nun durch die Basen zweier gleich grossen, regulären Tetraëder *aABGH* und *bDCEF* gedeckt, und die Mittelpunkte *A* und *D* der Tetraëder mit den drei jedem Tetraëder zugehörigen Ecken des Prismas verbunden. War ursprünglich die Höhe des Prismas, also die Linien *BC*, *HF* und *GE*, so gewählt, dass sie mit den Verbindungslinien *AB*, *AG*, *AH* resp. *DC*, *DE*, *DF* vom Tetraëdermittelpunkte zu den Ecken gleich gross wurde, so stellt nunmehr das Gebilde *ABCDEGHF*, das gröber gezeichnet ist, das gesuchte Schema 3) dar. Die acht Kohlenstoffatome sind als kleine Kreise gezeichnet, von denen die mit *A*, *B*, *C* und *D* bezeichneten, die in der Ebene des Papiers liegen, von den umhüllenden kleinen Tetraëder umgeben sind, während von den vier übrigen je zwei über und hinter dieser Ebene gedacht werden.

Dass in diesem Gebilde in der That keine Spannung vorhanden ist, geht schon aus der Construction hervor. Weil das Gebilde völlig symmetrisch ist, sind die Linien *aA*, *bD*, *BC*, *GE* und *HF* mit einander parallel. Daraus folgt, dass die Winkel $aAB = ABC$, $bDC = DCB$ sind, und da $aAB =$

Sind diese Voraussetzungen richtig [1]), so tritt der Unterschied zwischen Körpern mit einfachem und doppeltem Ringkern, was der Configuration be-

$bDC = 109^\circ\ 28'$ (Winkel zwischen zwei Valenzrichtungen im Kohlenstofftetraëder), so ist auch $ABC = BCD = 109^\circ\ 28'$. Für die zwei übrigen Bruchstücke des Systemes lässt sich dasselbe beweisen: $aAG = AGE = GED = bDE = 109^\circ\ 28'$ und $aAH = AHF = HFD = bDF = 109^\circ\ 28'$. Da weiter nach der Construction $AB = BC = CD = DE = EG = AG = AH = HF = DF$, so herrscht keine Spannung in dem Systeme.



Was die übrigen, oben angeführten Systeme betrifft, muss in ihnen eine den Ring erweiternde Spannung vorhanden sein. Bei ihnen ist also, aus mechanischen Gründen, eine Neigung zur Anordnung der Ringatome in zwei resp. drei Ebenen vorauszusetzen.

[1]) Die erwähnten Bedingungen gelten meiner Ansicht nach unbedingt nur für den ideell gedachten Fall, dass die betheiligten Kohlenstoffatome mit Wasserstoff gesättigt wären. Treten andere Atome oder Atomgruppen als Substituenten ein, denke ich mir, dass eine kleine Verrückung derselben aus der Ebene stattfinden könnte, entsprechend der dadurch erzeugten Anziehung der benachbarten Atome. Diese Verrückung wird aber wegen der herrschenden Spannung nicht gross sein, und da es sich hier um die Configuration, nicht aber um eine Structurfrage handelt, so gelten die folgenden Erwägungen trotzdem.

trifft, prägnant hervor. Nehmen wir zum Vergleich die folgenden einfachen Fälle:

1)
HX
C
H_2C CH_2
H_2C CH_2
C
HX

2)
X
H_2C — C — CH_2
H_2C — C — CH_2
X

so kommt der Körper 1), wie v. Baeyer sowohl theoretisch vorausgesetzt, wie experimentell bewiesen hat, in zwei geometrisch isomeren Modificationen

H X
C
H_2C CH_2
H_2C CH_2
C
X H

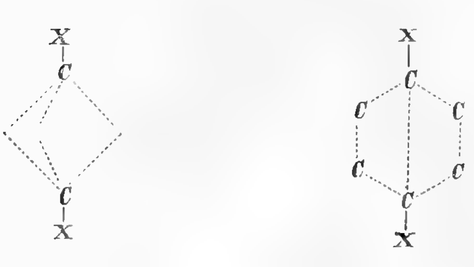
und

H X
C
H_2C CH_2
H_2C CH_2
C
H X

vor, während eine nach 2) zusammengesetzte Verbindung der Theorie nach nur eine geometrisch isomere Form erzeugen kann, wie aus der folgenden, räumlich gedachten Formel hervorgeht:

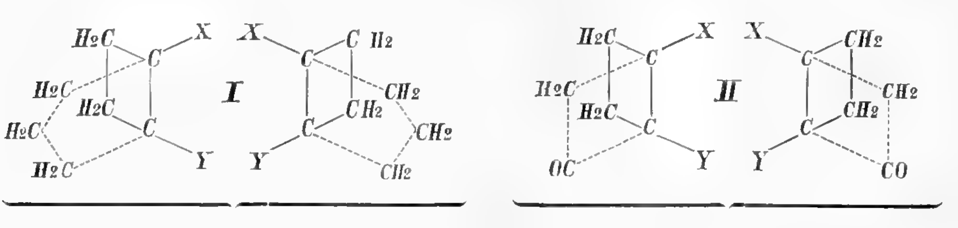
H_2C X
C
H_2C
H_2C
C
H_2C X

Wie nun eine Analogie in stereochemischer Hinsicht zwischen Verbindungen mit einem einfachen Ringsystem und Körpern mit einer doppelten Bindung factisch besteht, so kann die Bindungsart zwei-kerniger Verbindungen gewissermassen mit einer *Acetylenbindung* verglichen werden. Ein Acetylenderivat existirt nur in einer stereomeren Form; so auch ein Körper mit einem symmetrischen Doppelringsystem:



Acetylensystem. System mit Doppelkern.

Werden weiter die Gruppen XX ungleich, ändern sich die Verhältnisse in beiden Fällen nicht; nur eine einzige Form tritt auf. Tritt aber eine weitere Veränderung in den Systemen ein, so hört die Analogie auf. Das Acetylensystem kann eine weitere Veränderung nicht erleiden, wohl aber die Verbindung mit dem Doppelkern, indem die Kerne, entweder durch Substitution oder Erweiterung, einander ungleich werden. Es tritt Asymmetrie ein, und *zwei Formen sind möglich, die aber nicht geometrisch, sondern optisch isomer sind*, wie zum Beispiel die folgenden Formeln zeigen:



Spiegelbildisomerie. Spiegelbildisomerie.

Noch ist zu bemerken, dass im Falle II die Asymmetrie und folglich auch die Spiegelbildisomerie erhalten bleibt, wenn X und Y gleich sind.

Eine Betrachtung der gegebenen Beispiele ergiebt, dass von den beiden Kohlenstoffatomen, die für den doppelten Ringkern gemeinsam sind, jeder für sich in gewöhnlichem Sinne asymmetrisch ist. Doch gelangt die dadurch erzeugte Asymmetrie hier nicht zum Ausdruck; statt die zu erwartenden vier Formen sind nur zwei möglich. Die Einzelwirkungen jener beiden Atome machen für diejenige Totalwirkung Platz, welche auf die *Asymmetrie des ganzen Molekyls* beruht.

Dies erklärt sich dadurch, dass die beiden asymmetrischen C-Atome dreimal durch Kohlenstoffbindung und somit gewissermassen in unverrückbarer Weise vereinigt sind, weshalb sie Schwingungen gemeinsamer Art aufzuweisen haben. Es wird ein derartiges System demjenigen ähnlich, welches ein Kör-

per der aliphatischen resp. alicyklischen Reihe darstellt, der nur *ein einziges* asymmetrisches Atom einschliesst. Es treten deshalb nur zwei optisch isomere Modificationen auf.

Als weitere Beispiele derselben Art könnten die folgenden Systeme gelten:

III IV V

worin zwei *C*-Atome für drei resp. vier ungleiche, in zwei oder drei Ebenen vertheilte Ringsysteme oder deren Bruchstücke *R*, *R'* und *R''*, resp. *R*, *R'*, *R''* ond *R'''* gemeinsam sind. Von den Typen IV und V ist meines Wissens kein Körper bekannt.

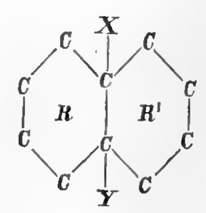
Allgemein kann gesagt werden, dass, wenn in einem Körper zwei Kohlenstoffatome gleichzeitig zu zwei oder drei verschiedenartigen Ringsystemen angehören, so besitzt sein Molekyl keine Symmetrie-ebene und der betreffende Körper tritt in nur zwei isomeren Modificationen auf, die optisch activ sind

Betrachtet man die Verhältnisse, unter denen eine Umlagerung dieser beiden Modificationen in einander vollziehen würde, so ist zunächst ersichtlich, dass sie bei einem nach den obigen Formeln IV und V gebauten Körper kaum durchführbar wäre. Auch bei Körpern von dem Typus I, II und III (siehe oben), erscheint die Umlagerung sehr erschwert. Während sich der Platzwechsel bei einer offenen Kette oder einem einfachen Ring unter Austausch zweier Atome oder Gruppen vollzieht, müssen hier nicht nur die beiden freien Gruppen, sondern auch die beiden Ringsysteme gegen einander versetzt werden, z. B.:

Rechtsform. Linksform.

Dass hierzu ein ganz bedeutender Energieaufwand nöthig wäre, ist einleuchtend. Deshalb wird auch die Umlagerung durch gewöhnliche Mittel schwer gelingen.

Durch die obenanstehenden Speculationen will ich aber keineswegs in allen Fällen als unmöglich hinstellen, dass vielgliedrige Ringsysteme existiren, die zu gleicher Zeit geometrische Isomerie aufweisen und somit in vier Modificationen auftreten könnten. In diesen Fällen muss aber dasjenige Paar der Isomeren, welches die Ringatome in planer Anordnung enthält und somit, so zu sagen, die cis-Form darstellt, betreffend ihrer Stabilität bei Weitem mehr bevorzugt sein; das andere Paar wird sich weniger beständig zeigen und leicht in jenes umwandeln lassen. Zur Zeit liegt aber noch keine Anleitung vor, für condensirte isocyklische Systeme, bei Verbindungen also, deren Ringkerne ausschliesslich aus Kohlenstoff bestehen, eine solche Einschränkung anzunehmen. Wenn man nämlich mit v. BAEYER annimmt, dass dem Hexamethylen eine plane Anordnung der Ringatome zukommt, hat man wenig Anlass zu behaupten, dass z. B. in einem Körper der Typus



die Atome der beiden ringförmigen Ketten nicht in je einer Ebene angeordnet seien.

Wohl aber ist vorauszusehen, dass bei Eintritt anderer Atome statt Kohlenstoff in dem Ringkern die Existenzmöglichkeit der nicht bevorzugten, geometrisch isomeren Form vergrössert wird. Man ist nämlich berechtigt anzunehmen, dass die Valenzrichtungen anderer mehrwerthiger Atome nicht nothwendiger Weise mit denen des Kohlenstoffs zusammenfallen müssen; in heterocyklischen Systemen sind deshalb auch andere Spannungsverhältnisse zu erwarten. Aus demselben Grunde sind mehr als sechsgliedrige Ringsysteme unter den heterocyklischen Verbindungen viel häufiger, wie unter den isocyklischen.

Sauerstoff tritt nun auch als constituirendes Atom bei Ringschlüssen ein. Thatsächlich liegen schon Beispiele vor, welche zeigen, dass geometrische Isomerie auch bei zweigliedrigen Ringsystemen auftreten kann, wenn Sauerstoff an der Ringbildung des einen Systems betheiligt ist. Die betreffenden Verbindungen sind aber synthetisch dargestellt und deshalb nicht optisch activ. Es sind dies die Anhydride der cis- und cistrans-Hexahydrophtalsäure von

Baeyer[1]), und die entsprechenden Anhydride der Pentamethylendicarbonsäuren von Perkin j:r[2]).

In Campher hat man, wie erwähnt, mit einem Körper zu thun, der trotz dem Vorhandensein zweier asymmetrischen *C*-Atome in seinem Molekyle, doch nur in zwei zusammengehörigen activen Modificationen, die sich in einander nicht überführen lassen, auftritt. Dies findet nun durch das oben Angeführte, welches hier seine Richtigkeit beibehält bis neue Camphermodificationen entdeckt werden, seine Erklärung.

Die Anschauung, dass eine plane Anordnung in den im Campher vorkommenden Ringsystemen vorhanden ist, wird durch die Anhydrisirbarkeit der aus den beiden Camphermodificationen durch Oxydation erhaltenen Camphersäuren entschieden bekräftigt. Die grosse Leichtigkeit, womit d- und l-Camphersäure in ihre Anhydride übergehen, zeigt, dass die Carboxyle einander sehr nahe liegen müssen (vergl. S. 28). Bei der mittelst Oxydation bewirkten Aufspaltung des einen Kernringes im Campher müssen also die beiden nunmehr getrennten, früher an einander gebundenen Kohlenstoffe des Methylens und Carbonyls einander nahe liegend bleiben. Dies wäre unter Annahme einer beträchtlicheren Spannung in einem oder in beiden Ringsystemen des Camphers, welche Spannung bei nicht planer Anordnung der Systeme vorauszusehen wäre, nicht gut vereinbar.

Mit dieser Anschauung steht auch der schon früher erwähnte Umstand durchaus im Einklang, dass die der d- und l-Camphersäure geometrisch isomere l-Isocamphersäure kein eigenes, einfaches Anhydrid bildet. Wäre für die beiden Camphern die Möglichkeit vorhanden, in zwei mit einander geometrisch isomeren Formen zu existiren, welche dann den beiden Isocamphersäuren entsprechen würden, so ist nicht einzusehen, warum die Anhydride, die diesen Säuren entsprechen, nicht bildungsfähig wären, umsomehr als dieser Anhydridring, durch den Zutritt noch eines weiteren Atomes, des Anhydridsauerstoffs, eine grössere Spannweite repräsentiren würde, wie der entsprechende Kohlenstoffring im Campher.

Dasselbe kann auch von anderen Derivaten des Camphers, die den ursprünglichen Campherkern enthalten, wie z. B. von den Borneolen, den Brom- und Chlorcampher, den Nitrocampher u. s. w., mit gleicher Wahrscheinlich-

---

[1]) Annalen der Chemie. *258*, 177.
[2]) Chem. Centralblatt *1895*, 26.

keit behauptet werden. Dass einige von diesen Körpern trotzdem in mehr als zwei Modificationen, die dazu noch umwandelbar sind, vorkommen, dient nur zur Bestätigung der entwickelten Anschauung.

Die im Campher vorhandene Asymmetrie des Molekyles kann nämlich einer Complication erfahren, wenn ein weiteres C-Atom, sei es in einer Seitengruppe, sei es in einem der Ringsysteme, asymmetrisch wird. Es ist aber zu bemerken, dass die Gruppen an diesem Kohlenstoff, wie überhaupt bei aliphatischen und einfachen alicyklischen Körpern, eine Umlagerung bei geeigneter Behandlung erleiden können. Die Borneole stellen den am besten studirten derartigen Fall dar.

Nach den Untersuchungen von MONTGOLFIER[1]) und von HALLER[2]) kommt das Borneol in vier structuridentischen, optisch activen Formen vor[3]). Sie entstehen paarweise bei Reduction der beiden Campher, wobei ein weiteres asymmetrisches C-Atom hinzukommt:

$$C_8H_{14}\left\langle\begin{matrix} CH_2 \\ | \\ CO \end{matrix}\right. + 2\,H = C_8H_{14}\left\langle\begin{matrix} CH_2 \\ \\ CH.OH \end{matrix}\right.$$

Hieraus erklärt sich, der stereochemischen Grundidé nach, die Verdoppelung der Formen. Aus d-Campher entsteht ein variables Gemenge von d-α-Borneol und l-β-Borneol; beide gehen bei der Oxydation wieder i d-Campher über. l-Campher bildet ebenso l-α-Borneol und d-β-Borneol, aus welchen jener zurückgebildet werden kann. Die labilen β-Borneole lassen sich in die stabilen α-Borneole beim Erhitzen verwandeln, und zwar entsteht unter Umkehrung der Drehungsrichtung aus l-β-Borneol d-α-Borneol, aus d-β-Borneol l-α-Borneol.

Die beiden Borneolreihen sind also mit einander geometrisch isomer. Obwohl das Borneol drei asymmetrische C-Atome enthält, tritt es in nur vier activen Formen auf, was mit der oben entwickelten Ansicht in Übereinstimmung steht. Die beiden im Campherkern vorfindlichen asymmetrischen Systeme verhalten sich so, als ob nur ein einziges System dieser Art vorhanden wäre, und lassen sich nicht umlagern. Beim Hinzutreten noch eines asymmetrischen Atomes wird die Zahl der Isomeren verdoppelt. Die Umwandlungs-

---

[1]) Dissertation, Paris 1878. Über die Ergebnisse der mir nicht zugänglichen Arbeit siehe *Handb. der Stereochemie* von BISCHOFF-WALDEN. S. 359.

[2]) Ann. de chim. phys. [5], *14*, 38.

[3]) Vergl. auch BERTRAM und WAHLBAUM, *Journ. pract. chem.* [2], *49*, 1. Diese Stereomeren sind mit den von BOUCHARDAT und LAFONT erhaltenen, structurverschiedenen Terebentencamphenolen nicht zu verwechseln (vgl. BISCHOFF-WALDEN Handb. S. 914, 917).

fähigkeit der Formen beruht darauf, dass dieses Atom nur dem einen Kohlenstoffringe angehört.

Die beim Bromieren des d-Camphers entstehenden beiden Bromcampher (α und β) bieten ein weiteres Beispiel in dem betreffenden Sinne dar. Bei der Substitution eines Wasserstoffs in der Methylengruppe des Camphers tritt eine weitere Asymmetrie hinzu, woraus das Auftreten zweier optisch activen Formen erklärlich wird. Diese sind beim Erhitzen in der Art in einander umwandelbar, dass die β-Form in die α-Form übergeht. Ebenso dürfte man aus l-Campher zwei Bromcampher, die zu einander in gleichen Beziehungen stehen würden, erwarten.

Von den Campherderivaten, soweit sie auf ihre Umwandlungsfähigkeit untersucht sind, scheinen nur die Camphene in der Hinsicht eine Ausnahmestellung einzunehmen, dass die Umwandlung der beiden Modificationen in einander möglich sein soll. Bouchardat und Lafont [1]) haben nämlich gefunden, dass ein aus l-Terpentinchlorhydrat vermittelst alcoholischem Kaliumacetat dargestellter Camphen seine Drehung bei längerem Erhitzen verminderte. Doch ist hervorzuheben, dass die Chemie der Camphene noch gicht genügend sichergestellt ist. Speciell ist keineswegs als bewiesen zu betrachten, (vergl. S. 4), dass die aus den Hydrochloriden der Pinene erhaltenen Camphene mit denen aus den Borneolen erhaltenen identisch sind.

Was den übrigen Campherverbindungen, die oben auf ihre Umwandlungsfähigkeit untersucht wurden, nämlich die Camphersäureanhydride, die Brom- und Chloranhydride der d- und l-Camphersäure, sowie die Camphansäuren betrifft, so ist daran zu erinnern, dass in denselben ein Sauerstoff an der Ringbildung theilnimmt. Es wäre deshalb (vergl. S. 128) die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass sie dennoch in vier statt in zwei activen Formen auftreten könnten. Allein, der schon mehrmals angeführte Umstand, dass die l-Isocamphersäure zur Bildung eines einfachen Anhydrids nicht fähig ist, lässt auch hier diese Annahme wenig wahrscheinlich erscheinen. Eigentlich bezieht sich dieser Schluss direct nur auf die Anhydride und die genannten Monohalogensubstitutionsproducte derselben. Da in den Camphansäuren der zweite, sauerstoffenthaltende Ringkern eine kleinere Anzahl ringconstituirenden Atome enthalten muss, wie der der Anhydride, weshalb eine stärkere intramolekulare

---

[1]) Bulletin Soc. chim. *47*, 489.

Spannung in ihnen herrschen muss, so sind ähnliche Lagerungsverhältnisse auch in ihrer Molekyle anzunehmen.

Die Anschauung ist also berechtigt, dass auch in den Anhydriden, Brom- und Chloranhydriden der Camphersäuren, sowie in den Camphansäuren, eine plane Anordnung der in diesen Körpern vorhandenen Ringsysteme herrscht. Hieraus würde sich ihre Nichtumwandelbarkeit in einander, sowie der Umstand, dass sie trotz dem Vorhandensein zweier in gewöhnlichem Sinne asymmetrischen *C*-Atome, nur in zwei optisch activen Modificationen auftreten, erklären.

Allgemeines über molekulare Asymmetrie.

Oben wurde darauf hingewiesen, dass in Körpern, die mehrere ungleichartige Ringsysteme an zwei gemeinsamen Kohlenstoffatome enthalten, die Einzelwirkungen dieser beiden asymmetrischen Atome sich nicht wie gewöhnlich kund geben. Das ganze System wäre, betreffend seiner in optischer Hinsicht hervorgebrachten Wirkung, einem System der aliphatischen resp. alicyklischen Reihe, das nur einen *einzigen* asymmetrischen Kohlenstoff einschliesst, ähnlich.

Die directe Unabhängigkeit der zu erwartenden Anzahl activer Formen von den beiden einzelnen, in einem derartig gebauten Molekyl vorhandenen Kohlenstoffatomen, die gleichwohl eine typische Asymmetrie aufweisen, da jedes von ihnen mit verschiedenen Gruppen vereinigt ist, veranlasst mir folgende Betrachtungen über die Abhängigkeit der optischen Activität von der Asymmetrie *des Molekyles* von Neuem in Erwägung zu bringen.

Indem ich mich hier, wie überall früher in dieser Arbeit, auf der allgemein angenommenen Anschauung stütze, dass das Auftreten zweier nicht deckbaren, enantiomorphen Formelbilder mit der Existenz zweier entgegengesetzt drehenden Substanzen verknüpft ist, möchte ich mich hierüber folgendermassen aussprechen:

Optische Activität tritt nur bei Körpern auf, deren Molekyl keine Symmetrieebene besitzt. Es entspricht dies die Abhängigkeit der optischen Activität von der *molekularen Asymmetrie.*

Ich bringe diesen Satz als etwas Neues durchaus nicht hervor. Erstens ist er, wie erwähnt, eine directe Folgerung des Theoremes über die Disymmetrie. Zweitens machen sich, wie ich glaube, die meisten Forscher, die sich mit stereochemischen Problemen beschäftigt haben, diese Vorstellung still-

schweigend, wenn sie es nicht etwa ausgesprochen haben, wie PASTEUR [1]), LE BEL [2]), VAN'T HOFF [3]), GRINER [4]), BOUVEAULT [5]) u. A. Wenn ich trotzdem die Aufmerksamkeit nochmals darauf lenke, geschieht es, weil der obige Satz zu einer generelleren Anschauung über die Ursache der Activität führt.

Es sei zunächst daran erinnert, dass die optische Activität, die nach VAN'T HOFF [6]) „bei dem an vier verschiedene Gruppen gebundenen sogenannten asymmetrischen Kohlenstoff, und nur dort, zu erwarten ist", und die nach LE BEL [7]) „dem unsymmetrischen Kohlenstoff (und unsymm. Stickstoff) entspricht", nicht bei allen Körpern mit einem oder mehreren asymmetrischen Kohlenstoffatomen auftritt. Hierbei bleiben natürlich die Fälle unberücksichtigt, worin die Inactivität darauf beruht, dass die beiden enantiomorphen Modificationen in gleicher Menge in der zu untersuchenden Lösung vorhanden sind.

Nehmen wir zuerst den bekannten Fall der Mesoweinsäure vor. Nach dem Projectionsschema von FISCHER lässt sie sich folgendermassen bildlich darstellen:

$$\begin{array}{c} OH \\ H - \overset{|}{C} - COOH \\ H - C - COOH \\ OH \end{array}$$

Wir haben hier mit einer Verbindung zu thun, die thatsächlich zwei in gewöhnlichem Sinne asymmetrischen *C*-Atome enthält. Trotzdem ist Inactivität vorhanden, weil die Mesoweinsäure, wie man zu sagen pflegt, zwei in verschie-

---

[1]) Vergl. Handbuch der Stereochemie von BISCHOFF-WALDEN. S. 143.

[2]) L. c. S. 146.

[3]) VAN'T HOFF spricht mehrmals von der *Symmetrie der Formel*, wenn inactive Verbindungen vorliegen; vergl. z. B. „Die Lagerung der Atome im Raume" II Aufl. S. 52 ff.

[4]) Ann. chim. phys. *26*, 308. Verf. drückt sich wie folgt aus: Pour qu'un composé possède l'activité optique, il faut et il suffit que sa molécule ne possède pas de plan de symétrie; dans le cas, il y a toujours un symétrique non superposable.

[5]) BOUVEAULT spricht hierüber Folgendes (Bulletin soc. chim. *1894*, 144): Un corps à chaine fermée jouit de l'isomérie optique quand il ne possède de plan de symétrie, par suite quand il n'est pas superposable à son image. Vergl. hierzu eine über die genannte Publication entsponnene Polemik seitens COMBES (l. c. S. 261, 356, 436).

[6]) Die Lagerung der Atome im Raume. II. Aufl. S. 7.

[7]) Handbuch der Stereochemie von BISCHOFF-WALDEN. S. 149.

dener Richtung drehenden gleichen Systeme $H - \overset{|}{\underset{|}{C}}\!.\,COOH$ (unten OH) und $HO - \overset{|}{\underset{|}{C}}\!.\,COOH$ (unten H) enthält, deren Wirkung sich gegenseitig aufhebt. Die Mesoweinsäure ist inactiv „wegen innerer Compensation".

Geht man aber von der wenigstens ebenso berechtigten Anschauung aus, dass das asymmetrische Kohlenstoff nur secundär die Activität bedingt, indem derselbe Asymmetrie bei dem Molekyle, dem in einer activen Lösung factisch vorkommenden freien Theil der Substanz, erzeugt, so kann die Inactivität der Mesoweinsäure ebensogut dadurch erklärt werden, dass ihr Molekyl eine Symmetrieebene besitzt und demnach nicht in zwei enantiomorphen Modificationen auftreten vermag. Wegen der Symmetrie des Molekyles hat die genannte Verbindung ebensowenig Activität aufzuweisen, wie irgend welcher anderer Körper, z. B. Essigsäure, dessen molekularer Bau symmetrisch ist. Die Activität „verschwindet bei symmetrischer Formel", wie man zu sagen pflegt, nicht, denn es kann überhaupt nichts verschwinden, was gar nicht vorhanden sein kann.

Der zweite prägnante Fall, den ich heranziehen möchte, liegt in der Trioxyglutarsäure vor, wovon E. FISCHER gezeigt hat [1]), dass sie in zwei optisch activen und zwei inactiven Modificationen vorkommen kann, was später von demselben Forscher experimentell bewiesen wurde.

Die beiden activen Trioxyglutarsäuren besitzen nach Fischer die folgenden Formeln:

$$COOH.\underset{+}{CH}(OH).CH(OH).\underset{+}{CH}(OH).COOH$$

$$COOH.\underset{-}{CH}(OH).CH(OH).\underset{-}{CH}(OH).COOH,$$

worin die Zeichen die Asymmetrie der Kohlenstoffatome bedeuten. Dass hier in der That das mittlere Kohlenstoffatom keine Asymmetrie besitzt, ist leicht einzusehen, da die beiden damit verbundenen Gruppen $.CH(OH).COOH$ mit einander sowohl structurell wie stereometrisch identisch sind.

Für die beiden inactiven Säuren führt FISCHER folgende Configuration an:

---

[1]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1891*, 1839.

$$\underset{+}{COOH.CH}(OH).\underset{+}{CH}(OH).\underset{-}{CH}(OH).COOH$$

$$\underset{+}{COOH.CH}(OH).\underset{-}{CH}(OH).\underset{-}{CH}(OH).COOH.$$

Nach der jetzt allgemeinen Ansicht kommen in diesen Formeln drei asymmetrische *C*-Atome vor, was dadurch bedingt wäre, dass die beiden äusseren mit je vier structurell verschiedenen Gruppen, das mittlere dagegen mit *H*, *OH* und zwei Gruppen $.CH(OH).COOH$, die zu ihrer *Structur identisch*, aber *zur Configuration ungleich* sind, vereinigt sind.

Sieht man nun von den beiden äusseren Systemen, die nach der jetztigen Anschauung einander optisch compensiren sollen, ab, so würde man, *falls die Asymmetrie eines Kohlenstoffatoms optische Activität bedingt,* erwarten, dass die letztgenannten Trioxyglutarsäuren activ wären, was jedoch nicht zutrifft, da sie weder Drehung aufweisen noch spaltbar sind.

Um diesen Umstand, dessen nothwendige Consequenz ist, dass es zweierlei asymmetrische *C*-Atome giebt — einmal solche, die optische Activitet erzeugen, und das andere Mal solche, die Inactivität erzeugen — theoretisch zu erklären, giebt es zwei Wege.

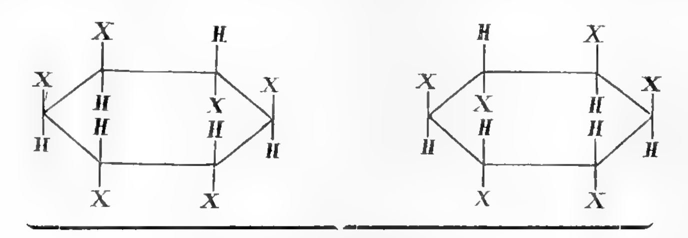
Entweder muss die Theorie, in Bezug auf dem Zusammenhang zwischen Activität und Asymmetrie des Kohlenstoffatomes eine Beschränkung erleiden. Man müsste sagen: optische Activität tritt nur bei denjenigen asymmetrischen Kohlenstoffatomen auf, die mit vier *stofflich und structurell* verschiedenen Gruppen verbunden sind. Hieraus wurde ohne Weiteres folgen: Optische Activität wird nicht erzeugt von einem asymmetrischen *C*-Atom, das mit zwei structuridentischen Gruppen vereinigt sind, *die zu ihrer Configuration verschieden sind.* Wohl aber tritt in diesem Falle geometrische Isomerie auf, wie das angeführte Beispiel zeigt: Trioxyglutarsäure kommt in zwei inactiven, unspaltbaren Verbindungen mit physicalisch verschiedenen Eigenschaften vor. Für die bei einem Kohlenstoffatom der letztgenannten Art auftretende Asymmetrie könnte der von Baeyer für die (1.4)-substituirten Hexamethylenabkömmlinge gewählte Namen „*relative Asymmetrie*“ generell benutzt werden.

Oder: Wenn man die Activität als eine Function des ganzen Molekyls betrachtet, fällt auch der Fall der inactiven Glutarsäuren unter der allgemeinen, oben angeführten Regel; es kann hier keine Activität auftreten, weil das betreffende Molekyl symmetrisch ist, indem es eine durch das mittlere *C*-Atom und die damit verbundenen Gruppen *H* und *OH* gehende Symmetrie-ebene besitzt. Die oben geführten Auseinandersetzungen gelten nicht nur für Trioxy-

glutarsäure sondern auch für vielen anderen, damit analog zusammengesetzten Verbindungen. Hierher gehören die Hexahydroterephtalsäuren und überhaupt alle Polymethylenverbindungen mit symmetrisch gebautem Kern, (also Tetra- und Hexamethylene), worin (gleiche oder ungleiche) Substituenten an zwei diagonal gegenüberliegenden C-Atome vorhanden sind, z. B.:

$$\begin{array}{l} H_2C - CHX \\ \quad\quad\quad | \\ XHC - CH_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} H \quad X \\ C \\ H_2C \quad CH_2 \\ | \qquad | \\ H_2C \quad CH_2 \\ C \\ Y \quad H \end{array} \qquad \text{u. s. w.}$$

Ein interessanter Fall bietet das Inosit, falls diesem Körper die allgemein angenommene Structur eines symmetrischen Hexaoxyhexamethylens zukäme. Eine Verbindung des Hexamethylentypus, die sechs gleichen Substituenten an jedem Kohlenstoff enthält, giebt, wenn man hier, wie überall oben, annimmt, dass die Kernkohlenstoffatome in einer Ebene liegen, zwei enantiomorphe Formen, die also activ sind. Wie schon Meyerhoffer [1]) und später Bouveault [2]) hervorgehoben haben, kann dies nur bei folgender Configuration eintreten [3]):

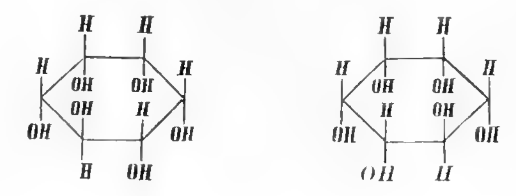


Spiegelbildisomerie.

[1]) Stereochemie. 1892. S. 92.

[2]) Bulletin soc. chim. *1894*, 145.

[3]) In der zweiten Auflage seiner Arbeit „Die Lagerung der Atome im Raume" S. 91 schreibt van't Hoff den beiden optisch activen Inositen folgende Formeln zu:



Thatsächlich sind auch zwei active Inosite bekannt. Dass eben diese Configuration zur Erzeugung zweier activen Formen führt, lässt sich aus der Theorie vom asymmetrischen Kohlenstoff nicht ableiten. Es ist nämlich hier unmöglich zu sagen, welches von den sechs *C*-Atomen asymmetrisch ist. Im Gegentheil sind alle nach dem Obigen relativ asymmetrisch, und würden deshalb keine Activität erzeugen können. Das Auftreten der Activität wird aber sogleich klar, wenn man die Lagerungsverhältnisse des ganzen Molekyles als Ursache der Activität betrachtet. In den obenanstehenden Falle, und nur in diesem, kann Activität eintreten. Bei jeder anderen Configuration ist Symmetrie vorhanden, und die zugehörigen Formen müssen sich indifferent gegen das polarisirte Licht zeigen.

Durch die obige Darlegung wird also nur eine andere Formulirung, nur eine Verallgemeinerung der mit dem asymmetrischen Kohlenstoff verbundenen Vorstellung über die Ursache der Activität aufgelöster organischen Körper beabsichtigt, indem diese auf die *Asymmetrie des Molekyls* übertragen wird. Dieses steht, wie schon bemerkt, mit jener Vorstellung nicht in Wiederspruch.

Ob man berechtigt wäre, hieraus weiterhin zu folgern, dass optische Activität auch bei Körpern, die asymmetrischen Kohlenstoff nicht enthalten, auftreten würde, ob es also denkbar wäre, dass ein Molekyl asymmetrisch sein könnte, ohne dass in demselben asymmetrische Atome vorhanden sind, lasse ich bis auf Weiteres beruhen.

Wenn man sich das Molekyl symmetrisch und die Kernatome in derselben Ebene liegend vergegenwärtigt (Anderes ist von VAN'T HOFFS Darstellung nicht zu entnehmen), stellen diese Gebilde jedoch identische Körper dar, indem sie bei geeigneter Drehung des einen um 60° nach rechts oder links zur Deckung gebracht werden können.



EXPERIMENTELLER THEIL.

I. Die Camphersäuren.

d-Camphersäure.

Darstellung der reinen Säure. Die für Bestimmung der physicalischen Constanten angewandte d-Camphersäure wurde folgendermassen in reinem Zustande erhalten.

Die bei Oxydation des gewöhnlichen Camphers erhaltene rohe Säure wurde in 20 % Natronlauge aufgelöst, die Lösung nach Filtriren zur Entfernung indifferenter Substanzen mit Aether ausgeschüttelt, die Säure wieder abgeschieden und einmal aus Wasser umkrystallisirt. Die somit erhaltene, fast ganz reine Säure (Schmelzpunkt gewöhnlich 180—182°) wurde dann in das Anhydrid umgewandelt.

Zu diesem Zweck wurden 30 g der ganz trocknen Säure mit etwa dem doppelten Gewicht Acetylchlorid in der Kälte in einer lose verschlossenen Kochflasche übergossen, und die entstehenden Klumpen durch Umschütteln zertheilt. Beim Stehen in der Kälte entstand bald eine lebhafte Chlorwasserstoffentwickelung, ohne dass Selbsterwärmung in dem Gemische eintrat. Nach etwa vier Stunden war die Einwirkung beendigt. Die Flüssigkeit war nunmehr mit den kleinen, glänzenden Krystallen des Anhydrides fast überfüllt. Sie wurde nachher noch ein Paar Stunden stehen gelassen, dann sammt den Krystallen in eine Schale überführt, diese in einen gut ziehenden Abzug eingestellt und die Masse von Zeit zu Zeit gut umgerührt, um das Acetylchlorid und die Essigsäure verdunsten zu lassen. Während einer Nacht trocknete sie vollständig aus. Die trocknen Krystalle verrieb man gut und über-

goss sie mit 10 % Sodalösung, filtrirte nach einiger Zeit an der Saugpumpe und wusch sie mit kaltem Wasser gut aus. Das Filtrat enthielt eine kleine Menge mit Aether isolirbare, fremde Säuren, die sich zuerst oelig ausschieden; sie bestanden grösstentheils aus l-Isocamphersäure.

Das Anhydrid wurde nun aus kochenden Alcohol zweimal umkrystallisirt und somit in ganz reinen Zustande erhalten. Zur Überführung in der Säure wurde es mit seinem halben Gewicht Kaliumcarbonat und Wasser gekocht, wobei völlige Lösung nach etwa $^1/_2$ Stunde eintrat. Nachher wurde noch etwa $^1/_4$ Stunde weiter gekocht, um ganz sicher zu sein, dass das Anhydrid völlig zersetzt war, die Lösung zum Überfluss mit Aether ausgeschüttelt, die Säure mit Salzsäure abgeschieden und zweimal aus Wasser umkrystallisirt.

Es ist durchaus geboten, das Anhydrid genügend lange mit Kaliumcarbonat zu Kochen, weil es in Wasser etwas löslich ist und sonst bei nachherigem Ansäuern die Säure verunreinigen würde. Durch Umkrystallisiren aus Wasser ist diese rückständige Anhydridmenge nur schwierig zu entfernen, da es in Wasser ziemlich schwierig löslich ist. Die Angabe FRIEDELS [1]), dass eine in Anhydrid verwandelte und daraus durch Kochen mit alkalischen Lösungen wieder abgeschiedene d-Camphersäure einen niedrigeren Schmelzpunkt und ein kleineres Drehungsvermögen aufweist, könnte eben darauf beruhen, dass diese Säure noch kleine Mengen Anhydrid enthielt.

Zur Umwandlung des Anhydrides in die Säure wandte ich, um eine eventuelle Umlagerung durch eine alkalische Lösung zu vermeiden, zuerst Kochen mit Wasser an. Hierbei geht die Umwandlung sehr träge von statten, indem etwa 4—6 Stunden nöthig sind, um 10 g des Anhydrides völlig aufzuspalten. Die Erfahrung lehrte bald, dass in dieser Weise keine ganz reine Säure zu erhalten war. Der Schmelzpunkt blieb immer niedrig (181—183°), und die Säure zeigte sich auch nach dem Trocknen öfterst wie etwas feucht und klebrich. Trotzdem wurde das Drehungsvermögen etwas höher als sonst gefunden. Ich glaube, dass beim längeren Kochen des Anhydrides mit Wasser eine geringe Zersetzung der Säure stattfindet.

Als Lösungsmittel für Camphersäure eignet sich auch ganz verdünnter Alcohol. Aus concentrirteren oder absoluten Alcohol erhält man die Säure in grossen, schief-rhomboëdrischen Krystallen, deren Schmelzpunkt indess kaum 180° erreicht; vielleicht findet während des Umkrystallisirens eine beginnende Esterificirung statt.

---

[1]) Comptes rendus. *108*, 983.

In sehr schönen Krystallen erhält man die Säure, wenn man eine bei gewöhlicher Temperatur gesättigte, wässerige Lösung sehr langsam an der Luft verdunsten lässt. Die Krystalle stellen glänzende, durchsichtige Rhomboëder dar, deren Grösse, bei genügender Menge der aufgelösten Substanz, bis auf eine Kantenlänge von 1 cm steigen kann.

Drehungsvermögen. Diese physicalische Constante wurde, wie schon (S. 48) hervorgehoben, in einem Polarisationsapparat von SCHMIDT & HAENSCH, und zwar für Lösungen in absolutem Alcohol, 99 % Essigsäure, reinem Methylalcohol, Aceton und Essigæther bestimmt. Das specifische Drehungsvermögen berechnet sich nach der Formel

$$[\alpha]_j = \frac{100\ \alpha_j}{l.\ p.\ d},$$

worin α_j die beobachtete Drehung [1], l die Länge des Beobachtungsrohres, p die Concentration (Procentgehalt der Lösung), d das specifische Gewicht der Lösung, korrigirt nach der folgenden Formel [2], bedeutet:

$$d = D^{t}/_{4} = \frac{F}{W}[1 + (T - t)\gamma](Q - \delta) + \delta;$$

hier ist F = Menge der bei Temp. t^0 abgemessenen Lösung, W = Gewicht der bei T^0 in Pyknometer abgemessenen Menge Wassers = 6,8324 g, (T war bei den Versuchen immer gleich 20^0), Q = Dichte des Wassers bei $20^0 = 0{,}99826$, γ gleich den cubischen Ausdehnungscoefficient des Glases = 0,000025 und δ die mittlere Dichte der Luft = 0,0012.

Lösung in *absolutem Alcohol:*

1) $t = 16{,}5^0$
$l = 2$ dm
$p = 10{,}0069$
$D^{16,5}/_4 = 0{,}82409$
$\alpha_j = +21{,}0^0$ $[\alpha]_j = +49{,}7^0$.

---

[1]) Nach LANDOLT, Drehungsvermögen organischer Substanzen. I Aufl. S. 162, wurden die an dem Instrument direct abgelesenen Graden durch Multiplication mit der Zahl *0,3906* auf Kreisgrade verwandelt. Die nachfolgend angeführten Werthe für α_j sind die direct abgelesenen.

[2]) LANDOLT. Das Drehungsvermögen organischer Substanzen. I Aufl. S. 138.

2) $t = 16{,}5^0$
$l = 2$ dm
$p = 10{,}0068$
$D^{16,5}/_4 = 0{,}82413$
$\alpha_j = +21{,}0^0$ $[\alpha]_j = +49{,}7^0$.

Zugleich wurde bei diesen Versuchen das Drehungsvermögen bei Natriumlicht bestimmt (vergl. S. 49). Es wurde aus den beiden Versuchen α_D übereinstimmend zu $+20{,}2^0$ erhalten. Hieraus berechnet sich für d-Camphersäure

$$[\alpha]_D = +47{,}8^0.$$

Lösung in *99 % Essigsäure.*

$t = 15^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}985$
$D^{15}/_4 = 1{,}0679$
$\alpha_j = +13{,}4^0$ $[\alpha]_j = +49{,}1^0$.

Lösung in *Aceton.*

$t = 15{,}5^0$
$l = 1$ dm
$p = 13{,}333$
$D^{15,5}/_4 = 0{,}84132$
$\alpha_j = +15{,}0^0$ $[\alpha]_j = +52{,}2^0$.

Lösung in *Methylalcohol.*

$t = 17^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}997$
$D^{17}/_4 = 0{,}82705$
$\alpha_j = +21{,}1^0$ $[\alpha]_j = +49{,}8^0$.

Lösung in *Essigæther.*

$t = 16^0$
$l = 2$ dm
$p = 10{,}0007$
$D^{16}/_4 = 0{,}9224$
$\alpha_j = +25{,}3^0$ $[\alpha]_j = +53{,}6^0$.

Umlagerung der d-Camphersäure.

In dieser Hinsicht sind viele Versuche ausgeführt worden, von denen hier nur Folgende beschrieben werden.

Einwirkung von Eisessig und Salzsäure. In dem theoretischen Theil wurde schon angegeben, dass d-Camphersäure hierbei etwa zur Hälfte in l-Isocamphersäure übergeht. Die Umlagerung wurde immer in folgender Weise ausgeführt:

1 Theil der Säure wurde mit 6 Theilen einer Mischung von gleichen Theilen Eisessig und reiner concentrirter Salzsäure (spec. Gew. 1.2) in einen Rohr eingeschmolzen und auf 180° erhitzt. Nach einigen Stunden [1]) wird der Inhalt der Röhren verdunstet, bis keine saueren Dämpfe mehr entweichen, die rückständige Säuremischung in der nöthigen Menge konc. Sodalösung aufgelöst, um indifferente, humusartige Substanzen zu entfernen, und die Säuren wieder abgeschieden. Diese wurden nach dem Trocknen mit Acetylchlorid behandelt, die Mischung der l-Isosäure und des Anhydrids der d-Camphersäure sammt der Flüssigkeit zur völligen Trockne bei gewöhnlicher Temperatur verdunstet und der Rückstand mit möglichst wenig 10 % Sodalösung behandelt, wobei das Anhydrid unangegriffen zurückbleibt, während die Isosäure aufgelöst wird.

Bei den unten beschriebenen Versuchen, die quantitativ angestellt wurden, um über die Geschwindigkeit der Umlagerung und den Betrag der umgelagerten ursprünglichen Säure Aufschluss zu erhalten, wurde das getrocknete Anhydrid, nach völligem Auswaschen an der Pumpe, direct gewogen, ebenso die Menge der Isosäure, die nach Ansäuern der alkalischen Lösung mit Salzsäure während 16 Stunden ausgeschieden war; aus der Menge der restirenden Mutterlauge berechnete ich weiter die Quantität der hierin aufgelösten Säure.

Die Zeit des Erhitzens wurde von dem Moment an berechnet, wo die Temperatur auf 180° gestiegen war, bis zum Auslöschen der Lampen unter dem Ofen. Die Menge der angewandten d-Camphersäure betrug 10 g. Nachher wurde sowohl die Drehung der Isocamphersäure, wie die der aus dem Anhydrid mittelst Kaliumcarbonat regenerirten d-Camphersäure bestimmt.

1. Zeit 4 Stunden. Erhalten wurde: 4,86 g Camphersäureanhydrid, welches 5,34 g Camphersäure entspricht, sowie 3,91 g l-Isomcamphersäure, wo-

---

[1]) Eine genauere Beschreibung des Verfahrens, soweit es zur Darstellung der l-Isocamphersäure dient, findet sich weiter unten unter der genannten Säure.

von 3,7 g direct erhalten wurden und 0,21 in der Mutterlauge (62 *CC* von 20° Temperatur) vorhanden waren. Zusammen betrug die Menge der Säuren also 9,25 g. Es berechnet sich hieraus, dass die Camphersäure während 4 Stunden bis auf 42,7 % in Isosäure verwandelt worden war.

Der Schmelzpunkt der Isocamphersäure lag bei 171—172°, der der regenerirten Camphersäure im unumkrystallisirten Zustande bei 185—186°. Die Bestimmung des Drehungsvermögens in abs. Alcohol ergab Folgendes:

d-Camphersäure: $t = 17{,}5^0$
$l = 2$ dm
$p = 10{,}0032$
$D^{17,5}/_4 = 0{,}82347$
$\alpha_j = +21{,}08^0$ $[\alpha]_j = +50{,}0^0$;

l-Isocamphersäure: $t = 17{,}5^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}993$
$D^{17,5}/_4 = 0{,}82293$
$\alpha_j = -10{,}2^0$ $[\alpha]_j = -48{,}5^0$.

2. Zeit 8 Stunden. Erhalten wurde: 4,80 g Camphersäureanhydrid, was 5,27 g Camphersäure entspricht, sowie 4,15 g Isocamphersäure, wovon 3,8 g direct gewogen wurden und 0,35 in der Mutterlauge (104 cm³ von 20° Temp.) vorhanden waren. Die Gesammtmenge der erhaltenen Säuren betrug 9,42 g. Es hatte sich also die Camphersäure während 8 Stunden zu 44,1 % in Isosäure verwandelt.

Die Schmelzpunkte der Säuren wurden wie bei Versuch 1 erhalten. Das Drehungsvermögen betrug in absolutem Alcohol:

für d-Camphersäure: $t = 17^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}941$
$D^{17}/_4 = 0{,}82343$
$\alpha_j = +21{,}0^0$ $[\alpha]_j = +50{,}0^0$;

für l-Isocamphersäure: $t = 18^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}951$
$D^{18}/_4 = 0{,}82229$
$\alpha_j = -10{,}15^0$ $[\alpha]_j = -48{,}5^0$.

3. Einwirkungszeit 24 Stunden. Es wurden erhalten: 4,3 g Camphersäureanhydrid, 4,73 g Camphersäure entsprechend, sowie 4,38 g Isocamphersäure, wovon 4,05 g direct gewogen wurden und 0,33 g aus der Mutterlauge (98 cm^3 bei 19^0 Temp.), oder zusammen an Säuren 9,11 g. Während 24 Stunden hatten sich 48,1% d-Camphersäure in die isomere l-Isocamphersäure umgewandelt. Die Schmelzpunkte der Säuren lagen wie oben. Das Drehungsvermögen derselben wurde in alcoholischer Lösung wie folgt erhalten:

d-Camphersäure: $t = 19^0$
$l = 2$ dm
$p = 10,0507$
$D^{19}/_4 = 0,82253$
$\alpha j = +21,12^0$ $[\alpha]j = +49,9^0$;

l-Isocamphersäure: $t = 20^0$
$l = 1$ dm
$p = 9,9503$
$D^{20}/_4 = 0,8212$
$\alpha j = -10,1^0$ $[\alpha]j = -48,3^0$.

Einwirkung von Eisessig und Salzsäure bei Siedetemperatur. Um Aufschluss darüber zu erhalten, ob eine Umlagerung durch das genannte Reagenz auch bei 100^0 eintritt, wurde der folgende Versuch vorgenommen.

Ich löste 10 g Camphersäure in 35 g Eisessig, setzte 30 g concentrirte Salzsäure hinzu und erhitzte während 44 Stunden unter Rückfluss zum Kochen. Die Eisessigmenge war so angepasst, dass die Säure bei Siedetemperatur aufgelöst wurde. Nachher wurde zur Hälfte eingedampft und mit Wasser versetzt, wobei eine grössere Menge einer Säure ausfiel, die den Schmelzpunkt 149^0 zeigte. Nach einmaligem Umkrystallisiren aus Wasser stieg der Schmelzpunkt auf 183^0, und die Säure liess sich durch Acetylchlorid in ein Anhydrid von Schmelzpunkt 220—221^0 und den sonstigen Eigenschaften des Anhydrides der gewöhnlichen Camphersäure umwandeln. Die sauere Mutterlauge wurde nachher zur Trockne verdampft und der Rückstand bei gewöhnlicher Temperatur mit Acetylchlorid behandelt. Vermittelst Sodalösung trennte sich das rückständige Gemisch in einen unlöslichen Theil, der aus Camphersäureanhydrid bestand, und einen löslichen, der sich als l-Isocamphersäure, allerdings in unreiner Form, erwies. Nach Umkrystallisiren aus verdünnter Essigsäure wurden Krystalle von dem Typus dieser Säure erhalten, die den Schmelzpunkt 170—171^0 zeigten.

Es findet also schon bei etwa 100° eine Umlagerung der d-Camphersäure in l-Isocamphersäure statt, doch ist der umgelagerte Theil auch nach längerem Kochen keineswegs gross, sondern ziemlich unbedeutend.

Einwirkung von Kaliumhydrat. Weiter wurde der Versuch gemacht, die d-Camphersäure in alkalischer Lösung zu umlagern. Zu dem Ende löste ich die Säure in einem kleinen Überschuss 10 % Kaliumhydratlösung und erhitzte die Lösung während 8 Stunden bei 140—150° im Einschmelzrohr. Sie hatte sich hierbei unbedeutend gelbgefärbt. Die Säure wurde mit Salzsäure abgeschieden und zeigte hierbei den Schmelzpunkt 185°, der sich beim Umkrystallisiren auf 186—187° erhöhte. Eine Bestimmung des Drehungsvermögens ergab Folgendes für die aethylalcoholische Lösung:

$$t = 14^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 9{,}9827$$
$$D\,{}^{14}/_4 = 0{,}82301$$
$$\alpha_j = +20{,}8^0 \qquad [\alpha]_j = +49{,}5^0.$$

Die Säure war somit unverändertes Ausgangsmaterial. Keine andere Säure konnte nebenbei aufgefunden werden, woraus hervorgeht, das Alkali unter den angeführten Bedingungen keine Umlagerung herbeiführt.

Die Einwirkung von Wasser bei höherer Temperatur ist schon von JUNGFLEISCH und von FRIEDEL studirt. Weiter unten, bei Besprechung der „Mesocamphersäure“ und der „zweiten inactiven Camphersäure“ von JUNGFLEISCH werde ich einige eigene Beobachtungen hierüber mittheilen. Trotz der Erhöhung der Einwirkungstemperatur auf 280° erlitt nur ein Theil der Camphersäure die gewöhnliche Umlagerung in l-Isocamphersäure.

Einwirkung von Chinolin. Dieses Agenz ist mehrmals zur Umlagerung optisch activer Substanzen benutzt. Obwohl man bei dem hohen Siedepunkt des Chinolins voraussetzen konnte, dass eine Wasserabspaltung unter Anhydridbildung eintreten sollte, wurde doch ein Versuch ausgeführt.

5 g reine d-Camphersäure wurden unter Luftkühler mit 20 g Chinolin gekocht. Bald machte sich Wasserabspaltung bemerkbar, doch wurde noch etwa eine Stunde weiter gekocht. Beim Erkalten schieden sich reichlich Krystalle aus, die abfiltrirt und mit Alcohol gewaschen, nach Umkrystallisiren bei 220—221° schmolzen und zum Äusseren dem gewöhnlichen Camphersäureanhydrid ähnlich waren. Beim Kochen mit Soda erhielt ich eine Säure vom

Schmelzpunkt 186—187°, deren alcoholische Lösung stark rechtsdrehend war. Es lag demnach die ursprüngliche Säure vor.

Die Chinolin- und Alcohol-haltige Mutterlauge wurde im Wasserbade von Alcohol befreit und nachher mit verdünnter Salzsäure versetzt. Nach einigem Stehen schieden sich ein wenig Krystalle aus, die nach Umkrystallisiren aus wenig Wasser den Schmelzpunkt (171—172°) und die Krystallform der Isocamphersäuren zeigten. Die Menge reichte nur zu einer qualitativen Bestimmung des Drehungsvermögens aus; ihre gesättigte wässerige Lösung zeigte in 1 dm-Rohre eine Linksdrehung von —0,3°.

Es liegt also aller Wahrscheinlichkeit nach l-Isocamphersäure vor, und aus dem Versuche würde deshalb hervorgehen, dass, obwohl der d-Camphersäure die Möglichkeit zu einer schnell verlaufenden Anhydridbildung geboten wurde, sie dennoch zu einem kleineren Theil der gewöhnlichen Umlagerung in l-Isocamphersäure unterlag.

Dianilid der d-Camphersäure[1]). Um die optisch activen Camphersäuren in Bezug auf einander noch auch durch Derivate zu charakterisiren, wurden ihre Dianilide dargestellt. Dies geschah durch Einwirkung der Säurechloride auf in Aether aufgelöstem Anilin.

Zur Darstellung des von HALLER zuerst erhaltenen Dianilids der d-Camphersäure wurden 10 g d-Camphersäure mit 22 g (etwas mehr als die berechnete Menge) Phosphorpentachlorid gemischt und nach der ersten, stürmischen Phase der Reaction in kochendem Wasserbade etwa 2 Stunden erhitzt, nöthigenfalls unter weiterer Zugabe kleiner Mengen Phosphorchlorids, bis sich kein Anhydrid beim Erkalten abscheidet. Nachher wird das Reactionsproduct in kaltes Wasser gegossen, und das Phosphoroxychlorid unter Umschütteln und gleichzeitiger Kühlung zersetzt. Das rückständige oelige Camphersäurechlorid wird in wenig Aether aufgenommen, und die Lösung zu einer mit Eis gekühlten Lösung von 10 g frisch destillirtem Anilin (etwas mehr wie 4 Mol.) in 40 cm^3 Aether tropfenweise zugegeben. Die Aethermenge darf nicht zu gross sein, weil die Ausbeute erfahrungsgemäss dadurch verschlechtert wird, da viel Schmieren entstehen können. Schon beim Zufügen des Säurechlorids erfolgt

---

[1]) Durch eine Notiz von BREDT (Ber. der deutsch. chem. Gesellsch. *1895*, 319) wurde ich veranlasst, über die Darstellung der Dianilide der isomeren Camphersäuren eine kurze vorläufige Mittheilung zu veröffentlichen (l. c. *1895*, 530). Durch eine freundliche Privatmittheilung des Herrn Prof. HALLERS, wurde ich später darauf aufmerksam gemacht, dass Derselbe das Dianilid der d-Camphersäure früher auf einem anderen Wege erhalten hatte (Compt. rend. *116*, 171), was mir entgangen war. Die Anilide der übrigen Camphersäuren sind früher nicht dargestellt.

eine krystallinische Abscheidung von Anilinchlorhydrat, dessen Menge beim Stehen in der Kälte zunimmt. Fügt man nach etwa 24 Stunden Wasser und Salzsäure, zur Auflösung des Salzes und des überschüssigen Anilins, hinzu, und lässt weiter einige Tage stehen, so scheidet sich die ganze Menge des Dianilides, häufig in grossen, blätterförmigen Krystallen, aus der aetherischen Lösung aus. Der Körper wurde nach dem Abfiltriren zweimal aus kochendem Eisessig umkrystallisirt.

Die Analyse ergab folgendes:

0,1171 g Substanz gaben 8,2 cm³ Stickstoff, gemessen bei 20,5° und 765,5 mm Druck.

Berechnet für $C_8H_{14}(CO.NHC_6H_5)_2$:	Gefunden:
N 8,00 %	8,09 %.

Das Anilid ist in Alcohol und anderen organischen Solventien so gut wie unlöslich, nur Eisessig nimmt es beim Kochen in einiger Menge auf und scheidet es beim Erkalten wieder in langen, feinen glänzenden Nadeln, die häufig concentrisch angeordnet sind, aus. Nach dem Abfiltriren und Trocknen gleicht es verfilztem Asbest. Der Schmelzpunkt wurde zu 226° gefunden [1]).

Die ætherische Mutterlauge enthält nicht unbeträchtliche Mengen harziger Nebenproducte, meistens indifferenter Natur. Beim Stehen einer Säure enthaltenden Lösung derselben tritt eine Grünfärbung häufig auf.

l-Camphersäure.

Darstellung. Als Ausgangmaterial diente, wie schon (S. 49) erwähnt, linksdrehendes Lavendeloel-Borneol von SCHIMMEL & C:o; die Drehungsconstante wurde in absolutem Alcohol bestimmt, und zu $[\alpha]_j = -38{,}09°$ gefunden. Es lag also gewöhnliches Linksborneol vor; BECKMANN [2]) giebt für Natriumlicht in Alcohollösung ($p = 20$) $[\alpha]_D = -37{,}74°$, HALLER [3]) $[\alpha]_D = -37{,}77°$ an.

Das Borneol wurde, zur Darstellung von l-Camphersäure, mit Salpetersäure oxydirt, und die Oxydation zu Ende geführt, ohne dass der intermediär auftretende l-Campher isolirt wurde. Ich operirte folgendermassen:

[1]) HALLER (l. c.) giebt den Schmelzpunkt zu 221—222° an; dieser kleine Unterschied berechtigt doch nicht zu der Annahme, dass ein isomerer Körper vorliegt.

[2]) Ann. d. Chemie. *250*, 353.

[3]) Comptes rendus. *108*, 456; *109*, 31.

40 g l-Borneol wurden in einem untubulirten Retorte mit 500 g Salpetersäure (sp. Gew. 1,42) übergossen und das mit Luftkühler versehene Gefäss vorsichtig auf dem Drahtnetze erhitzt. Nach einiger Zeit begann eine reichliche Entwickelung nitroser Dämpfe. Nachdem die erste Verwandlung des Borneols in den entsprechenden Campher nach ein Paar Stunden vorüber war, wurde etwas stärker erhitzt, doch niemals fast bis zum Kochen, weil der Campher widrigenfalls in das Kühlrohr hinaufsublimirt. Nach etwa 50-stündigem Erhitzen war eine weitere Entwickelung gefärbter Dämpfe kaum mehr bemerkbar. Die Flüssigkeit lieferte beim Erkalten eine reichliche Krystallisation von l-Camphersäure, die abfiltrirt und mit Wasser ausgewaschen wurde. Durch Einengen des Filtrates wurde noch eine weitere Menge der Säure erhalten. Die letzten Mutterlaugen wurden auf d-Camphoronsäure verarbeitet [1]).

Zur Reinigung wurde die Säure in 10 % Natronlauge aufgelöst, die ungelöst gebliebene kleine Menge von l-Campher abfiltrirt und die Lösung ausgeaethert. Nachher wurde sie in der Kälte mit Salzsäure in Form eines weissen, feinen Krystallmehles abgeschieden. Der Schmelzpunkt lag jetzt bei 182°. In Allem wurde bei diesem Versuche 24 g der somit gereinigten Säure erhalten, was einer Ausbeute, auf ursprünglichem Borneol berechnet, von 46,3 % entspricht. Aus meinen Anzeichnungen ist, betreffend der Ausbeute, weiter zu entnehmen, dass bei einem anderen Versuche aus 20 g Borneol 11,2 g l-Camphersäure, bei einen dritten aus 30 g Borneol 18,6 g, entsprechend einer Ausbeute von resp. 43 und 47,6 %, erhalten wurden. Die erhaltene Menge von l-Camphersäure steigt also niemals zur Hälfte der theoretischen.

Zur weiteren Reinigung der l-Camphersäure wurde ganz ebenso wie bei der d-Camphersäure (siehe oben) verfahren. Das mittelst Acetylchlorid erhaltene und zweimal umkrystallisirte Anhydrid schmolz bei 220—221° und wurde mittelst überschüssigem Kaliumcarbonat in die Säure zurückverwandelt. Nach Umkrystallisiren aus alcoholhaltigem Wasser zeigte sie den constanten Schmelzpunkt von 187°. Sie krystallisirt aus Wasser in grossen, der d-Camphersäure ähnlichen Krystallagregaten, und scheint mir überhaupt schöner zu krystallisiren wie diese. In Aether, absolutem Alcohol ist sie schon bei Zimmerwärme sehr leicht löslich, ebenso in Methylalcohol, Aceton, Essigaether. In Eisessig ist die Löslichkeit kleiner; Chloroform nimmt sie so gut wie gar nicht auf.

Drehungsvermögen. Die Constante $[\alpha]_j$ wurde in absolutem Alcohol unter dieselben Verhältnisse wie bei d-Camphersäure bestimmt:

---

[1]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1895*, 17.

$t = 17^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}833$
$D^{17}/_4 = 0{,}82298$
$\alpha_j = -20{,}5^0$ $[\alpha]_j = -49{,}5^0$.

Umlagerung der l-Camphersäure.

6 g der Säure wurden mit 36 cm^3 einer Mischung gleicher Volume Eisessig und conc. Salzsäure 6 Stunden auf 180^0 erhitzt. Nach Verdunsten der gelblich gefärbten Lösung, die eine Menge zähflüssiger Tropfen enthielt, auf dem Wasserbade wurde der Rückstand in Soda aufgenommen, von einer kleinen Menge dunkler Flocken abfiltrirt und die gebildete „Mesosäure“ mit Salzsäure ausgefällt. Die zähflüssig ausfallende Säure, die über Nacht krystallisirte, wurde getrocknet und gewogen; Gewicht 5,49 g. Mit 20 g Acetylchlorid in der Kälte behandelt, zerfiel sie in l-Camphersäureanhydrid (Rohgewicht 2,72 g, entsprechend 2,99 g l-Camphersäure) und d-Isocamphersäure (2,41 g).

Die l-Camphersäure hatte sich also unter den angegebenen Verhältnissen zu 43,8 % in d-Camphersäure umgelagert. Das erhaltene Anhydrid wurde mittelst Sodalösung in die Säure, deren Schmelzpunkt ich zu 186—187^0 fand, verwandelt; die d-Isosäure schmolz nach Umkrystallisation bei 171—172^0. Die Bestimmung des Drehungsvermögens ergab in alcoholischer Lösung Folgendes:

l-Camphersäure: $t = 15^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}9927$
$D^{15}/_4 = 0{,}82366$
$\alpha_j = -10{,}5^0$ $[\alpha]_j = -49{,}8^0$;

d-Isocamphersäure: $t = 20^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}8841$
$D^{20}/_4 = 0{,}8213$
$\alpha_j = +20{,}2^0$ $[\alpha]_j = +48{,}6^0$.

Beim *Erhitzen für sich* geht die l-Camphersäure quantitativ in ihr Anhydrid über, die bei 220—221^0 schmilzt.

Sonst wurde l-Camphersäure beim Erhitzen von d-Isocamphersäure in Form ihres Anhydrides erhalten (siehe weiter unten unter d-Isocamphersäure).

Dianilid der l-Camphersäure. Dieser Körper wurde in ähnlicher Weise dargestellt, wie oben unter d-Camphersäuredianilid angegeben. Er schied sich beim Stehen der ætherischen Lösung, welche das erste Einwirkungsprodukt enthielt, nach Versetzen derselben mit Wasser und Salzsäure, in lancettförmigen Nadeln reichlich aus.

Das Dianilid der l-Camphersäure zeigt durchaus die Eigenschaften des entsprechenden Derivates der d-Camphersäure. Es ist in den gewöhnlichen organischen Solventien fast unlöslich, mit Ausnahme von Eisessig, worin es beim Kochen aufgenommen wird. Beim Erkalten scheidet es sich in feinen Nadeln aus, die zu einer asbestähnlichen Masse eintrocknen. Der Schmelzpunkt liegt bei 226^0.

Eine Stickstoffbestimmung bestätigte die erwartete Zusammensetzung $C_8H_{14}(CONHC_6H_5)_2$:

0,1566 g Substanz ergaben 10,0 cm^3 Stickstoff, bei 17^0 und 761,2 mm gemessen.

Berechnet für $C_{22}H_{26}N_2O_2$:	Gefunden:
N 8,00 %	7,97 %.

i-Camphersäure.

Zu dem im theoretischen Theil Mitgetheilten habe ich hier nur sehr wenig zuzufügen.

Beim Zusammenmischen einer Lösung von 6 g d-Camphersäure, in 15 g absolutem Alcohol aufgelöst, mit einer gleich concentrirten Lösung von 6 g l-Camphersäure betrug die Erwärmung nur Theile eines Grades. Trotzdem krystallisirte die schwerlösliche i-Camphersäure nach einiger Zeit aus. Aus der alcoholischen Lösung scheidet sie sich oft in Form kugeliger Aggregaten aus, die aus feinen Nadeln bestehen. Beim Umkrystallisiren aus Wasser, das wenig Alcohol oder Essigsäure enthält, erhält man sie in platten, keilförmig zugespitzten Prismen mit geradvinkeligem Umriss. Der Schmelzpunkt der reinen Säure liegt bei 202—203^0. Bei schnellem Erhitzen (10^0 pro Minute) kann er auf 204^0 steigen.

In 10 % absolut-alcoholischer Lösung zeigte sich die Säure *optisch inactiv*, ebenso in gesättigter wässeriger Lösung.

Die *Löslichkeit* der i-Camphersäure in Wasser variirt sehr, je nach der Zeit nach dem Ausstellen einer Probe, da sie zur Bildung übersättigter Lösungen geneigt zu sein scheint. Aus den vielen Versuchen mag Folgender angeführt werden.

Die Säure wurde in kochendem Wasser gelöst und die Lösung während 2 Wochen bei 19° stehen gelassen. Es hatten sich reichlich Krystalle gebildet. 7,7921 g der abfiltrirten Lösung lieferten beim langsamen Verdunsten im Wasserbade 0,1870 g Säure. 100 g Wasser lösen demnach 0,239 g i-Camphersäure. Doch mag nicht unerwähnt bleiben, dass andere Versuche Werthe gaben, die zwischen 0,28 bis 0,20 g auf die gleiche Menge Lösungsmittel schwankten.

Allerdings ist hieraus zu ersehen, dass die Löslichkeit der Säure in Wasser die der Componenten bedeutend hinterbleibt (vergl. S. 49). Dasselbe lässt sich leicht, schon auf dem Uhrglase, auch für andere Solventien nachweisen.

Beim *Erhitzen für sich*, ebenso bei der *Einwirkung von Acetylchlorid* schon bei gewöhnlicher Temperatur, geht i-Camphersäure in ihr Anhydrid vom Schmelzpunkt 221° über. In Form ihres Anhydrides wurde i-Camphersäure weiter erhalten beim *Erhitzen der i-Isocamphersäure für sich;* hierbei entsteht sie als einziges Product. Umgekehrt wird die i-Camphersäure (2 g) beim *Erhitzen mit Eisessig und Salzsäure* (20 cm³) auf 180° etwa zur Hälfte in die entsprechende i-Isocamphersäure umgewandelt. Es wurden nach 7 Stunden 1,9 g von einer „racemischen Mesosäure" erhalten, die sich in 0,89 g eines Anhydrides (Schmelzp. 220—221°), entsprechend 0,98 g i-Camphersäure, und in 0,9 g einer inactiven, bei 190—191° schmelzenden Säure, mittelst Acetylchlorid und Sodalösung trennen liess. Da das Anhydrid in eine Säure vom Schmp. 202—203° verwandelt werden konnte, findet also die gewöhnliche Umlagerung statt. Die i-Camphersäure verwandelt sich demnach zu 47,8 % in i-Isocamphersäure, die hierbei mit ihren typischen Eigenschaften erhalten wurde und weiter beim Erhitzen für sich in das Anhydrid (Schmp. 221°) einer bei 202—203° schmelzenden Säure übergeht.

Dianilid der i-Camphersäure. Dieses Derivat wurde in zweierlei Weise dargestellt, einmal durch Zusammenmischen gleicher Mengen gleich concentrirter Eisessiglösungen der Componenten, und zweitens durch die Einwirkung von dem Chlorid der i-Camphersäure auf in Aether aufgelöstem Anilin, wie oben bei der d- und l-Camphersäure angegeben.

Im ersten Falle wurde das racemische Dianilid, beim Erkalten der Eisessiglösung, in feinen Nadeln erhalten, die den Componenten durchaus ähn-

lich waren. Der Schmelzpunkt zeigte, trotz Umkrystallisiren, keine Constanz. Die Probe fing gewöhnlich schon unter 190° zu sintern an, und die völlige Verflüssigung erfolgte erst bei 196—197°. Da sich auch die Löslichkeit in Eisessig deutlich grösser wie die der Componenten zeigte, darf wohl angenommen werden, dass hier keine wahre, racemische Verbindung vorliegt, sondern nur eine mechanische Mischung der beiden Dianilide der activen Camphersäuren. Weshalb eine Racemisirung hier nicht erfolgt, kann wohl hier, wie bei dem traubensauren Natrium-Ammonium-salze, nach van't Hoff [1]) dahin erklärt werden, dass die Temperatur für die Umwandlung des Racemates in die Componenten höher liegt, wie die Temperatur, wobei die Krystallisation erfolgt. Beispiele auf eine ähnliche „getrennte Krystallisation" haben Körner und Menozzi [2]) bei dem inactiven Asparagin, E. Fischer [3]) bei dem Lacton der Gulonsäure beobachtet. Zuzufügen ist, dass im letzten Falle, wie oben, der Schmelzpunkt der gespalteten Mischung niedriger liegt, wie bei den Componenten.

Um mich über den Sachverhalt weiter zu informiren, wurde das i-Camphersäuredianilid, wie erwähnt, noch aus der Säure selbst, mittelst ihres Chlorides, dargestellt. Die Eigenschaften des so erhaltenen Anilides waren dieselben wie oben. Der Körper zeigte sich wieder in Eisessig leichter löslich, und der Schmelzpunkt fiel ebenso unscharf aus; doch stieg die Temperatur für das schliesslich stattfindende Schmelzen in diesem Falle etwas über 200°.

Nach den Arbeiten Brühls [4]), Friedels [5]), sowie Hallers [6]) bildet die d-Camphersäure zwei Reihen isomerer, saurer Ester, die der Erstgenannte durch die Bezeichnungen „orto-" und „allo-" unterschied.

Da die zugehörigen Verbindungen der inactiven i-Camphersäure, gelegentlich einer Untersuchung der von Chautard beschriebenen [7]) inactiven Säuren, in reinem Zustande erhalten wurden (siehe weiter unten), mögen sie schon in diesem Zusammenhange beschrieben werden.

---

[1]) Die Lagerung der Atome im Raume. II. Aufl. S. 24 ff.
[2]) Berichte der deutsch. chem. Gesellschaft. *1888*, R. 87.
[3]) Ebendaselbst. *1892*, 1026.
[4]) Ebendaselbst. *1892*, 1797 ff.
[5]) Comptes rendus. *113*, 825.
[6]) Ebendaselbst. *114*, 1516.
[7]) Annalen der Chemie. *127*, 123; 124.

orto-Aethylester der i-Camphersäure. Beim Erhitzen von i-Camphersäure (Paracamphersäure) mit Alkohol und conc. Schwefelsäure erhielt CHAUTARD eine oelige Säure, die weiter beim Destilliren in i-Camphersäureanhydrid und dem Diæthylester der i-Camphersäure zerfiel.

Bei der Wiederholung des Versuches von CHAUTARD wurden 10 g i-Camphersäure (durch Racemation der beiden activen Säuren erhalten) mit 20 g absolutem Alcohol und 5 g conc. Schwefelsäure zwei Stunden unter Rückfluss gekocht, die Lösung wurde von Alcohol durch Kochen befreit und der Rückstand mit Wasser versetzt. Es fiel ein Oel aus, das zum allergrössten Theil in Alkalien löslich war. Aus der alkalischen Lösung, die zur Entfernung des indifferenten Theiles, der aus dem Diæthylester bestand, mit Aether ausgeschüttelt wurde, fällte ich durch Ansäuern die oelige Säure wieder aus und nahm sie in Aether auf. Das nach Verdunsten des Lösungsmittelst zurückbleibende Oel war zu seiner Consistenz so schwerflüssig, dass das Gefäss umgekehrt werden konnte, ohne das etwas auslief. Beim Verweilen in Exsiccator fing es an zu krystallisiren und erstarrte bald fast vollständig zu einer aus grossen, glänzenden Blättern bestehenden Masse. Zur Reinigung wurde sie zwischen Fliesspapier gepresst und in heissem, niedrig siedenden Ligroin aufgelöst. Nach 24 Stunden hatte sich die Säure in grossen quadratischen, compacten Prismen abgesetzt, deren Schmelzpunkt bei 69—70° lag.

Ihrem Entstehen nach konnte die Säure der saure orto-Aethylester der i-Camphersäure sein, was durch die folgende Analyse bestätigt wurde:

0,2103 g Substanz gaben 0,4885 g CO_2 und 0,1625 g H_2O;

Berechnet für $C_{12}H_{20}O_4$:		Gefunden:
C	63,16 %	63,35 %
H	8,76 „	8,59 „

Die Estersäure ist in allen organischen Solventien löslich, etwas auch in kochenden Wasser; aus der heissen wässerigen Lösung fällt sie oelig aus. Ihre alcoholische Lösung ist inactiv. Ihre Zusammenhörigkeit mit i-Camphersäure wurde durch die Einwirkung von Alkalien bewiesen. Nach kurzem Kochen mit alcoholischem Kali wurde sie leicht in eine Säure vom Schmelzpunkt 202—203° verwandelt. Diese Säure lieferte, mit Acetylchlorid übergossen, ein bei 221° schmelzendes Anhydrid, wodurch ihre Identität mit i-Camphersäure bewiesen wurde. Zu gleicher Zeit zeigt dieser Versuch, dass der orto-Ester vorliegt. Nach BRÜHL sind nämlich die sauren Ester der orto-Reihe durch Alhalien leicht verseifbar, während die isomeren allo-Ester stundenlanges Kochen mit denselben vertragen (vergl. übrigens unten).

allo-Aethylester der i-Camphersäure. Dieser Körper wurde ebenfalls bei Weiterführung des CHAUTARD'schen Versuches aufgefunden.

Als ich nämlich den beim Destilliren des rohen orto-Aethylesters entstehenden Diæthylester zu verseifen versuchte, zeigte es sich, dass diese Reaction in zwei Phasen verläuft. Kocht man nämlich den Diæthylester mit alcoholischem Kali, bis sie wasserlöslich geworden, und versetzt die Lösung, nach Verjagen des Alcohols, mit Säure, so fällt wieder eine oelige Säure aus, die grösstentheils aus dem allo-Ester besteht. Sie erstarrt binnen Kurzem, besonders bei häufigem Reiben mit dem Glasstab, zu einer krystallinischen Masse, die durch Ausspritzen ihrer Lösung in Eisessig mit Wasser in kleinen, glänzenden Blättern, die bei 95—96° schmelzen, krystallisirt und inactiv ist.

Die Analyse bestätigte die angenommene Zusammensetzung:

0,1606 g Substanz gaben 0,3706 g CO_2 und 0,1272 g H_2O;

	Berechnet für $C_{12}H_{20}O_4$:	Gefunden:
C	63,16 %	62,90 %
H	8,76 „	8,80 „

Dieser saure Aethylester der i-Camphersäure erfordert zur völligen Verseifung etwa 6-stündiges Kochen mit 20 % Kalilösung. Die erhaltene Säure schmolz bei 202—203°. Nach BRÜHL sind die allo-Ester der Camphersäure gegen Alkalien sehr resistent, was die Natur der oben beschriebenen Verbindung als allo-Aethylester bekräftigt.

Der erhaltene rohe allo-Ester war ziemlich unrein, da sie viel oelige Substanz enthielt. Dies beruht wahrscheinlich darauf, dass während dem langen Kochen des Diæthylesters mit Kali, ein Theil der anfangs gebildeten allo-Ester zu i-Camphersäure verseift wurde. Andererseits enthält der Diæthylester von Anfang an etwas von dem entsprechenden Ester der i-Isocamphersäure, die vermuthungsweise der ähnlichen Verseifung wie jener unterliegt.

l-Isocamphersäure.

Diese Säure wurde durch Umlagerung der d-Camphersäure in der folgenden Weise dargestellt.

15 g d-Camphersäure (die durch vorangehende Überführung in das Anhydrid nicht gereinigt zu sein braucht) wurden gewöhnlich mit 70—80 cm³ einer Mischung gleicher Theile Eisessig und conc. Salzsäure (spec. Gew. 1,12) in ein weites Einschmelzrohr eingeschmolzen und auf 180° erhitzt. Da die

Umlagerung (vergl. die Versuche a. S. 146) nach 8-stündigem Erhitzen kaum mehr vorschreitet, genügt eine Einwirkungsdauer von 8—10 Stunden. Der gelblich bis bräunlichgelb gefärbte Inhalt der Röhren, worin ein Theil des Einwirkungsproductes als zähflüssiges Oel umherschwimmt, wird von mehreren Röhren vereinigt, und die Säuren im Wasserbade verjagt, bis ein in der Wärme noch flüssiger Syrup zurückbleibt. Dieser wird noch warm mit soviel 10 % Sodalösung übergossen, dass eben die Säuren gelöst werden, die Lösung abgekühlt und, zur Abscheidung einer kleinen Menge flüssiger Zersetzungsproducte, ein Paar Stunden stehen gelassen, nachher von einer dunklen Fällung abfiltrirt und mit Salzsäure übersättigt. Es fällt die gebildete „Mesosäure“ harzig aus. Die beim Stehen über Nacht krystallinisch gewordene und in Vacuum scharf getrocknete Säure wird mit 2—3 Theilen Acetylchlorid in einer lose verschlossenen Flasche übergossen. Schon nach einigen Minuten fängt eine langsame Chlorwasserstoffentwickelung an, die nach 2—3 Stunden gewöhnlich nachlässt; zur sicherer Trennung lässt man über Nacht stehen. Die Lösung mit den darin enthaltenen Krystallen des Anhydrides der d-Camphersäure wird nunmehr in eine flache Schale gegossen und das Gefäss in einen gut ziehenden Abzug eingestellt. Durch häufiges Umrühren wird die Verdunstung der vorhandenen flüchtigen Flüssigkeiten erleichtert. Die ganz trocken gewordene Masse rührt man nun mit 10 % Sodalösung mittelst einer Pistille gut durch, bis keine Einwirkung auch bei alkalischer Reaction mehr erfolgt. Weil bei längerem Stehen etwas von dem schwerlöslichen Natriumsalze der Isocamphersäure abgeschieden werden kann, und um eine Einwirkung der alkalischen Lösung auf dem Anhydride vorzubeugen, wird die Lösung gleich vom Anhydride abfiltrirt. Die ersten Waschwässer lässt man zu der Lösung nachfliessen. Das auf dem Filter verbleibende Anhydrid der d-Camphersäure ist etwas gelbgefärbt, aber schon nach einem Umkrystallisiren aus Alcohol ganz rein. Es kann natürlich zur Darstellung weiterer Mengen l-Isocamphersäure benutzt werden, wobei es nicht vorher in die Säure zurückgewandelt werden braucht.

Die die Isocamphersäure enthaltende, alkalische Lösung wird mit Salzsäure in kleinem Überschuss versetzt, wobei die Säure als weisses Krystallpulver gleich ausfällt. Nach einigem Stehen wird abfiltrirt. Sie zeigt jetzt schon den Schmelzpunkt von 169—170° und ist für die meisten Zwecke genügend rein. Durch einmaliges Umkrystallisiren steigt der Schmelzpunkt auf 171—172°, und die Wiederholung dieser Reinigung bringt keine weitere Erhöhung desselben hervor.

Zum Umkrystallisiren übergiesst man die Säure mit 10 bis 15 Theilen

Wasser, erhitzt zum Kochen und setzt, um die Löslichkeit des Wassers zu erhöhen, nach und nach kleine Mengen Alcohol hinzu, bis Lösung eintritt. Aus der heissen Lösung, die nachher zweckmässig mit etwas Wasser versetzt wird, krystallisirt die l-Isocamphersäure in grossen dünnen, glänzenden Blättern aus, die die Flüssigkeit gänzlich erfüllen. Diese Blätter repräsentiren die labile Krystallmodification und können sich, wenn die Säure genügend rein war und das Gefäss ganz unberührt bleibt, tagelang halten. Wenn man aber die Masse umrührt, verwandeln sie sich binnen Kurzem in die stabile Krystallform um. Die Blätter lösen sich bis auf die letzten Theilchen auf, und statt ihrer treten die stark lichtbrechenden, compacten Octaëder der Isocamphersäure auf. Beide Modificationen haben denselben Schmelzpunkt 171—172°. In der aus den Blättern ausschliesslich bestehenden Krystallform kann die Säure erhalten werden, wenn man sie in c:a 10 Th. absolutem Alcohol auflöst, etwas Wasser hinzufügt und die Lösung rasch verdunstet, z. B. in der Mündung eines gut ziehenden Abzugcanales. Dann bleiben die Blätter erhalten und können nachher in trocknem Zustande beliebig lange aufbewart werden. Aber mit Wasser angerührt, gehen sie bald in die Octaëder über.

Überhaupt ist die l-Isocamphersäure in verschiedenen Lösungsmittel schwerer löslich, wie d-Camphersäure, mit Ausnahme von Eisessig, der, soweit oculär zu sehen ist, jene leichter auflöst. Eine genauere Löslichkeitsbestimmung wurde für Alcohol und für Wasser ausgeführt.

Löslichkeit in absolutem Alcohol, beim Stehen desselben mit überschüssiger Säure: 100 g des Lösungsmittels enthalten bei 20° *47,5 g* l-Isocamphersäure. In 100 g der Lösung sind bei 20° 32,2 g der Säure vorhanden.

Löslichkeit in Wasser. Überschüssige Säure blieb bei 20° 48 Stunden mit Wasser stehen: 100 g Wasser hatten 0,337 g l-Isocamphersäure aufgelöst [1]).

Drehungsvermögen. Die zweimal umkrystallisirte, ganz reine l-Isocamphersäure ergab, mit den folgenden Lösungsmitteln verdünnt, folgendes Resultat:

Lösung in *absolutem Alcohol.*

$t = 15^0$
$l = 2$ dm
$p = 10{,}0022$
$D\,^{15}/_4 = 0{,}82305$
$\alpha_j = -20{,}6^0$ $\quad [\alpha]_j = -48{,}9^0.$

[1]) Vergl. die von JUNGFLEISCH und von FRIEDEL gefundenen Löslichkeitszahlen a. d. S. 52.

In einer anderen Probe wurde das Drehungsvermögen in einer absolut alcoholischen Lösung für Natriumlicht bestimmt, mit folgendem Resultate:

$t = 14^0$
$l = 1$ dm
$p = 10{,}061$
$D\,^{14}/_4 = 0{,}82556$
$[\alpha]_D = -10{,}0^0$ $\qquad [\alpha]_D = -47{,}1^0$.

Lösung in *99 % Essigsäure.*

$t = 15^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}9055$
$D\,^{15}/_4 = 1{,}0668$
$\alpha_j = -14{,}0^0$ $\qquad [\alpha]_j = -51{,}7^0$.

Lösung in *Aceton.*

$t = 15{,}5^0$
$l = 1$ dm
$p = 12{,}789$
$D\,^{15,5}/_4 = 0{,}83958$
$\alpha_j = -14{,}42^0$ $\qquad [\alpha]_j = -52{,}4^0$.

Lösung in *Methylalcohol.*

$t = 17^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}916$
$D\,^{17}/_4 = 0{,}82618$
$\alpha_j = -20{,}31^0$ $\qquad [\alpha]_j = -48{,}4^0$.

Lösung in *Essigæther.*

$t = 16^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}979$
$D\,^{16}/_4 = 0{,}92198$
$\alpha_j = -24{,}9^0$ $\qquad [\alpha]_j = -52{,}9^0$.

Das *Natriumsalz* der l-Isocamphersäure ist in Wasser ziemlich schwierig löslich und krystallisirt in feinen, concentrisch zusammengewachsenen Nadeln.

In *Acetylchlorid* löst sich l-Isocamphersäure bei gewöhnlicher Temperatur auf und scheidet sich beim Verdunsten desselben wieder unverändert aus. Über die bei Siedetemperatur verlaufende Umwandlung unter Einwirkung desselben Reagenzes wird später ausführlicher berichtet.

Umlagerung der l-Isocamphersäure.

Bei der Einwirkung *einer Mischung von gleichen Theilen Eisessig und conc. Salzsäure* (spec. Gew. 1.2) auf die l-Isocamphersäure wird sie beinahe zur Hälfte wieder in die d-Camphersäure verwandelt.

5 g l-Isocamphersäure wurden mit 30 g der Säuremischung 20 Stunden auf 180° erhitzt. Die Verarbeitung des Productes geschah wie oben angegeben, und die Trennung der Säuren erfolgte leicht vermittelst Acetylchlorid. Erhalten wurde etwa 4 g des trocknen Umlagerungsproductes, woraus sich $1{,}_8$ g Camphersäureanhydrid (entsprechend $2{,}_{02}$ Camphersäure) und $1{,}_{70}$ g Isocamphersäure abscheiden liess.

Das Camphersäureanhydrid, bei 220—221° schmelzend, wurde durch Kochen mit Sodalösung in die entsprechende Säure vom Schmelzpunkt 186—187° verwandelt, die, mit absolutem Alcohol verdünnt, folgendes Drehungsvermögen zeigte:

$$t = 15^0$$
$$l = 1 \text{ dm}$$
$$p = 10{,}_{00685}$$
$$D^{15}/_4 = 0{,}_{82408}$$
$$\alpha_j = +10{,}_6{}^0 \qquad [\alpha]_j = +49{,}_9{}^0.$$

Es liegt also *d-Camphersäure* vor.

Die Isosäure zeigte den Schmelzpunkt 171—172° und, in absolutem Alcohol gelöst, das Drehungsvermögen der *l-Isocamphersäure:*

$$t = 13{,}_5{}^0$$
$$l = 1 \text{ dm}$$
$$p = 10{,}_{01}$$
$$D^{13,5}/_4 = 0{,}_{8254}$$
$$\alpha_j = -10{,}_4{}^0 \qquad [\alpha]_j = -49{,}_2{}^0.$$

Es hatte sich also l-Isocamphersäure zu 45,6 % in d-Camphersäure umgelagert.

Umlagerung bei trocknem Erhitzen. Geschmolzene l-Isocamphersäure wurde vorsichtig über freier Flamme erhitzt, bis keine Wasserabspaltung mehr erfolgte; nach etwa ½ Stunde war die Reaction beendigt. Die geschmolzene Masse erstarrte beim Erkalten zu einem kaum gefärbten Krystallkuchen; das pulverisirte Product gab, mit Sodalösung angerührt, nichts Lösliches zu dieser ab. Nach Auflösen in kochendem Alcohol schieden sich beim Erkalten die charakteristischen, seidenglänzenden, gestreiften Nadeln des Camphersäureanhydrids ab. Der Körper schmolz bei 220—221° und wurde durch Kochen mit Wasser in eine Säure verwandelt, die den Schmelzpunkt 185—186° zeigte. Die in absolut alcoholischer Lösung ermittelte Drehung bestätigte, dass d-Camphersäure vorlag:

$$t = 17^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 10{,}0088$$
$$D^{17}/_4 = 0{,}82254$$
$$\alpha_j = +21{,}1^0 \qquad [\alpha]_j = +49{,}9^0.$$

Sonst wurde l-Isocamphersäure bei der Reduction der l-Brom- und l-Chlorcamphersäureanhydride mit Zinkstaub und Eisessig erhalten. Über die experimentellen Details wird später bei den genannten Körpern berichtet.

Umlagerung beim *Erhitzen mit Chinolin.* 5 g l-Isocamphersäure wurden mit 15 g Chinolin während 2 Stunden bis fast zum Sieden erhitzt. Nach einiger Zeit zeigten sich Wassertropfen in dem aufgesetzten Luftkühler, eine Anhydrisirung andeutend. Die erkaltete Masse schied reichlich Krystalle ab, die bei Zusatz von Salzsäure, die das Chinolin auflöste, noch vermehrt wurden. Die Säuren wurden abfiltrirt, gut mit Wasser ausgewachsen und mit Sodalösung behandelt. Das hierbei ungelöst gebliebene Anhydrid wurde aus Alcohol umkristallisirt, und die Krystalle, die bei 220° schmolzen, mit Sodalösung in die zugehörige Säure verwandelt. Diese zeigte den Schmelzpunkt 186° und bei der folgenden Bestimmung ihres Drehungsvermögens wurde die Constante der d-Camphersäure erhalten:

$t = 17^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}971$
$D^{17}/_4 = 0{,}8228$
$\alpha j = +10{,}4^0$ $[\alpha]j = +49{,}5^0.$

Die durch Soda aufgelöste Säure zeigte nach dem Ausfällen den Schmelzpunkt 171—172°. Die Bestimmung des Drehungsvermögens ergab Folgendes:

$t = 17^0$
$l = 1$ dm
$p = 10{,}074$
$D^{17}/_4 = 0{,}82559$
$\alpha j = -10{,}4^0$ $[\alpha]j = -48{,}8^0.$

Es hatte sich also ein Theil der l-Isocamphersäure, und zwar der grösste Theil, in d-Camphersäure unter gleichzeitiger Anhydrisirung verwandelt, während der andere Theil ihr Drehungsvermögen beibehalten hatte. Dass in diesem Falle die Umlagerung verhältnissmässig langsam erfolgt, beruht muthmasslich darauf, dass das Chinolin salzbildend wirkt und demnach die l-Isosäure zur Wasserabspaltung ungeeigneter macht.

Dianilid der l-Isocamphersäure. Dieser Körper wurde ähnlich wie die entsprechenden Derivate der Camphersäuren dargestellt. Da hierbei die Gelegenheit geboten wurde, die Einwirkung von Phosphorpentachlorid auf l-Isocamphersäure zu studiren, mag hierüber in dem genannten Hinsicht etwas ausführlicher berichtet werden.

In Bezug auf die Wirkung des genannten Reagenzes unterscheidet sich die Säure scharf von den Säuren der Camphersäurereihe. Während die Reaction bei diesen in zwei gut zu beobachtenden Phasen verläuft, indem zuerst ein Molekyl Phosphorpentachlorid zur Erzeugung des Anhydrides verbraucht wird, und nachher das zweite Molekyl nur langsam auf dem Anhydrid, unter schliesslichem Erzeugen des Chlorides, einwirkt, geschieht die Einwirkung auf die l-Isosäure ziemlich schnell, binnen einigen Minuten, ohne dass eine intermediäre Anhydridbildung auftritt. Das Chlorid kann in gewöhnlicher Weise isolirt werden, durch Versetzen des Einwirkungsproductes mit kaltem Wasser und fleissiges Umschütteln unter Kühlung, bis das Phosphoroxychlorid der Zersetzung unterliegt. Das zurückbleibende, dickflüssige Oel, welches aus rohem Chlorid der l-Isocamphersäure besteht, wird mit Aether

aufgenommen und diese Lösung, wie früher beschrieben, auf das Anilid verarbeitet.

Das Chlorid besitzt einen charakteristischen, nicht unangenehmen Geruch, der in verdünntem Zustande dem des Vanillins ähnelt. Von Wasser wird es bei gewöhnlicher Temperatur langsam zersetzt. Hierbei entsteht ausschliesslich l-Isocamphersäure mit ihren typischen Eigenschaften.

Nach Zutropfen der ætherischen Lösung des l-Isocamphersäurechlorides zu in Aether aufgelöstem Anilin (4 Mol.), scheidet sich binnen Kurzem ein Brei von Krystallen aus, die aus Anilinchlorhydrat und dem Dianilid bestehen und leicht mittelst Salzsäure-haltigem Wasser getrennt werden können. Dieses bleibt als rein weisse Krystallmasse zurück, die nur einmal aus kochendem Weingeist umkrystallisirt werden braucht, um rein zu sein. Folgende Analyse bestätigte die richtige Zusammensetzung des Körpers:

0,1895 g Substanz gaben 0,5190 g CO_2 und 0,1274 g H_2O;

0,2034 g „ „ 14,0 cm^3 Stickstoff, bei 18,5^0 Temp. und 764,2 mm Druck gemessen;

	Berechnet für $C_{22}H_{26}N_2O_2$:	Gefunden:
C	75,43 %	74,70 %
H	7,43 „	7,47 „
N	8,00 „	8,00 „

Das Dianilid schmilzt bei 201^0, also niedriger wie die Anilide der activen Camphersäuren. Es krystallisirt in platten Prismen mit gerader, domatischer Abstumpfung, oder in kurzen Nadeln und ist in Aether fast unlöslich, schwer in kaltem, leichter in kochendem Alcohol löslich. Auch Eisessig nimmt es leichter, wie die Anilide der Camphersäurereihe, auf.

Von l-Isocamphersäure ausgehend, wurde noch die entsprechende Bromisocamphersäure $C_8H_{13}Br(COOH)_2$ dargestellt. Aus mehreren Gründe wird sie erst später, im Zusammenhang mit den Bromcamphersäureanhydriden, beschrieben.

d-Isocamphersäure.

Diese Säure wurde, ihrem optischen Antipoden analog, durch Umlagerung der l-Camphersäure dargestellt.

5 g l-Camphersäure wurden mit 30 cm^3 Eisessig und 30 cm^3 conc. Salzsäure (Spec. Gew. 1,20) während 14 Stunden auf 170—180^0 erhitzt. Das in

der mehrmals beschriebenen Weise isolirte und gereinigte (vergl. S. 158) Einwirkungsproduct (4,6 g) wurde mit Acetylchlorid behandelt, und die nach Verdunsten des Acetylchlorids und der Essigsäure zurückbleibende, trockne Masse mit Sodalösung angerührt. Somit wurden 2,2 g eines Anhydrides vom Schmelzpunkt 220—221° (entsprechend 2,44 g der zugehörigen Säure) und 1,99 g einer Säure erhalten, die bei 171—172° schmolz. Sie stellte sich nach ihrem Drehungsvermögen und den sonstigen Eigenschaften als d-Isocamphersäure aus.

Drehungsvermögen, in absolut alcoholischer Lösung bestimmt:

$t = 20^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}8841$
$D^{20}/_4 = 0{,}8213$
$\alpha_j = +20{,}2^0$ $\qquad [\alpha]_j = +48{,}6^0.$

Das mit Acetylchlorid erhaltene Anhydrid (Schmelzpunkt 220—221°) wurde mittelst Sodalösung in die entsprechende Säure, die bei 186—187° schmolz, verwandelt. Sie zeigte sich, ihrem Drehungsvermögen in absolut alcoholischer Lösung nach, als mit dem als Ausgangsmaterial angewandten l-Camphersäure identisch:

$t = 15^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}9927$
$D^{15}/_4 = 0{,}82366$
$\alpha_j = -10{,}5^0$ $\qquad [\alpha]_j = -49{,}8^0.$

Es hatte sich also, aus l-Camphersäure ausgehend, 44,8 % d-Isocamphersäure gebildet.

Diese Säure zeigt sich zu ihren äusseren Eigenschaften mit der l-Isocamphersäure durchaus identisch. Die Löslichkeit in Wasser (siehe weiter unten) war kleiner wie die der activen Säuren der Camphersäurereihe. In Alcohol, Eisessig ist sie sehr leicht löslich. Mit Phosphorpentachlorid behandelt, geht d-Isocamphersäure ohne intermediäre Anhydridbildung leicht in das Chlorid über, woraus wieder die Säure durch Einwirkung von Wasser unverändert erhalten werden kann.

Als Lösungsmittel eignet sich am Besten kochendes Wasser, dem man nach und nach Alcohol in kleinen Portionen, bis Lösung eintritt, hinzufügt. Beim Erkalten scheidet sich die Substanz zuerst in perlmutterglänzenden Blät-

tern aus, die sich nach einiger Zeit in grosse, glänzende Octaëder verwandeln, unter denselben Erscheinungen, wie oben für l-Isocamphersäure beschrieben.

Wasserlöslichkeit bei 20°. Eine warm concentrirte Lösung blieb während 24 Stunden bei der angegebenen Temperatur stehen.

1) 8,3248 g Lösung enthielten 0,0297 g Säure: es lösen demnach *100 g Wasser 0,357 g* d-Camphersäure.

2) 8,3675 g Lösung enthielten 0,0297 g Säure: *100 g Wasser* halten also *0,355 g* d-Camphersäure aufgelöst.

Umlagerung der d-Isocamphersäure.

Umlagerung bei trocknem Erhitzen. 1 g Substanz wurde in Probierrörchen erhitzt, bis kein Wasser mehr gebildet wurde. Die kaum gefärbte, rückständige Krystallmasse wurde pulverisirt und mit Sodalösung behandelt, wobei nichts gelöst wurde. Nach dem Auswaschen mit Wasser löste man sie in kochendem Alcohol auf. Beim Erkalten schied sich ein Körper in seideglänzenden Nadeln, der den Anhydriden der activen Camphersäuren durchaus ähnlich war, in grosser Menge aus; der Schmelzpunkt wurde zu 219—220° gefunden. Es wurde eine Löslichkeitsbestimmung in absolutem Alcohol ausgeführt:

3,0091 g Lösung enthielten nach 24-stundigen Stehen bei 20° 0,0345 g des Anhydrides: 100 g Alcohol lösen bei 20° 1,15 g Anhydrid.

Nach einer später zu mittheilenden Bestimmung für dem Anhydrid der l-Camphersäure lösen 100 g abs. Alcohol 1,18 g desselben bei 20°.

Das Anhydrid wurde weiter durch Kochen mit Sodalösung in die Säure verwandelt. Nach ihrem Schmelzpunkt (186—187°) und Drehungsvermögen zeigte sich diese mit l-Camphersäure identisch.

Drehungsvermögen:

$$t = 16^0$$
$$l = 1 \text{ dm}$$
$$p = 9{,}9466$$
$$D^{16}/_4 = 0{,}82506$$
$$\alpha_j = -10{,}45^0 \qquad [\alpha]_j = -49{,}7^0.$$

d-Isocamphersäure war somit vollständig in das Anhydrid der l-Camphersäure verwandelt.

Umlagerung beim Erhitzen mit Eisessig und Salzsäure: 1 g d-Camphersäure wurde mit 15 cm^3 des Umlagerungsgemisches 10 Stunden auf 180^0 erhitzt, und das Product in gewöhnlicher Weise verarbeitet. Wegen der geringen, zum Gebot stehenden Menge wurde der Versuch nicht quantitativ verfolgt. Nach der Einwirkung von Acetylchlorid wurde ein Anhydrid (Schmelzpunkt 220^0) und eine Säure (Schmelzpunkt $170—172^0$) in ungefähr gleichen Mengen erhalten. Diese zeigte sich in alcoholischer Lösung *rechtsdrehend;* aus dem Anhydride wurde eine Säure vom Schmelzpunkt $186—187^0$ erhalten, deren alcoholische Lösung *linksdrehend* war. Hieraus ist zu schliessen, das die d-Isocamphersäure durch die Säuremischung in ähnlicher Weise verändert wird, wie die übrigen activen Camphersäuren. Sie wird ungefähr zur Hälfte in l-Camphersäure umgewandelt.

Dianilid der d-Isocamphersäure. Das bei der Einwirkung von 2 Mol. Phosphorpentachlorid auf 1 Mol. der Säure leicht entstehende, und durch Eiswasser vom Phosphoroxychlorid befreite Chlorid der d-Isocamphersäure wurde in Aether aufgelöst und mit einer gekühlten ætherischen Anilinlösung (4 Molekyle enthaltend) tropfenweise zusammengebracht. Nach 2-tägigen Stehen wurde die entstandene Krystallmasse, sammt der ætherischen Lösung, mit salzsäurehaltigem Wasser gewaschen, und die weisse Krystallmasse aus kochendem Alcohol umkrystallisirt. Das Dianilid schied sich aus der mit etwas Wasser versetzten, warmen Lösung in glänzenden Blättern oder Prismen ab, die bei 201^0 schmolzen. Die Analyse bestätigte die Formel:

0,2275 g Substanz gaben 15,9 cm^3 N, bei $15{,}5^0$ Temp. und 757,1 mm Druck gemessen:

Berechnet für $C_{22}H_{26}N_2O_2$:	Gefunden:
N 8,00 %	8,13 %.

Wie das Anilid der l-Isocamphersäure, dem der somit erhaltene Körper sich durchaus ähnlich zeigte, ist das Dianilid der d-Isocamphersäure viel löslicher in Alcohol und Eisessig, wie die Anilide der activen Säuren der Camphersäurereihe.

i-Isocamphersäure.

Diese Verbindung wurde sowohl durch Racemation aus den activen Säuren, wie auch beim Umlagern der i-Camphersäure mit der gewöhnlichen Säuremischung erhalten.

Wenn je zwei g der Componenten, in je 5 g absolutem Alcohol aufgelöst, zusammengemischt wurden, schieden sich aus der Lösung nach einiger Zeit, besonders beim Zuspritzen von Wasser, kugelformige Aggregate aus, die sich auch in kochendem Wasser als äusserst schwer löslich zeigten. Am Besten krystallisirt man die Säure aus wenig Eisessig oder absolutem Alcohol unter Zusatz von Wasser um; aus der kaltgesättigten Lösung, bei freiwilligem Verdunsten derselben, scheidet sie sich theils in rosettenförmig zusammengewachsenen Aggregaten, theils als einzelne Krystalle aus, die sich unter dem Mikroskope als platte Prismen, die im Horizontalplane keilförmig zugespitzt sind und zuweilen eine schräge, vertikale Abstumpfung zeigen. Aus concentrirten alcoholischen Lösungen erhält man oft Krystalle, die an den Enden eine bürstenförmige Aggregatanhäufung zeigen. Der Schmelzpunkt sowohl der Krystalle, wie der kugelförmigen Aggregate liegt bei 191°. Ihre 10 % alcoholische Lösung ist *inactiv.*

In starkem Alcohol zeigt sich die i-Isocamphersäure auch in der Kälte etwas schwerlöslich; in kochendem Benzol ist sie fast unlöslich, ganz unlöslich in Petroleumæther. Von allen Camphersäuren ist sie am schwierigsten in kochendem Wasser löslich. Auch aus ihrer wässerigen Lösung tritt sie sowohl als einzelne Krystalle, wie in kugelförmigen Aggregaten auf.

Wasserlöslichkeit bei 20°. Die heissgesättigte wässerige Lösung blieb 24 Stunden bei 20° stehen. Die abfiltrirte Lösung enthielt die folgenden Substanzmengen:

1) 8,9375 g Lösung wurden abgewogen und in schwach siedendem Wasserbade zum constanten Gewicht verdunstet. Erhalten 0,0181 g rückständige d-Isocamphersäure. 100 g Wasser lösen demnach 0,203 g der Säure.

2) 7,9639 g Lösung ergaben 0,0161 g rückständige d-Isocamphersäure. 100 g Wasser lösen 0,203 g der Säure.

Eine Säure, die die gleichen Eigenschaften zeigte, entstand auch beim Erhitzen von i-Camphersäure (siehe dieses, S. 154) mit gleichen Theilen Eisessig und Salzsäure.

Umlagerung der i-Isocamphersäure.

Verhalten derselben bei *trocknem Erhitzen.* 1 g der Säure wurde im Probierröhrchen über ihrem Schmelzpunkt erhitzt, bis, nach etwa 10 Minuten, kein Wasser mehr entwich. Die etwas gelb gefärbte Masse wurde, wie gewöhnlich, mit etwas Sodalösung verrieben, wobei nichts aufgelöst wurde, und in absolutem Alcohol aufgelöst. Während des Erkaltens schied sich das An-

hydrid der i-Camphersäure, in seiner charakteristischen Krystallform — kurze Prismen, die zu briefcouvertähnlichen Zwillingen mit rhomboëdrischem Habitus vom Schmelzpunkt 221° zusammenwachsen — aus. Beim Kochen mit Sodalösung wurde eine inactive Säure, die bei 202—203° schmolz, leicht erhalten. Sie krystallisirte aus ihrer heissgesättigten, wässerigen Lösung in platten Prismen oder Blättern, die die für i-Camphersäure eigenthümliche, keilförmige Zuspitzung zeigten. Es hatte sich also die i-Isocamphersäure vollständig in das Anhydrid der i-Camphersäure umgewandelt.

Das gleiche Verhalten beim Erhitzen zeigt auch diejenige Säure, die, wie oben angegeben, aus i-Camphersäure, bei ihrer Umlagerung mit dem Säuregemisch bei 180°, entsteht. Es wurde ein Anhydrid erhalten (Schmelzpunkt 221°), das eine inactive Säure vom Schmelzpunkt 202—203° lieferte.

Zur Umlagerung der i-Isocamphersäure mit Eisessigsalzsäure wurden 2 g derselben 12 Stunden mit 12 g der Säuremischung auf 180° erhitzt. Ich erhielt eine Säuremischung, die sich mittelst Acetylchlorid in 0,74 g eines Anhydrides vom Schmelzpunkt 221° (die zugehörige Säure schmolz bei 202—203° und zeigte sich inactiv) und 0,90 g eines ebenfalls inactiven, bei 191° schmelzenden Säure, die sich mit dem Ausgangsmaterial identisch zeigte, trennen liess. Die i-Isocamphersäure wird also zu c:a 47 % in die i-Camphersäure verwandelt.

Dianilid der i-Isocamphersäure. Dieses Derivat wurde durch Racemation der Dianilide der activen Isocamphersäuren in alcoholischer Lösung erhalten. Durch Ausspritzen der heissen alcoholischen Lösung mit Wasser wird es in gut ausgebildeten, glänzenden, körnigen Krystallen abgeschieden. Beim freiwilligen Verdampfen der Lösung auf dem Uhrglase erscheinen oft längliche Doppelpyramiden mit gerader Abstumpfung an den Enden. Aus verdünnter Essigsäure erhält man das Dianilid zuweilen in kleinen Rhomboëdern.

Der Schmelzpunkt liegt scharf bei 184°. Wie die entsprechende Verbindung der i-Camphersäure schmilzt also das i-Isocamphersäuredianilid bei niedriger Temperatur als die Componenten. Die Löslichkeit in Alcohol und Essigsäure zeigte sich auch grösser als die der Componenten. Was unter jenen erörtert wurde, trifft auch bei diesem zu.

Die „Mesocamphersäuren" von Wreden und Jungfleisch.

Sowohl aus der im theoretischen Theil (S. 55) gegebenen Historik dieser Säuren, wie aus dem vorher Angegebenen geht hervor, dass diese Säuren

keine chemische Individuen darstellen, indem sie sich schon beim Umkrystallisiren, leichter und fast quantitativ bei der Einwirkung von Acetylchlorid, in zwei Componenten, eine Säure der Camphersäurereihe und eine zugehörige, entgegengesetzt drehende Säure der Isocamphersäurereihe, spalten lassen. Niemals wurde die Entstehung anderer Säuren beobachtet.

Zur Vervollständigung der schon aufgezählten Versuche sei hier noch über folgende berichtet.

Um die Säuren zu studieren, die JUNGFLEISCH[1]) bei der Einwirkung von Wasser auf d-Camphersäure bei etwa 200° erhielt, wurden zuerst 10 g d-Camphersäure mit 40 g Wasser eingeschmolzen und 12 Stunden auf 200° erhitzt. Nach Verdunsten des Wassers und Umkrystallisiren der rückständigen, zuerst harzig zurückbleibenden Säure, schieden sich körnige Krystalle aus, die bei 148—152° schmolzen. Denen mengten sich nachher feine Nadeln zu, deren Schmelzpunkt viel niedriger, bei etwa 108° lag. Das ganze Product wurde wieder getrocknet und mit Acetylchlorid behandelt, wobei, nach der Einwirkung von Soda, ein dem gewöhnlichen Camphersäureanhydrid ähnliches Anhydrid isolirt wurde. Es ging beim Kochen mit Wasser in eine Säure über, die bei 185° schmolz und in absolut alcoholischer Lösung das Drehungsvermögen der d-Camphersäure[2]) zeigte:

$$t = 17^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 9{,}9962$$
$$D^{17}/_4 = 0{,}82315$$
$$\alpha j = +20{,}8^0 \qquad [\alpha]j = +49{,}4^0.$$

Aus dem Soda-filtrate schied Salzsäure eine Säure aus, die bei 170—171° schmolz. Die Bestimmung ihres Drehungsvermögens fiel folgendermassen aus[2]):

$$t = 19^0$$
$$l = 1 \text{ dm}$$
$$p = 9{,}0023$$
$$D^{19}/_4 = 0{,}81727$$
$$\alpha j = -9{,}1^0 \qquad [\alpha]j = -48{,}3^0.$$

Es lag also l-Isocamphersäure vor.

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1873*, 268; vergl. auch l. c. S. 680.

[2]) Die Bestimmung wurde mit unumkrystallisirten Säure ausgeführt, weshalb die spec. Rotation etwas zu niedrig erhalten wurde.

Was die Mengenverhältnisse der beiden Säuren betrifft, so war die erhaltene Quantität der l-Isocamphersäure abschätzungsweise nur ein Drittel der unverändert gebliebenen d-Camphersäure. Keine andere Säure wurde aufgefunden. Es ist hieraus ersichtlich, dass die Umlagerung in wässeriger Lösung, trotz der höheren Temperatur, viel langsamer stattfindet, wie in saurer Lösung. Der Sinn der Umlagerung bleibt doch derselbe.

Weiter wurde das Drehungsvermögen der in folgender Weise bereiteten „Mesosäuren“ direct gemessen.

1. „Mesocamphersäure“, erhalten durch Umlagerung der d-Camphersäure mit Eisessig-Salzsäure bei 180° während 12 Stunden. Nach Verdunsten im Wasserbade wurde die zurückgebliebene Säure mit Soda behandelt, filtrirt und mit Salzsäure abgeschieden. Die harzige Säure verwandelte sich über Nacht in eine Krystallmasse, die abfiltrirt und mit kaltem Wasser gewaschen wurde. Die Bestimmung wurde in absolut alcoholischer Lösung ausgeführt:

$$t = 16^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 9{,}9837$$
$$D^{16}/_4 = 0{,}8233$$
$$\alpha j = +2{,}8^0 \qquad [\alpha]j = +6{,}6^0.$$

2. „Mesocamphersäure“, erhalten durch Auflösen gleicher Theile d-Camphersäure und l-Isocamphersäure in der nöthigen Menge kochenden Wassers. Die Lösung trübte sich beim Erkalten milchig und enthielt nach 24 Stunden harte Krystalldrüsen, sowie feine Nadeln. Das Abgeschiedene wurde affiltrirt und nach dem Trocknen in absolut alcoholischer Lösung polarisirt:

$$t = 15^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 9{,}9833$$
$$D^{15}/_4 = 0{,}8242$$
$$\alpha j = +0{,}7^0 \qquad [\alpha]j = +1{,}7^0.$$

Es war also kein inactives Product entstanden.

3. „Mesocamphersäure“, durch Umlagerung von l-Isocamphersäure mit Eisessig-Salzsäure während 20 Stunden auf 180° dargestellt. Bearbeitung wie unter Versuch 1.

Bestimmung des Drehungsvermögens:

$t = 13^0$
$l = 1$ dm
$p = 10{,}0908$
$D\,^{13}/_4 = 0{,}82508$
$\alpha j = -1{,}4^0$ $[\alpha]_j = -6{,}57^0$.

4. „Mesocamphersäure“, Umlagerungsproduct, erhalten bei der Reduction des aus d-Camphersäure entstehenden Bromcamphersäureanhydrids mit Zinkstaub und Eisessig (siehe unter dieses). Die aus der theilweise verdampften Lösung ausgeschiedene, rohe Säure wurde direct polarisirt; auch hierbei traten die feinen Nadeln, die nach Wreden für die Mesocamphersäure eigenthümlich sind, auf.

$t = 14^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}835$
$D\,^{14}/_4 = 0{,}8253$
$\alpha j = -3{,}9^0$ $[\alpha]_j = -18{,}8^0$.

Wie hieraus ersichtlich, zeigt die specifische Drehung des erhaltenen Säuregemenges eine gewisse Proportionalität mit den wechselnden Mengen der entgegengesetzt drehenden Componenten der Mischung. Um dies weiter zu studiren, wurde noch der folgende Versuch ausgeführt.

5. Eine „Mesocamphersäure“ wurde durch Zusammenmischen gleicher Theile l-Camphersäure und l-Isocamphersäure in der nöthigen Menge kochenden Wassers dargestellt. Beim Erkalten schied sich das Product zuerst oelig aus, erstarrte aber über Nacht zu einer harten Krystallmasse, die bei 125—130° unscharf schmolz; die feinen Nadeln der gewöhnlichen „Mesocamphersäure“ traten nicht auf. Das Product wurde nach dem Abfiltriren und Trocknen direct polarisirt:

$t = 18^0$
$l = 1$ dm
$p = 10{,}0032$
$D\,^{18}/_4 = 0{,}82270$
$\alpha j = -10{,}2^0$ $[\alpha]_j = -48{,}4^0$.

Hier zeigt sich auch die Proportionalität, doch lässt sich aus der erhaltenen Zahl ersehen, dass das Drehungsvermögen des Gemenges mit etwa 1^0 hinter dem in diesem Falle berechneten $\left(\frac{49{,}5 - 48{,}9}{2} = \right) - 49{,}2^0$ bleibt. Die Erforschung der hiermit zusammenhängenden Umstände bietet viel Interesse. Ich werde mich mit der Lösung dieser Aufgabe später beschäftigen; bei der Anwendung von Lösungen activer Substanzen in activen Lösungsmitteln lässt sich wohl, unter Variation des Concentrationsgrades, ermitteln, ob hierbei Regelmässigkeiten obwalten oder nicht.

Die zweite inactive Camphersäure von CHAUTARD[1]).

Ich arbeitete zuerst nach der Angabe des genannten Forschers, wie schon im theoretischen Theil (S. 57) angegeben.

10 g racemische Camphersäure (i-Camphersäure) wurden mit 20 g absolutem Alcohol und 5 g conc. Schwefelsäure während zwei Stunden unter Rückfluss gekocht. Nachher verdunstete man den überschüssigen Alcohol, und versetzte den Rückstand mit Wasser. Es fiel ein dickflüssiges Oel aus, woraus, wie oben S. 156 angegeben, der saure orto-Aethylester auskrystallisirte und abgeschieden werden konnte.

Zu der weiteren Arbeit wurde indess das rohe Product, welches wenig von einem indifferenten Oel (Diæthylester der i-Camphersäure) enthielt, angewandt. Um daraus die vorliegende Säure von Chautard zu erhalten, wurde es scharf in Vacuum getrocknet und nach seiner Angabe einer Destillation unterworfen. Es wurde in eine kleine Retorte gefüllt und daraus über freie Flamme sehr langsam destillirt; arbeitet man zu schnell, geht viel von dem sauren Ester unzersetzt über. Das Destillat erstarrte schon im Retortenhalse theilweise, weil das gebildete Anhydrid auskrystallisirte. Um die Ester von diesem zu scheiden, wurde so viel 90 % Alcohol allmählig unter Kochen zugesetzt, bis sich auch der feste Theil des Destillates aufgelöst hatte. Die Lösung liess ich nachher längere Zeit bei 0^0 stehen, wobei das Anhydrid fast vollständig abgeschieden wurde. Dieses zeigte, nach Umkrystallisiren aus Alcohol, den Schmelzpunkt $220-221^0$ und die Krystallform des i-Camphersäureanhydrides. Durch Soda wurde es in eine inactive Säure vom Schmelzpunkt $202-203^0$ verwandelt, woraus hervorgeht, dass jenes wirklich vorliegt. Das

[1]) Die Litteraturangaben sind der Historik (S. 57) beigegeben.

Anhydrid wurde (siehe unten) zu einer neuen Darstellung der vorliegenden Säure benutzt.

Das Filtrat vom Anhydride, welches unveränderten orto-Aethyl- und gebildeten Diæthylester enthielt, wurde mit gesättigter Kochsalzlösung versetzt und die Ester in Aether aufgenommen. Den sauren Ester entfernte ich durch Umschütteln der Aetherlösung mit Soda, trocknete die abgehobene Aetherlösung mit Calciumchlorid scharf aus, und verdunstete im Wasserbade. Die Ausbeute liess viel zu wünschen übrig; es wurden nur 30 % an Diæthylester, auf angewandtem, rohen orto-Ester berechnet, erhalten.

Um eine bessere Ausbeute zu erhalten, arbeitete ich bei der weiteren Darstellung in folgender Weise: Ich ging vom i-Camphersäureanhydrid (5 Th.) aus und kochte es mit Alcohol (10 Th.) und conc. Schwefelsäure (6 Theile) anderthalb Stunden unter Rückfluss. In diesem Falle bildet sich schon bei der ersten Einwirkung viel Diæthylester, da aber dieser den sauren orto-Ester verunreinigt, erstarrt das Product nur schwierig. Das zuerst angegebene Verfahren eignet sich daher für die Darstellung des orto-Esters besser.

Das mittelst Aether abgeschiedene Product wurde weiter mit dem Theil der sauren Ester, der oben bei der Destillation unzersetzt übergangen war, vereinigt und langsam destillirt. Hierbei ging nur noch wenig saurer Ester über. Der vom i-Anhydrid in der angegebenen Weise befreite Diæthylester zeigte sich aber noch mit dem Anhydrid, das sich nach Abdestilliren des Aethers in kleiner Menge abschied, verunreinigt. Er wurde deshalb einer erneuten Reinigung mit wenig absolutem Alcohol, der das Anhydrid ungelöst zurückliess, unterzogen, wieder vom Alcohol befreit und einer Destillation unterworfen. Unter einem Luftdruck von 756,5 mm ging er bei 276—277° (uncorr.) unzersetzt über. CHAUTARD giebt den Siedepunkt zu 270—275° an.

Der Diæthylester bildet ein schwach gelbliches, etwas dickflüssiges Oel, das schwach nach Baumwollensamenoel riecht. Dass derselbe Körper wie CHAUTARD unter Händen hatte vorlag, ging auch aus dem ermittelten specifischen Gewicht vor. Es wurde nach zwei Bestimmungen, $D^{20}/_4 = 1{,}0332$ resp. 1,0338, oder in Mittel = 1,0335 erhalten. CHAUTARD giebt 1,03 an.

Handelt es sich nur um die Darstellung dieses Diæthylesters aus i-Camphersäure ausgehend, kann man eine ziemlich gute Ausbeute in folgender Weise erzielen: Man kocht 10 g i-Camphersäure mit 20 g absolutem Alcohol und 15 g conc. Schwefelsäure während 3 Stunden unter Luftkühler. Das Product wird wie oben isolirt und einer sehr langsamen Destillation aus einer kleinen Retorte, so dass nur etwa 8—10 Tropfen des Destillates pro Minute übergehen, unterzogen. Es hatten sich bei einem Versuch nur 1,5 g i-Campher-

säureanhydrid gebildet, und nur etwa 2 g orto-Aethylester destillirten unzersetzt über. Der rohe Diæthylester wog 7,2 g, was eine Ausbeute von 56 % entspricht. Vielleicht lässt sich dieses Verfahren auch zur Darstellung der einigermassen schwierig zugänglichen Diæthylester der activen Camphersäuren anwenden, doch ist nicht ausgeschlossen, dass auch diese einer Umlagerung zum kleineren Theil unterliegen.

Um nun den Diæthylester in die zweite inactive Säure weiter zu verwandeln, kochte ich ihn nach Chautards Angabe mit dem fünffachen Gewicht concentrirter Kalilösung (30 %) unter Rückfluss, da aber Auflösung nach 3 Stunden nicht erfolgte, setzte ich das gleiche Volumen Alcohol hinzu. Hierbei theilte sich die Flüssigkeit in zwei Schichten, die nach einstündigem Kochen wieder verschwanden. Es wurde hierauf noch 3 Stunden erhitzt, bis kein Diæthylester auf Zusatz von Wasser zu einer vom Alcohol befreiten Probe mehr ausfiel. Der Alcohol wurde im Wasserbade verdunstet, und die bei Zusatz von Salzsäure abgeschiedene, nach einiger Zeit krystallisirende Säure in Aether aufgenommen. Diese Säure besteht, wie schon oben S. 157 erwähnt, aus dem sauren allo-Ester der i-Camphersäure. Der rohe Ester wurde von Neuem in überschüssige Kalilauge von 20 % aufgelöst und damit erhitzt, bis die mit Salzsäure abgeschiedene Säure nicht mehr harzig, sondern gleich fest erhalten wurde. Hierzu waren noch sechs Stunden nöthig, was die eminente Resistenz des allo-Esters gegen Alkalien zeigt.

Die schliesslich erhaltene Säure war, wie Chautard angiebt, pulverförmig. Beim Umkrystallisiren erhielt ich undeutliche Krystalle, der grösste Theil schied sich aber in Kugeln ohne sichtbare Krystallstructur ab. Der Schmelzpunkt der umkrystallisirten Probe zeigte auch, das ich keine einheitliche Substanz unter Händen hatte; sie fing bei 184° an zu sintern, und erst gegen 195° war sie völlig verflüssigt.

Um zu einem bestimmten Urtheil über die Natur der Säure zu gelangen, wurde sie der Einwirkung von Acetylchlorid (3 Th. auf 1 Th. der Säure) während 12 Stunden bei gewöhnlicher Wärme ausgesetzt. Sie löste sich hierbei allmählich auf, und zugleich schied sich ein Körper krystallisirt aus. Das Product sammt den Krystallen wurde ohne Erwärmen von Acetylchlorid und Essigsäure befreit, und die trockne, pulverisirte Masse mit Sodalösung von 10 % in der Kälte behandelt. Hierbei blieb der grösste Theil ungelöst, während das Product zum kleineren Theil in Lösung ging. Nach dem Abfiltriren löste ich die Krystalle in heissem Alcohol. Die Lösung schied beim Erkalten reichliche Mengen eines Körpers aus, der die Krystallform des i-Camphersäureanhydrides, dicke Rhomboëder, zeigte. Den Schmelzpunkt fand ich bei

221° liegend, was auch für das genannte Anhydrid entschied. Die Substanz wurde analysirt; ihre Zusammensetzung stimmte auch mit dieser Annahme überein:

0,2347 g Substanz gaben 0,5652 g CO_2 und 0,1609 g H_2O;

Berechnet für $C_{10}H_{14}O_3$:		Gefunden:
C	65,93 %	65,68 %
H	7,69 „	7,62 „

Zur weiterer Identificirung des Anhydrides wurde es mit Sodalösung in die zugehörige Säure verwandelt. Diese Säure krystallisirte aus kochendem Wasser in der Krystallform der i-Camphersäure und zeigte den Schmelzpunkt 202—203°. Ihre alcoholische Lösung zeigte sich in 1 dm-Rohre inactiv. Die Löslichkeit wurde zu 0,22 g Säure auf 100 g Wasser bei 20° gefunden.

Hiermit wurde bewiesen, dass die zweite inactive Camphersäure von CHAUTARD grösstentheils aus i-Camphersäure bestand.

Die Untersuchung des zweiten Bestandtheiles dieser Säure, die bei der Behandlung mit Acetylchlorid nicht anhydrisirt worden war, ergab weiter Folgendes:

Das Filtrat nach dem Abfiltriren des i-Camphersäureanhydrides wurde mit Salzsäure angesäuert, wobei eine verhältnissmässig kleine Menge einer Säure in kugelförmigen Aggregaten ausfiel. Sie wurde zur Reinigung erst aus wenig warmen Eisessig umkrystallisirt; die Lösung schied, beim freiwilligen Verdunsten, nach ein Paar Tagen die ganze Menge der Säure vollständig in runden Aggregaten aus. Das zweite Mal wurde kochender Alcohol von 50 % angewandt. Während des Erkaltens erhielt man auch hier zuerst eine kugelige Abscheidung, die abfiltrirt wurde; bei weiterem 48-stündigem Stehen erschienen aber aus dem Filtrate einzelne Krystalle, sowie rosettenförmige Gruppen. Die Krystalle ähnelten den Formen der i-Isocamphersäure und stellten längliche platte Prismen, mit keilförmiger Zuspitzung und schräger Abstumpfung dar. Sowohl die Kugeln wie die einzelnen Krystalle zeigten den Schmelzpunkt 190—191° der i-Isocamphersäure. Die Wasserlöslichkeit wurde wie bei dieser Säure (S. 168) bestimmt und bei 20° zu 0,197 g auf 100 g Wasser gefunden. i-Isocamphersäure zeigt die Löslichkeit 0,203 g. Die Säure zeigte sich in alcoholischer Lösung *inactiv*.

Zu weiterer Identificirung wurde die Säure trocken über ihren Schmelzpunkt erhitzt. Ich erhielt hierbei nur i-Camphersäureanhydrid vom Schmelz-

punkt 220°; die daraus, vermittelst Soda, wieder erhaltene Säure schmolz bei 202—203°.

Hieraus ergiebt sich, dass die zweite inactive Säure von Chautard ein Gemenge, das aus i-Camphersäure und wenig i-Isocamphersäure besteht, darstellt. Es erleidet die i-Camphersäure also beim Arbeiten nach obiger Methode eine Umlagerung, die wohl bei dem ersten Kochen mit Schwefelsäure stattfindet.

Die zweite inactive Camphersäure von Wreden [1]).

4 g „Mesocamphersäure", durch Zusammenmischen von je 2 g d-Camphersäure und l-Isocamphersäure dargestellt, wurden 32 Stunden mit 5 cm^3 Salzsäure (spec. Gew. 1,2) und 70 g Wasser gekocht. Da keine Veränderung des ausfallenden Productes zu beobachten war, wurde noch 30 Stunden weiter gekocht.

Die Säure fiel oelig aus und erstarrte, wie die „Mesosäuren", nur allmählig. Nach Stehen über Nacht enthielt die Lösung, wie auch bei „Mesosäure" üblich, zweierlei Krystalle, rhomboëderartige Körner und dünne Lamellen oder aus feinen Nadeln bestehenden Aggregate. Die letzgenannten scheiden sich später aus, ebenso bei freiwilligem Verdunsten der Mutterlauge. Die körnigen Krystalle, wovon eine Probe sorgfältig ausgelesen wurde, fingen bei 135° zu sintern an und sind erst gegen 160° völlig geschmolzen. Die aus der Mutterlauge erhaltenen Krystalle schmelzen bei etwa 105°.

Die Mutterlauge wurde nach Abfiltriren des Abgeschiedenen zur Trockne verdampft, und der Rückstand mit dieser Menge vereinigt. Bei der Einwirkung von Acetylchlorid auf 2,87 g dieses Gemenges fand Reaction wie gewöhnlich statt; das Product wurde wie früher bearbeitet und schliesslich mit Sodalösung verrieben. Hierbei blieb ein Anhydrid ungelöst, das, aus Alcohol umkrystallisirt, bei 220° schmolz. Beim Kochen mit Sodalösung löste es sich bald auf, und Salzsäure liess eine Säure ausfallen, die umkrystallisirt den Schmelzpunkt 187° zeigte. Die Bestimmung des Drehungsvermögens zeigte, dass d-Camphersäure vorlag:

---

[1]) Zur Seite 58 des theoretischen Theiles.

$t = 19^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}7707$
$D^{19}/_4 = 0{,}82322$
$\alpha j = +10{,}25^0$ $[\alpha]_j = +49{,}8^0$.

Die Mutterlauge nach der Behandlung mit Soda wurde mit Salzsäure versetzt, wobei eine Säure vom Schmelzpunkt 171—172° ausfiel. Ihrem Drehungsvermögen nach stellt sie l-Isocamphersäure dar:

$t = 19{,}5^0$
$l = 1$ dm
$p = 10{,}029$
$D^{19,5}/_4 = 0{,}8222$
$\alpha j = -10{,}25^0$ $[\alpha]_j = -48{,}6^0$.

Aus 2,87 g Gesammtsäure erhielt ich 1,3 g d-Camphersäureanhydrid (roh gewogen), entsprechend 1,42 g d-Camphersäure, und 1,417 g l-Isocamphersäure, also gleiche Mengen, wie sie im Ausgangsmaterial vorhanden waren.

Die „Mesocamphersäure“ WREDENS unterliegt also beim Kochen mit verdünnter Salzsäure keine Veränderung. Es existirt demnach auch keine zweite inactive Säure, die daraus erhältlich sein sollte.

Die inactive Camphersäure von JUNGFLEISCH [1]).

Um diese Säure, die beim höheren Erhitzen der d-Camphersäure entstehen soll, zu erhalten, wurden 10 g Camphersäure, auf zwei Röhren aus schwerschmelzbarem Kaliglas vertheilt, 16 Stunden mit 4 g Wasser und, um die Säure besser aufzulösen, 4 g Eisessig auf 280—290° erhitzt. Die Röhren zeigten beim Eröffnen keinen Druck. Der Inhalt stellte eine gelblich gefärbte Flüssigkeit dar, die wenig Krystalle vom Aussehen der „Mesocamphersäure“ enthielt. Die Flüssigkeit erstarrte nach einiger Zeit zu einem Brei von Krystallen, die nach Zugabe von Wasser abfiltrirt und aus Wasser unter Zusatz von wenig Essigsäure umkrystallisirt wurden. Nach längerer Zeit schieden sich Krystallaggregate, bestehend aus feinen, der „Mesocamphersäure“ ähnlichen Nadeln vom Schmelzpunkt 112° aus; daneben waren einzelne kör-

[1]) Vergl. S. 59 des theoretischen Theiles.

nige Krystalle, die bei 169—171° schmolzen, vorhanden. Da die Trennung der Bestandtheile durch Krystallisation nicht durchfürbar war, wurden die erhaltenen Krystalle dem aus den Mutterlaugen durch Verdunsten erhaltenen Product, das zuerst harzig, dann krystallinisch wurde, zugemischt, und Acetylchlorid zugegeben. Nach 12 Stunden wurde das Product wie gewöhnlich verarbeitet, mit Sodalösung behandelt und das ungelöst gebliebene Anhydrid abfiltrirt. Aus dem Filtrate erhielt ich beim Ansäuern eine Säure.

Das Anhydrid schmolz nach Umkrystallisiren aus Alcohol bei 220—221° und war dem gewöhnlichen Camphersäureanhydrid durchaus ähnlich. Beim Kochen mit Kaliumcarbonatlösung ging sie in eine Säure über, die nach dem Ausfällen bei 186° schmolz. Folgende Bestimmung des Drehungsvermögens zeigte, dass d-Camphersäure vorlag:

$$t = 20^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 10{,}0365$$
$$D^{20}/_4 = 0{,}82198$$
$$\alpha_j = +21{,}15^0 \qquad [\alpha]_j = +50{,}1^0.$$

Die aus dem Sodafiltrate erhaltene Säure schmolz unumkrystallisirt bei 170—171° und zeigte sich, ihrem Drehungsvermögen nach, mit l-Isocamphersäure identisch:

$$t = 19^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 9{,}8616$$
$$D^{19}/_4 = 0{,}82258$$
$$\alpha_j = -20{,}0^0 \qquad [\alpha]_j = -48{,}2^0.$$

Auch eine Löslichkeitsbestimmung ergab, dass diese Säure vorlag. Bei 20° enthielten 8,0384 g der gesättigten Lösung 0,0256 g Säure; 100 g Wasser lösen demnach *0,32 g* der Säure. Für l-Isocamphersäure wurde die Löslichkeit unter dieselben Verhältnisse zu 0,336 g auf 100° Wasser bestimmt.

Was die Mengenverhältnisse der beiden Säuren betrifft, so wurden aus 9 g des Umlagerungsproductes 4,57 Rohanhydrid, entsprechend 5,02 g d-Camphersäure, und 3,65 g rohe l-Isocamphersäure, oder zusammen 8,67 g Säuren erhalten. Hieraus ergiebt sich, dass, trotz der angewandten höheren Temperatur, die Umwandlung der d-Camphersäure in l-Isocamphersäure durchaus nicht so weit fortgeschritten war, wie bei 180° während derselben Zeit. Dies

beruht wahrscheinlich darauf, dass die gegenseitige Stabilität der beiden Säuren bei höherer Temperatur eine andere ist wie bei dieser.

Betreffend der Natur der vorliegenden inactiven Säure von JUNGFLEISCH lässt sich aus den Versuchsergebnissen entnehmen, dass sie aus der gewöhnlichen Umlagerungsmischung besteht.

Inactive Camphersäure von ARMSTRONG und TILDEN[1]).

Als Ausgangsmaterial wurde eine von Herrn Professor W. A. TILDEN mir gütigst überlassene Menge inactiven Camphers, der aus inactiven Camphen erhalten worden war, benutzt. Den Schmelzpunkt dieses Camphers fand ich bei 156^0 liegend.

1,2 g des Camphers wurden mit 20 g Salpetersäure von spec. Gew. 1,42 in einem Kolben mit angeschmolzenem Kühlrohr auf dem Wasserbade erhitzt, bis nach etwa 3 Tagen die Entwickelung nitroser Dämpfe nachliess. Beim Erkalten krystallisirte eine nicht unbeträchtliche Menge einer Säure aus, die in wenig Sodalösung, zur Entfernung wenig unangegriffenen Camphers, aufgelöst und, nach Umschütteln der Lösung mit Aether, wieder abgeschieden wurde. Nach einmaligem Umkrystallisiren aus Wasser zeigte sie den Schmelzpunkt 202^0 der i-Camphersäure; auch in der Krystallform, platte Prismen mit keilförmiger Zuspitzung, zeigte sie sich mit dieser Säure übereinstimmend. Die Löslichkeit in Wasser bei 20^0 betrug *0,257 g* in 100 g Wasser. Ihre alcoholische Lösung war optisch *inactiv.*

Die Salpetersäure enthaltende Mutterlauge wurde verdunstet und Wasser zugesetzt, wobei eine Säure in zähen Tropfen, die bald erstarrten, ausfiel. Nach Reinigung mit Soda wurde sie der ersten Portion zugegeben, die ganze Menge mit überschüssigem Acetylchlorid versetzt und bei gewöhnlicher Temperatur einige Stunden stehen gelassen, wobei Chlorwasserstoff entwich. Die in der Kälte verdunstete Lösung liess einen krystallinischen Rückstand zurück, der mit Soda angerührt, abfiltrirt und getrocknet wurde. Nach dem Auflösen in absolutem Alcohol krystallisirte beim Erkalten ein Körper aus, der die charakteristische Krystallform des i-Camphersäureanhydrides, dicke Rhomboëder, die Couvert-förmige Zwillinge darstellten, zeigte. Der Schmelzpunkt lag scharf bei 220—221^0. Die abfiltrirte Sodalösung enthielt keine mit Säuren ausfällbaren Körper.

---

[1]) Betreffend der Historik siehe S. 60 des theoretischen Theiles.

Um die Identität der Säure noch sicherer festzustellen, wurde das Anhydrid durch Kochen mit Soda in die zugehörige Säure verwandelt. Diese schmolz wieder bei 202—203° und war der i-Camphersäure durchaus ähnlich.

Wie schon von vorn herein zu erwarten war, stellt demnach die inactive Camphersäure von Armstrong und Tilden gewöhnliche i-Camphersäure dar.

Inactive Camphersäure von Marsh und Stockdale[1]).

Zur Darstellung dieser Säure wurde aus einem Pinenhydrochlorid, das aus linksdrehendem, in finländischem Harzterpentin vorhandenen Pinen (Siedepunkt 155—160°) erhalten wurde, ausgegangen.

30 g dieses bei 125—126° schmelzenden Hydrochlorides wurden in zwei Portionen von je 15 g mit 9 g frisch geschmolzenem Kaliumacetat und 8 g Eisessig in Röhren eingeschmolzen und während 4 Stunden auf 250° erhitzt. Die Röhren öffneten sich unter Druck. Der dunkelgefärbte Inhalt wurde mit Wasserdampf destillirt, wobei etwa die Hälfte überging. Der Rückstand stellte ein dunkelgefärbtes Harz dar. Das überdestillirte Oel wurde abseparirt und nach dem Trocknen mit Chlorcalcium und geglühter Pottasche destillirt. Es fing schon bei etwa 125° zu sieden an, und der zuerst übergehende Theil zeigte Keton- resp. Aldehyd-artigen Geruch. Bei 160° destillirte eine grössere Menge (Camphen) über; das über 190° Siedende wurde aufgehoben und einer weiteren Reinigung unterworfen. Nach dreimaligen Fractioniren wurden 4 g, die ich zwischen 190—240° auffing, eines oelförmigen, ungefärbten Destillates, das einen ausgeprägten Geruch nach Fichtennadeloel besass, erhalten. Es würde während 9 Stunden mit alcoholischer Kalilösung zur Verseifung gekocht, und die Lösung mit Wasser ausgefällt. Es schied sich ein dickflüssiges Oel aus, das zugleich Borneol-artig und fuselig roch; das Oel wurde mit Aether isolirt.

Das rohe Borneol wurde unter Kühlung zu concentrirter Salpetersäure vorsichtig zugetröpfelt, und nachdem die erste, freiwillig eintretende Oxydation vorüber war, etwa 3 Tage im Wasserbade erhitzt. Die Lösung wurde verdunstet, und die Säure mit Wasser als dickes, bald erstarrendes Oel ausgefällt. Ich löste sie zur Reinigung in Sodalösung auf, schüttelte mit Aether aus und schied sie wieder ab, wobei sie wieder zuerst oelig ausfiel, was in Betracht der Unreinheit des angewandten Borneols nicht auffallen kann. Sie

[1]) Vergleiche über die Litteratur S. 61 des theoretischen Theiles.

wurde in Aether aufgenommen und, nach Verdunsten des Aethers, mit überschüssigem Acetylchlorid behandelt, welches Reagenz sich auch in diesem Falle als besonders geeignet zeigte.

Es zeigte sich bei gewöhnlicher Temperatur eine langsame Entwickelung von Chlorwasserstoff. Die Lösung wurde nach 3 Stunden in der Kälte verdunstet; als der Rückstand wie gewöhnlich mit Sodalösung behandelt wurde, blieb ein indifferenter Körper in kleinen schönen Krystallen zurück. Er wurde aus kochendem Alcohol umkrystallisirt, wobei es sich beim Erkalten in durchsichtigen Rhomboëdern oder briefcouvert-ähnlichen Zwillingen ausschied. Der Schmelzpunkt lag bei 220—221°. Hiermit war die Identität des Körpers mit dem i-Camphersäureanhydrid sehr wahrscheinlich gemacht.

Durch Kochen mit Sodalösung wurde das Anhydrid in eine Säure übergeführt. Sie zeigte sich in Wasser schwer löslich und krystallisirte daraus der i-Camphersäure durchaus ähnlich, nämlich in platten, keilförmig zugespitzten Prismen mit gerader Abstumpfung. Der Schmelzpunkt lag bei 202—203°. Es wurde noch die Löslichkeit bestimmt und aus zwei übereinstimmenden Versuchen zu 0,259 g auf 100 g Wasser bei 20° erhalten. In alcoholischer Lösung zeigte sich die Säure inactiv.

Die zur Isolierung des Anhydrides benutze Sodalösung wurde weiter mit Salzsäure ausgefällt. Es schied sich eine kleine Menge eines harzigen Oeles ab, das dem aus Terpentin mit Salpetersäure gewöhnlich entstehenden Oxydationsproduct durchaus glich; die Säure krystallisirte auch nach wochenlangem Stehen nicht, sondern verblieb klebrig. Sie verdankt wahrscheinlich ihr Entstehen den dem angewandten rohen Borneol beigemengten Condensationsproducten.

Aus dem Obigen geht hervor, dass das einzige Product, welches bei der Wiederholung der Arbeit von Marsh und Stockdale krystallisirt erhalten wurde, aus der gewöhnlichen i-Camphersäure besteht.

II. Die Anhydride der Camphersäuren.

Anhydrid der d-Camphersäure; l-Camphersäureanhydrid [1]).

Die Darstellung dieses Anhydrides wurde schon S. 141, anlässlich der Reinigung der d-Camphersäure, besprochen. Man krystallisirt das rohe Anhydrid zweimal aus kochendem Weingeist um, um es in ganz reinem Zustande vom Schmelzpunkt 220—221° zu erhalten.

Zu den Eigenschaften dieses schon längst bekannten Körpers sei Folgendes hinzugefügt. Das Anhydrid ist in kochendem Wasser etwas löslich und krystallisirt daraus beim Erkalten in gezackten Nadeln. Wenn nur einige Minuten gekocht wird, ist der Übergang in d-Camphersäure ganz minimal, doch wird die Farbe des blauen Lackmuspapiers schon jetzt durch die Lösung verändert. Die Beständigkeit des Anhydrides gegen Wasser zeigt sich am Besten daraus, dass Quantitäten von 5—10 g mehrere Stunden gekocht werden müssen, ehe die Umwandlung vollständig wird. Auch nachdem sich Alles gelöst hat, muss einige Zeit gekocht werden, weil die erhaltene d-Camphersäure sonst durch gelöstes Anhydrid verunreinigt ist und einen niedrigen Schmelzpunkt aufweist.

Weiter ist hervorzuheben, dass das Anhydrid *mit Wasserdämpfen* nicht unbeträchtlich *flüchtig ist.* Beim Kochen desselben mit Wasser unter Rückflusskühler bemerkt man oft Krystalle in den kälteren Theilen des Kühlers, die aus Camphersäureanhydrid bestehen. In dieser Hinsicht gleicht dasselbe also den Anhydriden der alkylirten Bernsteinsäuren, die, allerdings nur in Gegenwart von Schwefelsäure, aus wässeriger Lösung mit Wasserdampf verflüch-

---

[1]) Da dieses Anhydrid linksdrehend ist (siehe weiter unten), bezeichne ich es als l-Camphersäureanhydrid.

tigt werden können [1]). Da die alkylirten Glutarsäuren dagegen diese Eigenschaft nicht aufweisen [2]), könnte dieser Umstand vielleicht als Argument für die Auffassung, dass die Camphersäure Bernsteinsäure-ähnlich gebaut ist, gelten. Es scheint mir indess hier, wie auch in vielen anderen Fällen, nicht angezeigt, aus ähnlichen physicalischen Eigenschaften Schlüsse betreffend der Structur zu ziehen.

Herrn Dr. K. VON KRAATZ in Heidelberg bin ich für die folgende Bestimmung der Krystallform zu grossem Dank verpflichtet. Er theilt mir hierüber, sowie über die Krystalle des optisch isomeren Anhydrides der l-Camphersäure (siehe weiter unten) Folgendes mit:

„*Rechts- und Linkscamphersäureanhydrid. Aus absolutem Alcohol bei gewöhnlicher Temperatur krystallisirt.* Die beiden Substanzen sind krystallographisch nicht zu unterscheiden.

Krystallsystem: Rhombisch.

$a : b : c = 0{,}580457 : 1 : 0{,}579097$

Beobachtete Formen: $[110]\ \infty P$, $[120]\ \infty \breve{P} 2$, $[010]\ \infty \breve{P} \infty$, $[100]\ \infty \bar{P} \infty$, $[011]\ \breve{P} \infty$, $[001]\ oP$.

Die farblosen c:a 3 mm langen Krystalle sind meist prismatisch nach der c-Axe. Die Reflexe sind gut; $\infty \bar{P} \infty$ und oP wurden nur an wenigen Krystallen beobachtet. Eine selten und mit schwachen Reflexen beobachtete Form scheint $[041]\ 4 \breve{P} \infty$ zu sein.

Winkel-Tabelle.

	Gemiessen:	Berechnet:
$(110):(110) =$	$*60^0\ 16'$	—
$(011):(0\bar{1}1) =$	$*60^0\ 9'$	—
$(120):(1\bar{2}0) =$	$98^0\ 32'$	$98^0\ 30'\ 40''$
$(110):(011) =$	$75^0\ 22'$	$75^0\ 25'\ 40''$
$(120):(011) =$	$67^0\ 40'$	$67^0\ 40'\ 50''$

Spaltbarkeit nicht beobachtet. Die optischen Eigenschaften entsprechen der rhombischen Symmetrie.

[1]) Vergl hierüber KOENIGS, Berichte d. deutsch. Gesellsch. *1893*, 2337; sowie AUWERS, Ann. der Chemie *285*, 212.

[2]) AUWERS, l. c.

Camphersäureanhydrid (vom rechtsdrehenden Laurineencampher) wurde schon von ZEPHAROVICH und MONTGOLFIER gemessen. Ich glaubte die Stellung von ZEPHAROVICH nicht beibehalten zu sollen, da sie von der gebräuchlichen Aufstellung rhombischer Krystalle abweicht. Vergleichsweise führe ich hier die von ZEPHAROVICH und MONTGOLFIER gefundenen Winkelwerthe an:

	ZEPHAROVICH:	MONTGOLFIER:	v. KRAATZ:
$(110):(1\bar{1}0)$	$=60^0\ 18'$	$59^0\ 35'$	$60^0\ 16'$
$(011):(0\bar{1}1)$	$=60^0\ 26'$	$60^0\ 43'$	$60^0\ 9'$
$(120):(1\bar{2}0)$	$=98^0\ 34'$	—	$98^0\ 32'$".

Drehungsvermögen. Im theoretischen Theil wurde schon angegeben, dass verschiedene Ansichten über die Activität des l-Camphersäureanhydrides kund gegeben worden sind. In der That zeigte sich seine Chloroformlösung inactiv.

$t = 14^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}794$
$\alpha j = 0^0$

Dagegen war es in Benzol-lösung activ. Eine Bestimmung der Drehung des reinen Anhydrides in diesem Lösungsmittel ergab Folgendes:

$t = 18^0$
$l = 2$ dm
$p = 4{,}476$
$D^{18}/_4 = 0{,}89039$
$\alpha j = -0{,}75^0 \qquad [\alpha]j = -3{,}68^0.$

Ein gleiches Präparat, aus einer „Mesocamphersäure" mittelst Acetylchlorid erhalten, die nach 4-stündigem Erhitzen von d-Camphersäure mit Eisessig und Salzsäure auf 180^0 enstanden war, zeigte folgendes Drehungsvermögen:

$t = 19^0$
$l = 2$ dm
$p = 4{,}4405$
$D^{19}/_4 = 0{,}88902$
$\alpha j = -0{,}65^0 \qquad [\alpha]j = -3{,}22^0.$

Ein drittes Präparat, in gleicher Weise nach 8-stündigem Erhitzen erhalten, zeigte folgende Drehung:

$t = 16{,}5^0$
$l = 2$ dm
$p = 4{,}3725$
$D^{16{,}5}/_4 = 0{,}89131$
$\alpha j = -0{,}7^0$ $[\alpha]j = -3{,}51^0$.

Die *Löslichkeit* wurde in Benzol und in absolutem Alcohol derart bestimmt, dass die beim Sieden gesättigten Lösungen 48 Stunden stehen gelassen wurden.

In *Benzol:* 4,7797 g Lösung enthielten bei $19{,}5^0$ 0,2861 g Substanz, die also in 4,4936 g Lösungsmittel enthalten waren. 100 g Benzol lösen 6,36 l-Camphersäureanhydrid.

In *abs. Alcohol:* 4,8217 g Lösung enthielten bei 20^0 0,0562 g Substanz, die also in 4,7655 g Lösungsmittel enthalten waren. 100 g Alcohol lösen demnach 1,18 g l-Camphersäureanhydrid.

Zur *Umlagerung* des Anhydrides der d-Camphersäure wurde folgender Versuch ausgeführt.

10 g reines Anhydrid wurden in ein Rohr von schwerschmelzbarem Glas eingeschlossen und während 20 Stunden auf 270^0 erhitzt. Nach dem Erkalten enthielt das Rohr, das sich ohne Druck eröffnete, eine kaum gelblich gefärbte Krystallmasse, die ketonartig und zugleich etwas brenzlich roch. Sie wurde pulverisirt und aus kochendem Alcohol umkrystallisirt, wobei sich die seidenglänzenden, gestreiften Prismen des Anhydrides ausschieden. Der Schmelzpunkt wurde zu $220-221^0$ gefunden. Bei der Polarisation in Benzol-lösung ergaben sich folgende Zahlen:

$t = 18^0$
$l = 2$ dm
$p = 4{,}449$
$D^{18}/_4 = 0{,}89039$
$\alpha j = -0{,}7^0$ $[\alpha]j = -3{,}45^0$.

Es war also keine Veränderung des angewandten Körpers stattgefunden. Dies wurde noch durch die Löslichkeitsbestimmung constatirt: 4,0753 g Benzollö-

sung enthielten bei 19° 0,2374 g Substanz, die also in 3,8379 g Lösungsmittel enthalten waren. 100 g Benzol lösten 6,19 g des Anhydrides. Zur weiterer Bestätigung, dass keine Umlagerung während des Versuches eingetreten war, wurde das erhaltene Anhydrid mittelst Kaliumcarbonatlösung in die entsprechende Säure, die nachher in absolut-alcoholischer Lösung polarisirt wurde, umgewandelt. Der Schmelzpunkt lag bei 185—186°.

$t = 17{,}5^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}9644$
$D^{17{,}5}/_4 = 0{,}82312$
$\alpha_j = + 20{,}95^0 \qquad [\alpha]_j = + 49{,}8^0.$

Trotz der langen Versuchsdauer und der hohen Temperatur war also keine Veränderung mit dem l-Camphersäureanhydrid eingetreten.

Derselbe Anhydrid wurde weiter bei der Reduction des l-Brom- und l-Chlorcamphersäureanhydrides (siehe diese) erhalten.

Anhydrid der l-Camphersäure; d-Camphersäureanhydrid [1]).

Dieser Körper wurde aus der zugehörigen Säure in ähnlicher Weise, wie das l-Camphersäureanhydrid aus d-Camphersäure, erhalten. Nach zweimaligem Umkrystallisiren aus absolutem Alcohol zeigte er den Schmelzpunkt 220—221°.

Die Krystallbestimmung seitens des Herrn Dr. K. v. Kraatz wurde schon oben angegeben.

Das *Drehungsvermögen*, in Chloroform und in Benzol bestimmt, zeigt eine fast völlige Übereinstimmung mit dem des l-Camphersäureanhydrides:

in Chloroform: $t = 19^0$
$l = 2$ dm
$p = 5{,}2$
$\alpha_j = 0^0$

---

[1]) Vergl. die Note S. 183.

in Benzol: $t = 17^0$
$l = 2$ dm
$p = 4{,}4652$
$D^{17}/_4 = 0{,}89044$
$\alpha_j = +0{,}8^0$ $[\alpha]_j = +3{,}93^0$.

Dasselbe geht aus den ausgeführten Löslichkeitsbestimmungen, die wie bei l-Camphersäureanhydrid ausgeführt wurden, hervor.

Löslichkeit in Benzol: 3,1367 g Lösung enthielten bei 19° 0,1849 g Substanz, die also in 2,9518 g des Lösungsmittels enthalten waren. 100 g Benzol lösen 6,26 g d-Camphersäureanhydrid.

Löslichkeit in absolutem Alcohol: 6,2131 g Lösung enthielten bei 20° 0,0733 g Substanz, die demnach in 6,1398 g des Lösungsmittels enthalten waren. Es lösen 100 g abs. Alcohol 1,18 g d-Camphersäureanhydrid.

Zur Entscheidung über die Umlagerungsfähigkeit des Anhydrides wurden 5 g während 16 Stunden auf 260° in zugeschmolzenem Rohre erhitzt. Der Schmelzpunkt des umkrystallisirten Productes lag bei 220°. Es zeigte in Benzol-lösung folgendes Drehungsvermögen:

$t = 19^0$
$l = 2$ dm
$p = 4{,}460$
$D^{19}/_4 = 0{,}89023$
$\alpha_j = +0{,}75^0$ $[\alpha]_j = +3{,}69^0$.

Aus dem Anhydride wurde die entsprechende Säure durch Kochen mit Kaliumcarbonatlösung regenerirt. Sie zeigte den Schmelzpunkt 186° und gab bei der Polarisation folgende Zahlen:

$t = 19^0$
$l = 2$ dm
$p = 10{,}001$
$D^{19}/_4 = 0{,}82301$
$\alpha_j = -20{,}9^0$ $[\alpha]_j = -49{,}4^0$.

Es tritt also auch beim d-Camphersäureanhydrid keine Umlagerung bei längerem Erhitzen auf höhere Temperatur ein.

i-Camphersäureanhydrid.

Das Anhydrid der i-Camphersäure wurde sowohl durch Zusammenmischen gleicher Theile der Componenten, wie auch vermittelst Acetylchlorid aus der racemischen Säure dargestellt. In beiden Fällen wird es, beim Erkalten der heissen, concentrirten, alcoholischen Lösung, in derselben Krystallform erhalten. Es scheiden sich ziemlich grosse, trübe Rhomboëder aus, die Zwillinge darstellen, was besonders deutlich unterm Microskope zu ersehen ist. Besonders die an der Oberfläche der Lösung entstandenen Krystalle zeigen eine briefcouvertähnliche Anordnung der die Krystalle zusammensetzenden dünnen Einzellamellen, was zur Identificirung des Körpers dienen kann. Aus einer kaltgesättigten alcoholischen Lösung krystallisirt das i-Anhydrid in gut ausgebildeten, durchsichtigen Einzelkrystallen, aus kurzen Prismen bestehend. Herr Dr. v. Kraatz hatte die Güte auch diese Krystalle zu messen. Derselbe theilt darüber Folgendes mit:

„Krystallsystem: Monosymmetrisch.

$a : b : c = 0{,}542956 : 1 : 1{,}207605.$

Wasserhelle, mehrere Millimeter grosse Krystalle; bald nach der a-Axe, bald nach der c-Axe gestreckt.

Beobachtete Formen: $a = [100]$ (orthopinakoid), $b = [010]$ (klinopinakoid), $c = [001]\, oP$, $[110]\ \infty P$, $[\bar{1}01] P\infty$.

Gemessen:	Berechnet:
$(110):(1\bar{1}0) = {}^*57^0\ 30'$	—
$(100):(001) = {}^*64^0\ 24'$	—
$(001):(\bar{1}01) = {}^*42^0\ 28'$	—
$(110):(001) = 67^0\ 49'$	$67^0\ 44'\ 10''$

Auf $c[001]$ tritt eine Axe aus; Axenebene die Symmetrieebene“.

Das i-Camphersäureanhydrid zeigte sich sowohl in Chloroform- wie in Benzol-lösung *optisch inactiv.*

Löslichkeit in absolutem Alcohol: 3,9654 g der heissgesättigten, währen 48 Stunden bei 20^0 gestandenen Lösung enthielten 0,0736 g Substanz, die also 3,8918 g Alcohol zur Lösung brauchten. 100 g absoluter Alcohol lösen demnach 1,88 g i-Camphersäureanhydrid.

Ach in heissem Alcohol und in anderen organischen Solventien scheint der Körper leichter löslich als die Componenten zu sein. Trotzdem liegt in dem i-Camphersäureanhydrid *eine wahre racemische Verbindung* vor, wie die Krystallmessung ergiebt.

Der Schmelzpunkt liegt oft zwischen 220—221°; in sehr reinen Präparaten wird das Schmelzen momentan bei 221° beobachtet. Dieser Unterschied zwischen den Schmelzpunkten der racemischen Verbindung und ihrer Componenten ist indess zu klein, um zu der Behauptung zu berechtigen, dass die Constante wirklich verschieden wäre.

In dem i-Camphersäureanhydrid hätten wir demnach mit einer racemischen Verbindung zu thun, die den gleichen Schmelzpunkt wie die sie zusammensetzenden, activen Componenten besitzt.

Das i-Camphersäureanhydrid wurde weiter, wie schon früher angegeben, beim Verarbeiten der inactiven Camphersäuren von Chautard, von Armstrong und Tilden, sowie von Marsh und Stockdale erhalten.

Versuche zur Darstellung eines Anhydrides aus der l-Isocamphersäure.

Anhangsweise seien hier den diesbezüglichen Versuchen gedacht, obwohl sie kein positives Resultat ergaben. Sie sind nicht desto weniger wichtig genug (S. 37 u. 129), um eine Besprechung an dieser Stelle zu berechtigen.

Wie mehrmals hervorgehoben, wirken weder Acetylchlorid noch Essigsäureanhydrid in der Kälte auf die Säuren der Isocamphersäuregruppe ein. Aber schon nach kurzem Erwärmen auf den Siedepunkt der Agenzien werden sie sichtbar verändert, indem die Producte nach Verdunsten des Überschusses der einwirkenden Flüssigkeiten nicht mehr momentan in kalter Sodalösung auflösbar sind, sondern harzartige Massen darstellen, die nur allmählig, unter Regenerirung der ursprünglichen Säuren, in Lösung gehen. Aus diesem Grunde darf die Einwirkung von Acetylchlorid, wenn es zur Trennung von Säuren der Isocamphersäurereihe von denen der Camphersäurereihe benutzt wird, niemals unter Steigerung der Temperatur geschehen.

Die Darstellung des Anhydrides der l-Isocamphersäure wurde sowohl unter Anwendung von Essigsäureanhydrid wie von Acetylchlorid versucht. Die Versuchsbedingungen, wie auch die Ergebnisse, waren in beiden Fällen

ähnlich, weshalb ich hier nur die Einwirkung von Essigsäureanhydrid beschreibe.

5 g l-Isocamphersäure wurden mit 20 g Essigsäureanhydrid in einem Kolben mit angeschmolzenem Kühler während einer Stunde zum Kochen erhitzt. Die Lösung wurde nachher in einen Fractionirkolben gebracht und das überschüssige Essigsäureanhydrid im Oelbade bei 25 mm Druck abdestillirt. Das Bad wurde zuerst bei 130° gehalten und die Temperatur, nachdem keine Flüssigkeit nach etwa 3 Stunden mehr überging, während kurzer Zeit auf 150° gesteigert. Hierbei sublimirten einige wenige Nadeln von gewöhnlichem Camphersäureanhydrid in den Kolbenhals hinauf. Die rückständige, etwas gelblich gefärbte Masse stellt in der Wärme ein sehr dickflüssiges Fluidum dar, das beim Erkalten zu einem glasartigen, sehr spröden Harz, das schon bei Handwärme klebrich wird, erstarrt. Sie war in keiner Weise, auch nach Monatelangem Verweilen im Exsiccator, zum Krystallisiren zu bringen. Alle organischen Lösungsmittel, mit Ausnahme von Ligroin, worin das Product unlöslich, und Aether, worin es schwerlöslich ist, nehmen es sehr leicht auf, und lassen es beim Verdunsten als firnissartiger Überzug des Gefässes zurück.

In Sodalösung gebracht wird sie erst nach einiger Zeit, nachdem sie zuerst trübe geworden ist, gelöst, und die Lösung enthält l-Isocamphersäure. Eine sehr kleine Menge, die ihren Eigenschaften nach aus gewöhnlichem Camphersäureanhydrid besteht, bleibt hierbei immer ungelöst. Eine Analyse des ursprünglichen Reactionsproductes ergab Folgendes:

0,3096 g Substanz gaben 0,6663 g CO_2 und 0,2322 g H_2O;

Gefunden:

C	58,69 %
H	8,33 „

Auf ein einfaches Anhydrid $C_8H_{14}(CO)_2O$ der l-Isocamphersäure berechnet sich für C 65,94 %, für H 7,93 %, ein Doppelanhydrid mit Essigsäure $C_8H_{14}(CO.O.C_2H_3O)_2$ würde wieder $C = 59,15$ % und $H = 7,04$ % verlangen. Es liegt also keines von beiden vor.

Auch die Bestimmung des Molekulargewichtes bestätigte, was schon aus dem Äusseren des Productes hervorging, dass kein einfaches Anhydrid vorliegt. Sowohl durch die Gefriermethode, wobei Eisessig als Lösungsmittel angewandt wurde, wie durch die Siedemethode, mit Aether als Lösungsmittel, erhielt ich ein Molekulargewicht, das 700 überstieg, und zwar wurde nach der

ersten Metode die Zahl 741, nach der Zweiten die Zahl 722 erhalten. Diese Zahlen können doch keineswegs als genau betrachtet werden, da die Substanz wie erwähnt, etwas gewöhnliches Camphersäureanhydrid enthielt.

In den letztgenannten Körper lässt sich das Product nach kurzem Erhitzen in Reagenzglas bis auf etwa 250—300° leicht und vollständig verwandeln. Es entweichen kleine Mengen eines Oeles, das dem Geruch nach Essigsäureanhydrid darstellte, und der Rückstand erstarrt nach dem Erkalten zu einer harten Krystallmasse, die aus kochendem Weingeist umkrystallisirt, die Krystallform und den Schmelzpunkt 220—221° des l-Camphersäureanhydrides zeigt.

Woraus der Körper besteht, ist nach dem Ermittelten schwierig zu sagen. Soviel geht doch aus dem mitgetheilten Versuche hervor, dass *die l-Isocamphersäure,* unter der Einwirkung der erwähnten, anhydridbildenden Agenzien, *kein gewöhnliches, monomolekulares Anhydrid giebt.*

III. Die Bromanhydride der Camphersäuren.

l-Bromcamphersäureanhydrid.

Die Darstellungsmethode dieses Körpers, der durch Bromierung des rohen Chlorides der d-Camphersäure erhalten wurde, habe ich schon früher beschrieben [1]), weshalb weitere Angaben hierüber ausbleiben können. Auch betreffend der physicalischen Eigenschaften dieser schon längst bekannten Verbindung habe ich nichts hinzuzufügen. Nur betreffend ihres Drehungsvermögens und ihrer Löslichkeit sei Folgendes mitgetheilt.

Drehungsvermögen in Chloroformlösung:

$t = 17^0$
$l = 2$ dm
$p = 5{,}8512$
$D^{17}/_4 = 1{,}4882$
$\alpha_j = -9{,}4^0$ $[\alpha]_j = -21{,}1^0.$

Löslichkeit in Chloroform; die heissgesättigte Lösung wurde mehrere Tage bei 19^0 stehen gelassen.

1) 4,8968 g der Lösung enthielten 0,4001 g Substanz, die also in 4,4967 g Chloroform enthalten waren. 100 g des Lösungsmittels lösen demnach 8,89 g l-Bromcamphersäureanhydrid.

2) Temperatur 16^0. 9,0739 g Lösung enthielten 0,7087 g l-Bromcamphersäureanhydrid, die also in 8,3652 g des Lösungsmittels vorhanden waren. 100 g Chloroform lösen 8,47 g der Substanz.

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1893*, 1639; *1894*, 3504.

Das l-Bromcamphersäureanhydrid wurde weiter in erheblicher Menge bei der Bromierung der l-Isocamphersäure (siehe unter Brom-l-Isocamphersäure weiter unten) erhalten.

Versuche zur Umlagerung des l-Bromcamphersäureanhydrides.

Hierzu wandte ich zuerst Eisessig und Salzsäure, Eisessig allein, sowie auch Eisessig, der mit Bromwasserstoff gesättigt war, an, und erhitzte auf 160—200°. In allen Fällen war Zersetzung unter Verschmierung des Rohrinhalts eingetreten. Schliesslich wurde Kochen mit Chinolin, sowie trocknes Erhitzen der Substanz angewandt.

Beim zweistündigen *Kochen mit Chinolin* tritt zwar schon eine beginnende Zersetzung ein, doch lässt sich die Substanz zum grössten Theil zurückgewinnen. Nach dem Erkalten der Chinolinlösung wurde die Masse mit Salzsäure in Überschuss versetzt, filtrirt, und die bräunlich gefärbten Krystalle zweimal aus Eisessig unter Zusatz von Thierkohle umkrystallisirt. Der Schmelzpunkt wurde wie vorher zu 216° gefunden.

Die Bestimmung des Drehungsvermögens in Chloroform ergab bei 17,8° und für $p = 4{,}782$ und $l = 2$ dm

$$[\alpha]_j = -21{,}1^0.$$

Um die Veränderung des Bromcamphersäureanhydrids beim *trocknem Erhitzen* zu studiren, wurden 5 g desselben in einem weiten Reagenzrohr während 3 Stunden im Oelbade etwas über den Schmelzpunkt erhitzt. Hierbei wurde gefunden, dass das Bromanhydrid ohne Zersetzung sublimirbar ist; die auf die kalten Wände des Rohres sublimirten Theile wurden öfterst mit einem Glasstab zu der geschmolzenen Masse zurückgegeben. Die Masse färbte sich etwas gelblichbraun, erstarrte aber beim Erkalten zu einem festen Krystallkuchen; auch sonst zeigte sich nur eine minimale Zersetzung der Substanz. Nach zweimaligen Umkrystallisiren, das erste Mal unter Zusatz von Thierkohle, wurden die bei 216° schmelzenden Krystalle in Chloroformlösung polarisirt.

Bei 18° und für $p = 4{,}567$ und $l = 2$ dm erhielt ich:

$$[\alpha]_j = -21{,}2^0.$$

Aus den erwähnten Versuchen geht hervor, dass das l-Bromcamphersäureanhydrid weder in gelöstem, noch in geschmolzenem Zustande bei höherer Temperatur eine merkliche Veränderung erleidet.

Reduction des l-Bromcamphersäureanhydrids.

Dieser Versuch wurde ursprünglich vorgenommen, um zu ermitteln, ob der Körper ein einfaches Derivat der d-Camphersäure darstellte und somit in diese zurückverwandelbar wäre. Der Versuch war schon ausgeführt, als Rupe und Maull [1]) dieselbe Reduction beschrieben. Die Resultate der genannten Autoren, — sie erhielten hierbei nur gewöhnliche Camphersäure — weichen nicht unwesentlich von den Meinigen, die nachstehend beschrieben werden, ab.

Als Reductionsmittel wandte ich, wie Rupe und Maull, Eisessig und Zinkstaub an.

23 g l-Bromcamphersäureanhydrid wurden in die nöthige Menge kochenden Eisessigs eingeführt und Zinkstaub portionenweise eingetragen. Die Reaction trat freiwillig ein, nur gegen Ende derselben wurde sie durch Erhitzung unterstützt. Sie war nach etwa einer Stunde zu Ende, was daraus hervorging, dass beim Reiben einer Probe auf dem Uhrglase nichts mehr auskrystallisirte, sowie daraus, dass die Krystallabscheidung, die beim Versetzen der Lösung mit dem doppelten Volumen Wasser enstand, sich beim Erhitzen der Flüssigkeit vollständig auflöste und nach dem Erkalten in glänzenden Nadeln (Camphersäureanhydrid) auskrystallisirte.

Nach beendigter Einwirkung wurde die heisse Eisessiglösung zu etwa 3 Volumen erwärmten Wassers hinzufiltrirt, wobei eine voluminöse Fällung ausfiel, der Zinkstaub wurde zweimal mit wenig Wasser ausgekocht und die Lösungen zu der Flüssigkeit hinzugegeben. Nach 16-stündigem Stehen wurde die Lösung filtrirt, und der Niederschlag aus Alcohol umkrystallisirt. Aus der Lösung schieden sich beim Erkalten die bekannten, seidenglänzenden gestreiften Nadeln des Anhydrides der d-Camphersäure, und zwar zu einer Menge von 3,6 g, aus. Der Schmelzpunkt lag bei 220°. Der Körper wurde durch Kochen mit Wasser in die zugehörige Säure verwandelt, die bei 185° schmolz und in abs. Alcohol folgendes Drehungsvermögen zeigte:

---

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1893*, 1200.

$t = 14^0$
$l = 1$ dm
$p = 10{,}0264$
$D\,^{14}/_4 = 0{,}82492$
$\alpha j = + 10{,}5^0$ $[\alpha]j = + 49{,}6^0.$

Das Filtrat, das die Säuren, theilweise als Zinksalze, enthielt, wurde mit Schwefelwasserstoff vom Zink befreit, das Zinksulfid abfiltrirt, und die farblose Lösung verdunstet. Es blieb eine Säure zurück, die in der Wärme dickflüssig war und beim Erkalten harzig erstarrte. Sie wurde in wenig 10 % Sodalösung aufgelöst, die Lösung von kleinen Mengen fester Körper (Zinkcarbonat?) abfiltrirt und mit Salzsäure versetzt. Es schied sich ein bald erstarrendes Oel ab, das stark linksdrehend war; zur Bestimmung des Drehungsvermögens wurde der nunmehr feste Körper getrocknet und in absolutem Alcohol auf gelöst:

$t = 14^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}835$
$D\,^{14}/_4 = 0{,}8253$
$\alpha j = - 3{,}9^0$ $[\alpha]j = - 18{,}8^0.$

Diese Säure, wovon in Allem 6,5 g entstand, besteht grösstentheils aus l-Isocamphersäure, die daraus schon nach paarmaligem Umkrystallisiren aus verdünntem Alcohol in ganz reinem Zustande erhalten wird. Aus dieser Mischung erhielt ich die Säure, schon bevor ich die Trennung derselben von d-Camphersäure mittelst Acetylchlorid kennen lernte, zum ersten Male rein.

Um die zweite in dem rohen Product vorhandene Säure zu isoliren und zugleich meine Resultate, nach dem Erscheinen der Mittheilung von RUPE und MAULL (siehe oben), zu controlliren, wurden abermals 23 g l-Bromcamphersäureanhydrid der Reduction in derselben Weise unterzogen. Ich erhielt wieder 6,5 g des rohen Säuregemisches. 6,0 g desselben wurden nun, wie gewöhnlich, mit Acetylchlorid behandelt, und die Producte, nach Verdunsten der Lösung bei gewöhnlicher Temperatur, mittelst Sodalösung getrennt. Es blieb eine kleinere Menge gewöhnliches Camphersäureanhydrid, das nach Umkrystallisiren aus Alcohol 1,1 g wog, ungelöst; aus der Lösung erhielt ich andererseits (nach Umkrystallisiren aus Alcohol-haltigem Wasser) 3,4 g l-Isocamphersäure vom Schmelzpunkt 171—172°.

Dass hier in der That gewöhnliches Camphersäureanhydrid vorlag, wurde durch die folgende Analyse bestätigt:

0,1275 g Substanz gaben 0,3098 g CO_2 und 0,0839 g H_2O:

Berechnet für $C_{10}H_{14}O_3$:		Gefunden:
C	65,94 %	66,27 %
H	7,69 „	7,31 „

Der Schmelzpunkt des Anhydrides lag bei 220—221°. Es wurde durch Kochen mit Wasser in die zugehörige Säure verwandelt, die nach Umkrystallisiren bei 185° schmolz. Seine 10-procentige Lösung in Alcohol zeigte in 1 dm-Rohr bei 18° den Drehungswinkel (Wentzke-Soleil) + 10,5°. Es lag demnach d-Camphersäure vor.

Die erhaltene Isosäure wurde ebenfalls analysirt und somit ihre Zusammensetzung ermittelt; die Analyse ergab Folgendes:

0,1791 g Substanz gaben 0,3936 g CO_2 und 0,1247 g H_2O:

Berechnet für $C_{10}H_{16}O_4$:		Gefunden:
C	60,0 %	59,94 %
H	8,0 „	7,74 „

Bei der Bestimmung des Drehungsvermögens der Säure wurden folgende Zahlen erhalten:

$t = 14^0$

$l = 1$ dm

$p = 10,06$

$D^{14}/_4 = 0,82556$

$\alpha_j = -10,4^0$ $\qquad [\alpha]_j = -48,9^0.$

Es liegt also l-Isocamphersäure vor.

Die Versuche zeigen, dass, bei Reduction des l-Bromcamphersäureanhydrids mit Zinkstaub und Eisessig, eine Umlagerung in die cistrans-Form zum Theil stattfindet, indem 41,1 % von dem Reactionsproduct aus l-Isocamphersäure besteht. In der Bromirung der d-Camphersäure und der Reduction des bromirten Derivates liegt also, wie bei mehreren anderen Stellungs-isomeren Säuren, eine Methode vor, die die Verwandlung der ursprünglichen Substanz in ihr geometrisches Isomere gestattet.

Es ist noch an dieser Stelle zu erwähnen, dass, wenn Zinkfeile statt Zinkstaub, und wasserfreier Eisessig statt des gewöhnlichen verwendet werden, die Menge des entstehenden Camphersäureanhydrides erheblich steigt, während die Ausbeute an l-Isocamphersäure vermindert wird; doch wurden die diesbezüglichen Versuche nicht quantitativ verfolgt. Es scheint mir hieraus hervorzugehen, dass die Gegenwart von Wasser, das während der Reaction aus dem Zinoxyd-haltigen Zinkstaub gebildet wird, die Umlagerung begünstigt.

Die Spaltung des l-Bromcamphersäureanhydrids durch Sodalösung, durch Kaliumhydrat, sowie durch Wasser.

In zwei früheren Publicationen[1]) habe ich schon die Einwirkung der genannten Agenzien auf l-Bromcamphersäureanhydrid kurz beschrieben. Es zeigte sich, dass eine ungesättigte, einbasische Säure entstand, die als Lauronolsäure erkannt wurde. Hier mögen nur die bei der Spaltung angewandten Mengen des Materials und des erhaltenen Reductionsproductes, sowie die Ergebnisse der Untersuchung der ungesättigten Säure, woraus ihre Identität mit Lauronolsäure hervorging, nachträglich angeführt werden.

Angewandte Menge des Bromanhydrides.	Spaltendes Agenz.	Einwirkungszeit.	Die Menge des Agenzes.	Erhaltene Menge Lauronolsäure: 1) in Gewicht.	2) in Procent.
10 g	Wasser	6 Stunden	100 g	0,1 g	1,7 %
30 g	Kaliumhydrat	1½ „	2 Mol.	3,0 g	16,9 „
15 g	Soda	4 „	½ Mol.	1,1 g	12,4 „
10 g	„	4 „	½ Mol.	0,7 g	12,0 „
15 g	„	2½ „	1 Mol.	1,5 g	16,9 „
90 g	„	4½ „	1 Mol.	9,0 g	16,9 „

Zur Charakterisierung der ungesättigten Säure wurden zuerst die Calcium- und Silbersalze dargestellt und analysirt.

Calciumsalz. Die rohe Säure, die kein Campholacton enthielt, wurde in der 200-fachen Menge Wasser gelöst, mit überschüssigem Calciumcarbonat gekocht, und die filtrirte, neutral reagirende Lösung auf dem Wasserbade verdunstet, bis das Salz in glänzenden Blättern abgeschieden wurde. Unter dem Microskope zeigten sie eine „dendritische Verzweigung", was nach WORINGER, dem

[1]) Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. *1894*, 2112; 3504.

Entdecker der Lauronolsäure, diese Säure speciell charakterisirt [1]). Die Exsiccator-trocknen Krystalle wurden analysirt:

1) 0,2026 g Substanz gaben nach Erhitzen auf 130° bis zu constantem Gewicht 0,0290 g H_2O; das rückständige wasserfreie Salz gab nach dem Abrauchen mit Schwefelsäure 0,0510 g $CaSO_4$.

2) 0,2236 g Substanz gaben beim Erhitzen auf 128—142° 0,0328 g H_2O ab; aus dem Rückstande wurden 0,0817 g $CaSO_4$ erhalten.

3) 0,1935 g Substanz gaben beim Erhitzen auf 127—137° 0,0240 g H_2O ab; aus dem Rückstande wurden 0,0285 CaO erhalten [2]).

Berechnet für		Gefunden:		
$(C_8H_{13}.COO)_2Ca + 3H_2O$:		1)	2)	3)
H_2O	13,5 %	14,33 %	14,62 %	12,40 %
Ca	10,0 „	10,07 „	10,75 „	10,52 „

Silbersalz. Dieses wurde durch Ausfällen des gelösten Caliumsalzes mit Silbernitrat als weisse, flockige Fällung erhalten. Seine Analyse ergab Folgendes:

1) 0,2001 g Substanz gaben 0,0825 g Ag;
2) 0,1997 g „ „ 0,3040 g CO_2 und 0,0847 g H_2O.

Berechnet für		Gefunden:	
$C_9H_{13}O_2Ag$:		1)	2)
C	41,37 %	—	41,51 %
H	4,98 „	—	4,71 „
Ag	41,37 „	41,22 %	—

Die Eigenschaften und die Zusammensetzung der Calcium- und Silbersalze stimmen mit den hierüber gemachten Angaben von Woringer (l. c.) überein.

Zur weiterer Identificirung der Säure wurde das Amid dargestellt, und die Einwirkung von Brom auf derselben untersucht.

Amid $C_8H_{13}.CONH_2$. Zur Darstellung dieses Derivates wurden 4 g der rohen, vermittelst Wasserdampfdestillation und Aetherextraction erhaltenen, farblosen Säure, die von Campholacton frei war [3]), mit der berechneten Menge

[1]) Inaug. Dissertation, Strassburg. 1883. S. 18.

[2]) Die Analysen 2) und 3) sind von Hrn Stud. P. Z. Collan ausgeführt. Bei den Analysen 1) und 2) war der Rückstand nach dem Erhitzen etwas gefärbt, daher das Plus an Krystallwasser.

[3]) Nach der Einwirkung von Sodalösung wurde die Lösung nur mit etwa der Hälfte der theoretischen Menge Schwefelsäure angesäuert, und Wasserdampf eingeleitet. Da keine freie Mineralsäure vorhanden war, fand hierbei keine Umwandlung der Lauronolsäure in Campholacton, die widrigenfalls immer auftritt, statt.

Phosphorpentachlorid allmählig unter Eiskühlung versetzt. Nachdem keine Einwirkung mehr zu beobachten war, wurde gelinde erwärmt, um die letzten Körnchen des Phosphorchlorids in Reaction zu bringen, und die erhaltene Mischung von Lauronolsäurechlorid und Phosphoroxychlorid zu etwa 80 cm^3 mit Eis und Kochsalz abgekühlter, stärkster Ammoniakflüssigkeit tropfenweise gegeben. Jeder Tropfen verwandelte sich allmählich in eine feste Masse, und beim Stehen der Flüssigkeit nach beendigter Einwirkung schieden sich noch Krystalle des Amides ab. Die gelblich gefärbte Flüssigkeit wurde mit Aether ausgeschüttelt, die nach Verdunsten des Aethers erhaltene Krystallmasse in kochendem Wasser aufgelöst und die Lösung zur Entfernung kleiner Mengen mitgebildeten Nitriles in offenem Gefässe gekocht, bis der Nitrilgeruch nicht mehr warzunehmen war. Beim Erkalten, event. nach Einengen der Lösung, schied sich das Amid in glänzenden Blättern ab; eine weitere Menge erhielt man aus der Mutterlauge durch weiteres Verdunsten. Es würde zweimal aus Wasser umkrystallisirt.

Das Amid stellt glasglänzende Blätter dar, die beim Verweilen im Exsiccator, wegen Abgabe von Krystallwasser, undurchsichtig werden. Erst nach längerem Stehen im Vacuumexsiccator sind sie völlig wasserfrei und schmelzen dann bei 71—72°; in nicht wasserfreiem Zustande schmilzt das Amid immer bei bedeutend niedriger Temperatur. Es nimmt trocken energisch Chlorwasserstoff auf und zerfliesst dabei zu einem oeligen Salz, welches, beim Übergiessen mit Wasser, das Amid in krystallisirtem Zustande zurückliefert.

Die Analyse ergab Folgendes:

0,2033 g Substanz gaben 15,7 cm^3 N von 18,5° Temp. und 764 mm Druck.

Berechnet für $C_8H_{13}.CONH_2$:	Gefunden:
$N = 9{,}15$ %	8,86 %

Einwirkung von Brom. Da Vorversuche, sowohl die v. BAEYER'sche Kaliumpermanganatprobe, wie auch eine Probe mit Brom, gezeigt hatten, dass die aus l-Bromcamhersäureanhydrid erhaltene Säure ungesättigt war, wurde die Addition von Brom mit etwas grösseren Mengen ausgeführt.

3 g der Säure wurden in wenig Chloroform aufgelöst, und eine Lösung von Brom in demselben Lösungsmittel unter Eiskühlung und fleissigem Schütteln zugetröpfelt. Es trat momentan Entfärbung ein, bis die berechnete Menge (3,2 g) Brom hinzugeben war; ein Überschüss verursachte nunmehr eine Färbung der Flüssigkeit. Schon während der Bromierung treten grosse Mengen von Bromwasserstoff auf. Nachher verdunstete man das Chloroform

in Vacuum, wobei eine butterähnliche Substanz zurückblieb. Diese wurde mit Sodalösung behandelt, und die nunmehr fester gewordene Masse in Aether aufgenommen und weiter mit der Sodalösung tüchtig umgeschüttelt. Nach Verdunsten des Aethers blieb viel fester Substanz zurück. Zur Befreiung derselben von Aether, Feuchtigkeit und einem zugleich entstandenen Oele von scharfem, die Schleimhäute intensiv angreifenden Geruche, wurde sie auf Porzellan gestrichen und nachher aus warmen Eisessig, unter Ausspritzen mit Wasser, zweimal umkrystallisirt. Sie scheidet sich hieraus in Salmiak-ähnlichen Sternchen oder, bei langsamen Verdunsten resp. längerem Stehenlassen, in dicken Säulen mit stumpfer, pyramidaler Zuspitzung aus. Der Schmelzpunkt liegt bei der reinen Substanz bei 187^0; beim Verarbeiten kleinerer Mengen wird er oft zu 185^0 und niedriger gefunden. Der Körper besitzt einen intensiven, campherähnlichen Geruch und ist mit Wasserdämpfen leicht flüchtig, sowie sublimirbar. In Alcohol, Aether, Benzol, Ligroin, Chloroform ist er leicht, in Wasser kaum löslich.

Beim Arbeiten mit feuchten Materialien, und besonders, wenn während der Bromierung nicht gut gekühlt wird, verschlechtert sich die Ausbeute, und das Product nimmt beim Liegen an der Luft eine tiefgrüne Färbung an. Es könnte dies als charakteristische Reaction auf Lauronolsäure benutzt werden. Man löst zu dem Zweck ein Paar Tropfen der Säure in wenig Chloroform, setzt eine Bromlösung hinzu und verdunstet das Lösungsmittel. Der Rückstand färbt sich binnen Kurzem tiefgrün, was besonders gut beim Streichen desselben auf eine Thonplatte zu beobachten ist.

Auch unter Abschluss von Licht und beim Arbeiten mit sorgfältig getrockneten Materialien und unter guter Kühlung, lässt sich die Bromwasserstoffabspaltung nicht vermeiden. Dieser Umstand giebt schon einen Fingerzeig betreffend der Natur des entstehenden Productes, in dem er auf eine Lactonbildung hindeutet. Die Eigenschaften desselben, nämlich die Unlöslichkeit in Soda und Alkalien, lassen weiter auf seine Lactonnatur schliessen. Ein Lacton könnte nach den folgenden Formeln aus der Säure entstehen:

$$C_8H_{13} . COOH + Br_2 = C_8H_{13}Br_2 . COOH,$$

$$C_8H_{13}Br_2 . COOH = HBr + C_8H_{13}Br . CO.$$

$$\text{———}O$$

Die folgenden Brombestimmungen zeigen in der That, dass ein Körper von der Zusammensetzung $C_9H_{13}O_2Br$ vorliegt:

1) 0,1340 g Substanz gaben 0,1081 g *AgBr*;
2) 0,2250 g „ „ 0,1802 g „ [1]);

Berechnet für $C_9H_{13}O_2Br$:	Gefunden: 1)	2)
Br 34,34 %	34,30 %	34,08 %.

Das Bromlacton löst sich beim Kochen mit Alkalien und Soda langsam auf, wobei es in eine bromfreie Säure verwandelt wird.

Bei der Destillation erleidet die aus Bromcamphersäureanhydrid erhaltene ungesättigte Säure eine Veränderung. Sie distillirte bei 227—229°, wobei sich das Destillat grünlich färbte; die hierzu verwendete Säure war etwas Bromwasserstoff-haltig. Das Destillat liess bei der Behandlung mit Soda, die unveränderte Säure auflöste, einen indifferenten, festen Körper, der einen angenehmen Mentholgeruch besass und indifferenter Natur war, zurück. In wenig warmen Sprit aufgelöst und mit Wasser ausgespritzt, krystallisirt er schön in sechsseitigen, glänzenden Blättern, die den Schmelzpunkt 48—49° zeigten. Offenbar liegt hier das Campholacton, welches WORINGER in verschiedener Weise durch Umlagerung der Lauronolsäure erhalten hat [2]), vor.

Das Gesammtresultat der Untersuchung der ungesättigten Säure lässt erkennen, dass in ihr die gewöhnliche Lauronolsäure vorliegt; betreffend des Amides und des bei der Bromierung entstehenden Bromlactons sei auf die diesbezügliche Untersuchung der aus Camphansäure erhaltenen Lauronolsäure, die später angeführt wird, hingewiesen.

Sonst entsteht bei der Zersetzung des Bromcamphersäureanhydrids Camphansäure, die leicht rein erhalten werden kann nach der Methode von REYHER [3]); sie zeigt den Schmelzpunkt 200—201° und das normale Drehungsvermögen der l-Camphansäure (siehe weiterhin unter diese). Dagegen konnte ich die Isocamphansäure REYHERS (l. c.) nicht auffinden, was wohl auf die Art der Zersetzung des Bromcamphersäureanhydrids beruht.

---

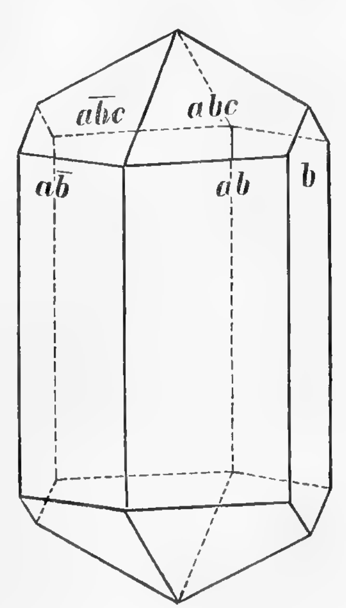
[1]) Die Analyse 2) wurde von Hrn Stud. P. Z. COLLAN ausgeführt.
[2]) LEO WORINGER. Inaug. Dissert. Strassburg 1883. S. 24.
[3]) RUD. REYHER. Inaug. Dissert. Leipzig 1891. S. 29.

d-Bromcamphersäureanhydrid.

Dieser mit den altbekannten Bromcamphersäureanhydrid optisch isomere Körper wurde aus l-Camphersäure in derselben Weise, wie jenes aus d-Camphersäure, wie folgt, erhalten.

5 g l-Camphersäure wurden mit 11 g Phosphorpentachlorid in kochendem Wasserbade in das Chlorid verwandelt und etwas mehr als die berechnete Menge (5 g) Brom zugegeben. Nachher wurde auf dem Wasserbade unter Rückfluss erwärmt, bis die Bromwasserstoffentwickelung nachliess, wozu etwa 2 Stunden nöthig waren. Die Flüssigkeit wurde in Eiswasser gegossen, etwas schweflige Säure zugegeben, und, nach der Zersetzung des Phosphoroxychlorides, das rückständige Oel in Aether aufgenommen; die ætherische Lösung liess ich später einige Tage über Wasser stehen. Hierbei schieden sich Krystalle des Bromanhydrides in einer Ausbeute von 4,9 g ab, die, vom Aether abfiltrirt und mit frischem Aether nachgewaschen, aus Chloroform oder Eisessig umkrystallisirt wurden. In beiden Fällen entstanden Krystalle, die von denen des l-Bromcamphersäureanhydrids äusserlich nicht zu unterscheiden waren. Der Schmelzpunkt lag bei 216°.

Besonders schön krystallisirt der Körper bei längerem Stehen seiner gesättigten Lösung in Chloroform bei gewöhnlicher Temperatur, wobei körnige, stark lichtbrechende Individuen ausgebildet werden, deren Länge bis auf 1½ cm steigt. Herr Professor F. J. Wiik hatte die Güte, die Krystalle zu messen, wofür ich ihm an diese Stelle meinen Dank bezeugen möchte. Derselbe konnte die völlige Identität der Krystalle mit denen des l-Bromcamphersäureanhydrids bestätigen, wie aus dem Folgenden zu entnehmen ist (die nebenanstehende Figur zeigt die Form der Krystalle):



„Bromcamphersäureanhydrid (aus l- und d-Camphersäure)[1].

Die Krystalle sind rhombisch, scheinbar holoëdrisch: ∞P, P, $\infty \breve{P} \infty$, oP.

$$\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}8880 : 1 : 0{,}5775.$$

	Gefunden für d-Bromcamphersäureanhydrid:	Gefunden für l-Bromcamphersäureanhydrid:	Berechnet:
$ab : ab =$	*83° 12′ 30″	83° 30′	—
$ab : abc =$	48° 59′	48° 56′	—
„ $ab\bar{c} =$	49° 2′	49° 19′	—
$abc : abc =$	*51° 40′	51° 42′	51° 40′
„ „ $=$	51° 47′	—	—
$abc : \bar{a}bc =$	58° 46′	—	58° 47′
$\bar{a}bc : \bar{a}bc =$	58° 49′ 30″	—	—“

Auch die übrigen Eigenschaften des d-Bromcamphersäureanhydrids stimmen mit denen seines optischen Isomeren überein. Zunächst mag doch die folgende Bestimmung seines Bromgehaltes angeführt werden:

0,2459 g Substanz gaben 0,1765 g $AgBr$;

Berechnet für $C_{10}H_{13}BrO_3$:	Gefunden:
Br 30,65 %	30,54 %.

Das *Drehungsvermögen* wurde in Chloroformlösung bestimmt:

$t = 20^0$
$l = 2$ dm
$p = 5{,}7915$
$D^{20}/_4 = 1{,}4796$
$\alpha j = +9{,}5^0$ $\qquad [\alpha]j = +21{,}6^0$.

Die *Löslichkeit* des d-Bromcamphersäureanhydrides wurde in Chloroform bestimmt. 2,9763 g der heissgesättigten Lösung, die 48 Stunden bei 18,5° gestanden hatte, enthielten 0,2435 g der Substanz. 100 g Chloroform lösen also bei 18,5° 8,91 g d-Bromcamphersäureanhydrid.

[1]) Das l-Bromcamphersäureanhydrid wurde auch früher von Grünling (Inaug. Dissert. von Leo Woringer, Strassburg 1883. S. 8) sowie auf meinem Verlangen von Stud. Wilkman (Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1893*, 1639) gemessen.

Beim Kochen mit Kaliumacetat und Eisessig geht der Körper in d-Camphansäure (siehe hierüber weiter unten) über.

i-Bromcamphersäureanhydrid.

Die racemische Verbindung der beiden Bromcamphersäureanhydride wurde durch Zusammenmischen zweier Chloroformlösungen, die gleich grosse Mengen der Componenten enthielten, dargestellt. Sie krystallisirt aus Chloroform in körnigen Krystallen, die bedeutend kleiner sind, wie die der activen Bromanhydride. Ich verdanke Herrn Prof. F. J. Wiik auch die folgende Bestimmung der Krystalle:

„Racemisches Bromcamphersäureanhydrid.

Die Krystalle sind kleiner wie die der activen Bromcamphersäureanhydride; sie sind weniger gut ausgebildet, mit vicinalen Flächen und deshalb nur approximativ bestimmbar; von den Krystallen der Componenten sind sie nur wenig, aber doch *deutlich verschieden.*

Krystallsystem: Rhombisch; ∞P. P.

$$\breve{a} : \bar{b} : \acute{c} = 0{,}8725 : 1 : 0{,}5799.$$

	Gefunden:	Berechnet:
$ab : a\bar{b}$	$= {}^*82^0\ 12'\ 30''$	—
$ab : abc$	$= 48^0\ 35'$	—
$abc : a\bar{b}c$	$= 50^0\ 52'$	$51^0\ 39'$
$abc : \bar{a}bc$	$= 60^0\ \ 4'$	$59^0\ 48'$ “

Der Schmelzpunkt liegt, wie bei den activen Componenten, bei 216^0. In Chloroformlösung zeigte sich der Körper *inactiv.*

$$t = 20^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 3{,}974$$
$$\alpha_j = -0{,}0^0$$

Die Löslichkeit ist überhaupt kleiner wie die der Componenten. Bestimmt wurde sie in Chloroform und in absolutem Alcohol:

in Chloroform: 4,5893 g der heissgesättigten Lösung, die zwei Tage bei 20^0 gestanden hatte, enthielten 0,2695 g Substanz, die somit in 4,3198 g des

Lösungsmittels enthalten waren. 100 g Chloroform lösen 6,24 g i-Bromcamphersäureanhydrid;

in absolutem Alcohol: 5,8173 g der ebenso bereiteten Lösung enthielten 0,0211 g Substanz, die also in 5,7962 g Lösungsmittel vorhanden waren; 100 g absoluter Alcohol lösen 0,363 g i-Bromcamphersäureanhydrid.

Wie das i-Camphersäureanhydrid stellt das bromirte Derivat desselben nach Obigem *eine wahre racemische Verbindung* dar.

Beim Kochen mit Kaliumacetat in Eisessiglösung geht das i-Bromcamphersäureanhydrid in die entsprechende inactive Camphansäure (siehe weiter unten über diese) über.

Anhang: Brom-l-isocamphersäure.

Es hatte ein gewisses Interesse, besonders nachdem das chemische Verhalten des l-Bromcamphersäureanhydrids, wie oben dargelegt, eingehender ermittelt worden war, die Einwirkung von Brom auf einer der geometrisch isomeren Säuren der Isocamphersäurereihe zu studiren; als Object wählte ich aus leicht einzusehenden Gründen die l-Isocamphersäure.

Bei ihrer Bromierung stiess ich, was die Darstellung eines sich daraus direct abgeleiteten Derivates betrifft, auf unerwartete Schwierigkeiten. Wie schon in dem theoretischen Theil angeführt wurde, wird hierbei eine Umlagerung herbeigeführt, unter Bildung des gewöhnlichen, zu der cis-Reihe angehörigen l-Bromcamphersäureanhydrids. Nach der Bromisocamphersäure suchte ich eine Zeit lang vergebens, bis ich sie einmal durch einen Zufall auffand; nachdem ihre Eigenschaften somit bekannt wurden, gelang es mir schliesslich auch eine Darstellungsweise für dieselbe auszufinden, wodurch sie, allerdings auch noch jetzt in kleiner Ausbeute, erhalten werden kann.

Äusserlich verläuft die Bromierung des l-Isocamphersäurechlorides, oder vielmehr, der Mischung von Säurechlorid und Phosphoroxychlorid, die mittelst Phosphorpentachlorid aus der Säure entsteht, der Einwirkung von Brom auf der gleichen Mischung, die aus d-Camphersäure erhalten wird, durchaus ähnlich. Die Bromierung (angewandt: 2 At. Brom) wurde auf schwach siedendem Wasserbade unter Rückfluss vorgenommen; nach ein Paar Stunden war die Einwirkung zu Ende, und das Product wurde, wie bei l-Bromcamphersäureanhydrid, weiter verarbeitet. Die Mischung vom bromierten Chlorid und Phosphoroxychlorid wurde zur Zerstörung des Letztgenannen mit kaltem Wasser behandelt, das rückständige Oel in Aether aufgenommen und über Wasser

bei gewöhnlicher Temperatur während einiger Tage stehen gelassen. Hierbei schieden sich, wie früher, grosse, wasserhelle Krystalle eines indifferenten Körpers aus, der, aus Eisessig oder Chloroform umkrystallisirt, den Schmelzpunkt 216° des l-Bromcamphersäureanhydrids zeigte. Eine Bestimmung des Drehungsvermögens bestätigte die Identität:

$$t = 19^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 5{,}8072$$
$$D^{19}/_4 = 1{,}48511$$
$$\alpha_j = -9{,}5^0 \qquad [\alpha]_j = -21{,}5^0.$$

Bei einem Versuche wurden aus 5 g l-Isocamphersäure in dieser Weise 4,6 g des Bromcamphersäureanhydrids erhalten, was einer Ausbeute von etwa 70 %, die sich den besten, von d-Camphersäure erhaltenen Ausbeuten nähern, entspricht.

Die vom Bromcamphersäureanhydrid abfiltrirte ætherische Mutterlauge liess, ebenso wie die beim Bromieren der d-Camphersäure erhaltene, beim Verdunsten einen oeligen Rückstand zurück, der sich nicht völlig in Soda auflöste und, auch während längerer Zeit mit Wasser in Berührung gelassen, schmierig blieb. Hieraus wurde geschlossen, dass die Umlagerung eine vollständige gewesen war, und dass die Bromierung einen in allen Details ähnlichen Verlauf nimmt, wie bei der d-Camphersäure. Ich glaubte, dass eine Bromisocamphersäure unter den genannten Bedingungen überhaupt nicht entsteht.

Die Bromierung wurde nun auch nach dem von Reyher mit d-Camphersäure nach der Hell-Volhard'schen Methode ausgearbeiteten Verfahren [1]) vorgenommen. Hierdurch wurde aber auch l-Bromcamphersäureanhydrid, obwohl in geringerer Ausbeute, erhalten, und die oeligen Nebenproducte hatten eine dunkle Färbung und eine schmierige Consistenz. Aus ihnen konnte auch keine bromirte Säure erhalten wurden.

Zufälligerweise hatte ich bei einem der vorangehenden Versuche, wobei die Bromierung bei sehr niedriger Wasserbadtemperatur vorgenommen wurde, die oeligen Nebenproducte mit viel Wasser einige Tage bei Zimmertemperatur stehen gelassen, und nachher die farblose Lösung getrennt; sie blieb, bei Seite gestellt, der freiwilligen Verdunstung überlassen. Hierbei hatten sich mehrere cm lange, prismatische Nadeln einer aufgelösten Substanz abgeschieden. Beim

[1]) Rud. Reyher. Inaug. Dissert. Leipzig 1891. S. 25.

Liegen an der Luft wurden die Krystalle trübe und schmolzen nachher über 190°. Da die Substanz eine Säure darstellte und der Camphansäure in den genannten Eigenschaften verwechselnd ähnlich war, glaubte ich dass dieser Körper, entstanden durch die Einwirkung von Wasser auf rückständiges bromirtes Chlorid, vorlag. Ein Versuch, ihn durch Auflösen in Soda und nachheriges Ausfällen zu reinigen, lehrte indess, dass diese Behauptung falsch war, und machte es viel wahrscheinlicher, dass der Körper die gesuchte Bromisocamphersäure darstellte. Beim Ansäuern der Lösung in Soda fiel nämlich nicht die ursprüngliche Substanz wieder aus, sondern eine oelige Säure, die den Geruch der Lauronolsäure besass. Das Filtrat zeigte sich ferner bromhaltig, was durch eine qvalitative Probe an der trocknen Substanz bestätigt wurde. Zur Reinigung wurde sie nunmehr aus kochendem Benzol umkrystallisirt, wobei wasserhelle, grosse Krystallplatten erhalten wurden, die bei 196° schmolzen. Eine Brombestimmung gab folgendes Resultat:

0,1023 g Substanz gaben 0,0615 $AgBr$;

Berechnet für $C_{10}H_{15}BrO_4$:	Gefunden:
Br 28,67 %	25,58 %.

Hieraus schloss ich, dass die Substanz noch eine bromfreie Verunreinigung enthielt; zu einer weiteren Reinigung reichte die Menge nicht aus. Später hat sich aber herausgestellt, das die aus Benzol umkrystallisirte Brom-l-isocamphersäure $^1/_2$ Mol. Krystallbenzol enthält; es berechnet sich für $C_{10}H_{15}BrO_4 + {}^1/_2\, C_6H_6$ $Br = 25{,}16$ %, womit das Resultat der obigen Analyse fast vollkommen übereinstimmt.

Hiernach schien der Weg zur Erhaltung des gesuchten Körpers angezeigt. Allein, viele nachher angestellten Versuche gaben wieder ein wenig befriedigendes Resultat, indem nur kleine Mengen des Körpers und dazu in ziemlich unreinem Zustande erhalten wurden. Die Ursache war meistens darin zu suchen, dass ich warmes Wasser zur schnellerer Isolierung des Productes verwendete; es zeigte sich später das die Brom-l-isocamphersäure dadurch zersetzt wird. Aber auch bei Anwendung von kaltem Wasser war das Product oft verunreinigt oder trat in ganz minimaler Menge auf. Es beruht dies darauf, dass das Chlorid der Brom-l-isocamphersäure, im Gegensatz zu den Chloriden der cis-Camphersäuren, von kaltem Wassen äusserst langsam angegriffen wird. In jedem Falle konnte ich mich aber durch die Probe mit Natriumcarbonat überzeugen, dass die bromirte l-Isocamphersäure thatsächlich, obwohl

nur in kleiner Menge, entstanden war, da die Bildung von Lauronolsäure schon bei gewöhnlicher Temperatur immer auftrat.

Als ich die oeligen Nebenproducte bei der Darstellung des l-Bromcamphersäureanhydrids aus d-Camphersäure in gleicher Weise prüfte, stellte es sich heraus, dass die Brom-l-isocamphersäure auch hierbei gebildet wird, da auch hier Lauronolsäure beim Digeriren mit Sodalösung bei gewöhnlicher Temperatur beobachtet wurde. Dies führte mich schliesslich auf den Gedanken, zu den Versuchen nicht l-Isocamphersäure allein, sondern eine Mischung von dieser mit d-Camphersäure zu verwenden, und hierdurch gelang es schliesslich, grössere Mengen des gesuchten Körpers zu erhalten. Ich operirte folgendermassen:

Eine Mischung von je 12,5 g d-Camphersäure und l-Isocamphersäure [1]) wurde mit 54 g Phosphorpentachlorid im Wasserbade, bis sich kein Camphersäureanhydrid beim Erkalten ausschied, erhitzt, und 22 g (1 Mol. + 2 g) Brom zugegeben. Nachher erwärmte man auf ganz schwach siedendem Wasserbade bei kleiner Oeffnung, bis die Bromwasserstoffentwickelung nach 3—4 Stunden nachliess, und die Farbe des Broms fast verschwunden war. Das Phosphoroxychlorid wurde, unter Zusatz von etwas schwefliger Säure, in gewöhnlicher Weise zersetzt, und das bromirte Chlorid in soviel Aether aufgenommen, dass die Lösung annähernd dasselbe specifische Gewicht, wie die wässerige Flüssigkeit, erhielt. Hierdurch erzielt man beim Umschütteln eine gute Emulgierung der beiden Flüssigkeitsschichten. Das Ganze blieb unter häufigem Umschütteln, wobei Anfangs eine geringe Temperaturerhöhung eintrat, mehrere Tage stehen. Das ausgeschiedene Bromcamphersäureanhydrid, welches roh 24 g wog, wurde durch Filtriren abgeschieden, und die ætherische Lösung aus dem Filtrate abseparirt und bei gewöhnlicher Temperatur verdunstet. Schon hierbei erstarrt der Rückstand theilweise zu Krystallen der Brom-l-Isocamphersäure. Um die vollständige Verwandlung des noch vorhandenen bromirten Chlorides in die Säure zu bewerkstelligen, lässt man die erhaltene klebrige Masse entweder mit Wasser während mehrerer Monate stehen, oder man übergiesst sie mit etwa der gleichen Menge conc. Ameisensäure (spec. Gew. 1,2), wobei die Umwandlung nach 24 Stunden vollständig ist; Temperaturerhöhung ist durchaus zu vermeiden. Im ersten Falle, die Anfangs immer benutzt wurde, ist die Ausbeute ziemlich gut, aber das Product ist unrein; später wurde die Zerzetzung mit Ameisensäure immer angewandt. Das

---

[1]) Bei späteren Darstellungen wurde die rohe, aus d-Camphersäure durch Erhitzen mit Salzsäure und Eisessig (vergl. S. 145) erhaltene Mischung von d-Camphersäure und l-Isocamphersäure vortheilhaft angewandt.

Product erstarrt hierbei zu einem fast farblosen Brei von Krystallen, die abgesaugt und mit Ameisensäure nachgewaschen wurden. Nach dem Trocknen in Vacuum wogen die Krystalle, bei Anwendung der oben angegebenen Menge des Ausgangsmaterials, 5,8 g. Sie wurden in kochendem, mittelst Kaliumhydratstangen gut entwässertem Benzol, wovon 80—100 cm^3 nöthig waren, aufgelöst. Beim Erkalten und paartägigem Stehen hatte sich fast die ganze Menge der Substanz in Form grosser Prismen resp. dicker Blätter, die bei 196^0 schmolzen, wieder abgeschieden. Ein Versuch, die Substanz aus Wasser umzukrystallisiren, gab kein gutes Resultat, indem die sich hierbei abscheidenden, grossen Prismen, die den früher erhaltenen durchaus ähnlich waren und wie diese beim Liegen an der Luft verwitterten, mit einem Oel benetzt waren, und ihr Schmelzpunkt niedrig gefunden wurde.

Die aus Benzol erhaltenen Krystalle werden bei gelindem Erwärmen allmählich trübe, und auch schon beim Liegen an der Luft büssen sie ihre Durchsichtigkeit allmählich ein. Dies liess vermuthen, dass sie Krystallbenzol enthielten, was dadurch bestätigt wurde, dass ich eine Probe in rauchender Salpetersäure auflöste. Nach Verdünnen mit Wasser trat ein starker Geruch nach Nitrobenzol auf, das beim Kochen der Flüssigkeit auch in Substanz isolirt werden konnte. Es wurden nun die folgenden Bestimmungen des Krystallbenzols vorgenommen:

1) 0,4498 g Substanz erhielten nach 2-stündigem Erhitzen auf 60^0 constantes Gewicht; Gewichtsverlust 0,0556 g.

2) 0,3890 g, ebenso behandelt, verloren 0,0481 g an Gewicht;

Berechnet für	Gefunden:	
$C_{10}H_{15}BrO_4 + \frac{1}{2}C_6H_6$:	1)	2)
C_6H_6 12,27 %	12,36 %	12,36 %.

In Vacuum war die Benzolabgabe auch nach 2 Tagen nur minimal, erreichte aber doch etwa 1 %.

In dem Rückstande nach dem Erwärmen auf 60^0 war kein Benzol mittelst der Salpetersäureprobe mehr zu finden. Trotzdem gab der Rückstand bei der Analyse nicht gut stimmende Zahlen; es scheint demnach eine geringfügige Zersetzung beim Austreiben des Benzols einzutreten. Auch der Schmelzpunkt sank von 196^0 auf etwa 190^0.

Die Analyse der von Benzol befreiten Substanz ergab Folgendes:

1) 0,2123 g Substanz gaben 0,1354 g $AgBr$;

2) 0,1709 g " " 0,2728 g CO_2 und 0,0915 g H_2O;

Berechnet für $C_{10}H_{15}BrO_4$:		Gefunden: 1)	2)
C	43,01 %	—	43,54 %
H	5,38 „	—	5,94 „
Br	28,67 „	27,14 %	— „

Obwohl diese Analysen nur angenäherte Werthe ergaben, lassen sie doch daran nicht zweifeln, dass die gesuchte Brom-l-isocamphersäure vorliegt, besonders wenn die beiden folgenden Brombestimmungen, welche mit Substanzen verschiedener Darstellung, die noch das Krystallbenzol enthielten, mit in Betracht gezogen werden:

1) 0,2056 g Substanz gaben 0,1198 g $AgBr$;
2) 0,1944 g „ „ 0,1140 g „ ;

Berechnet für $C_{10}H_{15}BrO_4 + \frac{1}{2} C_6H_6$:		Gefunden: 1)	2)
Br	25,16 %	24,79 %	24,95 %.

Die meisten organischen Solventien, mit Ausnahme des Benzols, lösen die bromirte Säure leicht auf. Sie hat sauren Geschmack und röthet Lackmus. In Soda löst sie sich unter Kohlendioxyd-entwickelung leicht auf, wobei sie theils in Lauronolsäure, theils in die gewöhnliche Camphansäure, welche Letztere in grösserer Menge entsteht, übergeht. Diese Reaction wurde etwas eingehender untersucht.

Einwirkung von Sodalösung auf Brom-l-isocamphersäure. 5 g Bromisocamphersäure wurden in einer Lösung von 3,0 g Krystallsoda (etwas mehr als $\frac{1}{2}$ Mol.) in 40 g Wasser gelöst, und nachdem die Lösung einige Stunden bei gewöhnlicher Temperatur gestanden, wurde sie eine halbe Stunde unter Rückfluss gekocht. Zur Lösung setzte ich nachher 1 cm^3 conc. Salzsäure (spec. Gew. 1,2), und leitete durch sie Wasserdampf ein, bis das Destillat noch kaum sauer reagirte. Das Destillat wurde mit Kochsalz gesättigt und zweimal ausgeæthert, die ætherische Lösung mit Chlorcalcium scharf getrocknet und der Aether im Wasserbade verdunstet, wobei schliesslich trockne Luft hindurchgesaugt wurde. Es blieb eine oelige Säure zurück (die kein Campholacton enthielt), deren Menge 0,802 g betrug. Zur Identificirung wurde sie in trocknem Chloroform gelöst und die berechnete Menge Brom in Chloroform unter Eiskühlung hinzugetröpfelt. Nachher wurde das Product, wie an der Seite 201

beschrieben, isolirt und gereinigt. Ich erhielt aus Eisessig, bei Zusatz von Wasser, die charakteristischen, stumpf zugespitzen Prismen des Bromlactons $C_9H_{13}BrO_2$, die bei 186—187° schmolzen und den für diese Verbindung eigenen Camphergeruch besassen. Eine Bromstimmung zeigte das genanntes Lacton in der That vorlag:

0,1902 g Substanz gaben 0,1537 g $AgBr$:

Berechnet für $C_9H_{13}BrO_2$:	Gefunden:
Br 34,34 %	34,33 %.

Es entsteht somit bei der Spaltung der Brom-l-isocamphersäure mit $^1/_2$ Mol. Soda die gewöhnliche Lauronolsäure, die hierbei in einer Ausbeute von rund 29 % entsteht.

Die nach der Wasserdampfdestillation zurückgebliebene Lösung wurde nunmehr mit Salzsäure vollständig angesäuert. Nach kurzer Zeit scheiden sich die langen Prismen der Camphansäure aus, die nach Umkrystallisiren aus Wasser und längerem Verweilen im Vacuumexsiccator, wobei sie unter Krystallwasserverlust trübe wurden, bei 198—199° schmolzen; die erhaltene Menge betrug 2,1 g. Zur Identificirung wurde die Säure in absolutem Alcohol polarisirt:

$$t = 16^0$$
$$l = 1 \text{ dm}$$
$$p = 5{,}245$$
$$D^{16}/_4 = 0{,}8133$$
$$\alpha_j = -0{,}77^0 \qquad [\alpha]_j = -7{,}05^0.$$

Da, wie später unter l-Camphansäure zu ersehen ist, dieser aus l-Bromcamphersäureanhydrid entstehenden, schon längst bekannten Modification der Camphansäure das spec. Drehungsvermögen $[\alpha]_j = -7{,}15^0$ zukommt, so ist aus der Bestimmung ersichtlich, dass die gewöhnliche Camphansäure bei der Spaltung entstand. Dieser Umstand bestätigt erstens die richtige Zusammenzetzung der Brom-l-isocamphersäure, und zweitens geht daraus hervor, dass das Bromatom in derselben die nämliche Stellung einnimmt, wie in den Bromcamphersäureanhydriden. Letzteres verdient deshalb einer Erwähnung, weil es nicht gelang, die Säure durch Anhydrisiren in das l-Bromcamphersäureanhydrid überzuführen; sie zersetzte sich nämlich bei den diesbezüglichen Versuchen.

Theils um die Resultate der zuletzt beschriebenen Versuche zu bestätigen, theils um zu untersuchen, ob bei niedriger Einwirkungstemperatur und bei Anwendung von mehr Soda die Menge der Lauronolsäure vergrössert

würde, habe ich nochmals $3{,}6$ g Brom-l-isocamphersäure der Einwirkung von etwas mehr als 1 Mol. Soda ($3{,}9$ g) in Wasserlösung bei einer Temperatur unter 0^0 ausgesetzt. Nach 16 Stunden wurde mit einer nicht ausreichenden Menge Schwefelsäure angesäuert und die Lauronolsäure wie oben isolirt. Erhalten wurden $0{,}602$ g der ungesättigten Säure, was einer Ausbeute von rund 33% der theoretischen entspricht. Aus der Lösung wurde wieder linksdrehende Camphansäure, vom Schmelzpunkt $198-199^0$, erhalten.

IV. Die Chlorcamphersäureanhydride.

l-Chlorcamphersäureanhydrid.

Die Chloranhydride der Säuren der Camphersäurereihe, die früher nicht dargestellt sind, entstehen in ähnlicher Weise, wie die entsprechenden Bromverbindungen, durch Einwirkung von Chlor auf die Mischungen von Säurechlorid und Phosphoroxychlorid, die vermittelst Phosphorpentachlorid aus den Säuren erhalten werden. Ich beschreibe hier etwas ausführlicher die Darstellung des aus d-Camphersäure entstehenden Derivates.

25 g d-Camphersäure wurden wie gewöhnlich mit 2 Mol. Phosphorpentachlorid im Wasserbade behandelt, bis kein Anhydrid mehr auskrystallisirte. Das Product wurde in einem auf kochendem Wasserbade erhitzten Fractionirkolben mit trocknem Chlorgas unter Rückfluss behandelt, wobei eine, obwohl langsame Chlorwasserstoffentwickelung beobachtet wurde. Nach 16 Stunden wurde das Product zur Zerstörung des Phosphoroxychlorides mit kaltem Wasser behandelt, und das rückständige Oel mit Wasser unter Kühlung stehen gelassen. Es erstarrte über Nacht zu einem harten Kuchen, der pulverisirt und mit kaltem absoluten Alcohol mehrmals ausgewaschen wurde. Nach dem Trocknen löste ich das Product in Chloroform, worin es ziemlich löslich war, und liess die Lösung krystallisiren. Hierbei wurden grosse prismatische Krystalle erhalten, die man nochmals aus kochendem absoluten Alcohol umkrystallisirte. Der Körper schmolz dann bei 234°, welcher Schmelzpunkt bei erneutem Umkrystallisiren nicht weiter stieg. Bei diesem ersten Versuche wurde eine Ausbeute an Chlorcamphersäureanhydrid von rund 70 % erhalten.

Zufälliger Weise hatte ich hierbei den richtigen Punkt getroffen, wobei die Einwirkung von Chlor abgebrochen werden muss. Bei einem zweiten Versuch, wobei 50 g d-Camphersäure angewandt wurde, zeigte es sich, dass, wie

bei den Bromanhydriden, ein Überschuss des angewandten Halogens zerzetzend auf dem Product einwirkt. Ich leitete nämlich Chlor während 24 Stunden ein; das Rohproduct war in diesen Falle von einem schmierigen Oele durchtränkt, und die Ausbeute sank auf etwa 30 % der theoretischen.

Man stösst, in Anbetracht des gasförmigen Zustandes des Halogens, auf erhebliche Schwierigkeiten, die zur Vollendung der Reaction nöthigen Mengen desselben beurtheilen zu können. Ein Versuch, die Gewichtszunahme der Reactionsflüssigkeit durch Wägung festzustellen, scheiterte an dem Umstand, dass die entweichenden Gase etwas Phosphoroxychlorid mitrissen. Man muss sich deshalb damit begnügen, Chlor etwa 16 Stunden auf dem aus 25 g d-Camphersäure erhaltenen Gemische (mehr als diese Menge in Arbeit zu nehmen, erwies sich nicht vortheilhaft) einwirken zu lassen, und gegen Ende dieser Zeit Proben herauszunehmen, die zuerst mit kaltem Wasser behandelt, dann mit warmen Wasser zum Erstarren gebracht und weiter aus kochendem absoluten Alcohol umkrystallisirt werden. Dadurch lässt sich unter dem Mikroskope erkennen, ob den dicken, häufig zu fächerförmigen Aggregaten zusammengewachsenen, kurzen Prismen oder Körnern des Chloranhydrids die langen, gestreiften Nadeln des Camphersäureanhydrids, das bei ungenügender Chlorirung immer vorhanden ist, beigemengt sind. Dies vorausgesetzt, muss die Einleitung von Chlor fortgesetzt werden, bis das Product einheitlich wird.

Die Analyse des reinen Chloranhydrids ergab Folgendes:

1) 0,1991 g Substanz gaben 0,1313 g $AgCl$;

2) 0,1500 g „ „ 0,3033 g CO_2 und 0,0847 g H_2O;

Berechnet für $C_{10}H_{13}ClO_3$:		Gefunden: 1)	2)
C	55,43 %	—	55,15 %
H	6,00 „	—	6,27 „
Cl	16,40 „	16,32 %	—

Das l-Chlorcamphersäureanhydrid zeigt sich ich in allen Lösungsmitteln löslicher, wie das entsprechende Bromanhydrid. Aus Alcohol lässt es sich ohne Zersetzung umkrystallisiren, wenn es vorher mit kaltem Sprit ausgewaschen wurde und somit genügend rein ist; in unreinem Zustande, wenn es noch schmierige Zersetzungproducte enthält, tritt beim Kochen mit Alcohol Zersetzung ein.

Das Chloranhydrid ist, wie die meisten aus der d-Camphersäure erhaltenen Derivate, *linksdrehend*, wie die folgende, *in Chloroform* ausgeführte Bestimmung seines Drehungsvermögens zeigte:

$t = 17{,}5^0$
$l = 1$ dm
$p = 10{,}016$
$D^{17{,}5}/_4 = 1{,}4597$
$\alpha_j = -6{,}1^0$ $[\alpha]_j = -16{,}3^0$.

In einer gesättigten *absolut alcoholischen Lösung* des l-Chlorcamphersäureanhydrids ermittelte ich folgendes Drehungsvermögen:

$t = 18^0$
$l = 1$ dm
$p = 0{,}9576$
$D^{18}/_4 = 0{,}79962$
$\alpha_j = -0{,}301^0$ $[\alpha]_j = -15{,}4^0$.

Löslichkeit in absolutem Alcohol. 3,9817 g der nach 48-stündigem Stehen bei 18° bereiteten Lösung enthielten 0,0377 g Substanz, die also in 3,9440 g des Lösungmittels vorhanden waren. Es lösen 100 g absoluter Alcohol 0,96 g Chlorcamphersäureanhydrid.

Schon die gleiche Entstehungsweise machte es wahrscheinlich, dass das Chloranhydrid das Halogen in gleicher Stellung im Molekyle enthielt, wie die entsprechenden Bromanhydride. Um die Frage definitiv zu beantworten, wurden folgende Versuche ausgeführt.

Zunächst wurde l-Chlorcamphersäureanhydrid der Reduction mit Zinkstaub und Eisessig unterworfen (vergl. unter l-Bromcamphersäureanhydrid S. 195). 5 g desselben wurden mit 25 g Eisessig und einem Überschuss von Zinkstaub unter Rückfluss gekocht, nachdem es sich gezeigt hatte, dass seine Reduction viel träger verläuft, wie die des entsprechenden Bromanhydrids. Erst nach etwa 3 Stunden war die Reaction beendet, da beim Abkühlen einer Probe Nichts auskrystallisirte. Es wurde weiter wie a. a. O. angegeben gearbeitet. Beim Verdünnen mit Wasser fielen 0,6 g gewöhnliches Camphersäureanhydrid (Schmelzpunkt 220°; die daraus erhaltene Säure schmolz bei 186—187° und zeigte sich in alcoholischer Lösung stark rechtsdrehend) aus. Nach Ausfällen des Zinks mittelst Schwefelwasserstoff aus der Mutterlauge erhielt ich 1,95 g einer Säuremischung, die mittelst Acetylchlorid in 0,55 g d-Camphersäure (das erhaltene Anhydrid schmolz bei 220—221° und wurde mittelst Sodalösung in die Säure umgewandelt) vom Schmelzpunkt 186—187° (in alcoholischer

Lösung starke Rechtsdrehung) und 1,16 g l-Isocamphersäure (Schmelzpunkt 171—172°) zerfiel. Die polarimetrische Bestimmung dieser letzteren Säure ergab Folgendes:

$t = 17^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}9954$
$D^{17}/_4 = 0{,}82345$
$\alpha_j = -10{,}2^0$ $[\alpha]_j = -48{,}4^0$.

Bei der Reduction verhält sich demnach l-Chlorcamphersäureanhydrid dem l-Bromderivat ganz ähnlich. Etwa die Hälfte der entsprechenden bromfreien Säure erleidet bei der Reduction Umlagerung in die geometrisch isomere l-Isocamphersäure.

Zersetzung des Chloranhydrids durch Kochen mit Sodalösung. 6 g l-Chlorcamphersäureanhydrid wurden mit einer Lösung von 3 g (etwas mehr als 1 Mol.) wasserfreie Soda in 40 cm^3 Wasser gekocht, wobei Lösung nach etwa ½ Stunde eintrat. Zu der Lösung wurden 1,5 cm^3 Salzsäure (spec. Gew. 1,2) zugegeben und Wasserdampf eingeleitet. In der Vorlage sammelte sich ein trübes Destillat, das den Geruch der Lauronolsäure verbreitete. Dasselbe wurde, nach Aussalzen mit Klornatrium, mit Aether zweimal ausgeschüttelt, die Lösung scharf getrocknet und der Aether abdestillirt. Es wurde ein Rückstand von 0,7735 g, aus einer ungesättigten oeligen Säure bestehend, erhalten. Beim Bromieren in Chloroformlösung (vergl. S. 200) wurde das der Lauronolsäure zugehörige, campherriechende Bromlacton vom Schmelzpunkt 186—187° erhalten. Es krystallisirte, wie gewöhnlich, aus Eisessig beim Ausspritzen mit Wasser in kleinen zugespitzten Prismen resp. Salmiak-ähnlichen Gebilden. Die Ausbeute an Lauronolsäure beträgt 18,1 % der theoretischen. Es wird also auch das l-Chlorcamphersäureanhydrid unter Einwirkung von Soda in diese Säure theilweise gespalten.

Die nach der Dampfdestillation zurückbleibende Flüssigkeit wurde nachher mit Salzsäure übersättigt. Es fiel eine Säure in Nadeln aus, die nach zweimaligem Umkrystallisiren aus Wasser bei 200—201° schmolz und der gewöhnlichen l-Camphansäure durchaus ähnlich war. Sie krystallisirte wasserhaltig und die Krystalle verwitterten über Schwefelsäure im Vacuum. Dass diese Säure wirklich vorlag, wurde durch folgende Bestimmung ihres Drehungsvermögens in absol. Alcohol bestätigt:

$t = 14{,}5^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}964$
$D^{14,5}/_4 = 0{,}82583$
$\alpha j = -1{,}52^0$ $[\alpha]j = -7{,}21^0$.

Besonders die Bildung der gewöhnlichen Camphansäure aus dem l-Chlorcamphersäureanhydrid zeigt, dass in diesem das Chloratom dieselbe Stellung einnimmt, wie das Brom in Bromcamphersäureanhydrid, worauf schon im theoretischen Theil (S. 114) hingewiesen wurde.

Versuche zur Umlagerung des l-Chlorcamphersäureanhydrids. Dieselben wurden wie bei l-Bromcamphersäureanhydrid, durch Kochen mit Chinolin (während zwei Stunden), sowie durch Erhitzen auf 220—230^0 während 3 Stunden, vorgenommen. Die Producte wurden wie S. 194 angegeben verarbeitet.

Das in beiden Fällen zurückerhaltene Chlorcamphersäureanhydrid schmolz nach der Reinigung bei 234^0. Die Bestimmung des Drehungsvermögens in Chloroform ergab für die mit Chinolin gekochte Probe bei $t = 18^0$ und $p = 9{,}236$: $[\alpha]j = -15{,}7^0$, für die trocken erhitzte Probe bei $t = 18^0$ und $p = 9{,}9572$: $[\alpha]j = -15{,}9^0$. Es tritt also hierbei *keine Umlagerung* des Chloranhydrids ein.

d-Chlorcamphersäureanhydrid.

Dieser Körper wurde aus l-Camphersäure in derselben Weise wie der optische Antipode aus d-Camphersäure dargestellt. Der Schmelzpunkt der aus Alcohol umkrystallisirten Substanz lag ebenfalls bei 234^0. Eine Chlorbestimmung bestätigte die richtige Zusammenzetzung:

0,2020 g Substanz gaben 0,1333 g $AgCl$:

Berechnet für $C_{10}H_{13}ClO_3$:	Gefunden:
Cl 16,40 %	16,32 %.

Das d-Chlorcamphersäureanhydrid krystallisirt aus Chloroform in ziemlich grossen, derben Rhomboëdern, aus absolutem Alcohol in dreieckigen Blättern oder schwertförmigen Prismen, die, wie das optische Isomere, häufig fächerförmig zusammengewachsen sind. In Aether ist der Körper schwerlöslich.

Die Bestimmung des *Drehungsvermögens* wurde in absolut-alcoholischer, gesättigter Lösung vorgenommen:

$t = 18^0$
$l = 2$ dm
$p = 1{,}1035$
$D^{18}/_4 = 0{,}7998$
$\alpha j = -0{,}68^0$ $[\alpha]j = -15{,}1^0$.

Die *Löslichkeit* wurde in absolutem Alcohol bestimmt und betrug nach zwei Bestimmungen bei 17,8 im Mittel 1,10 g[1]):

1) 4,8386 g Lösung enthielten 0,0524 g Substanz, die also auf 4,7862 g Lösungsmittel vertheilt waren; 100 g absoluter Alcohol lösen demnach 1,09 g d-Chlorcamphersäureanhydrid.

2) 3,337 g Lösung enthielten 0,037 g Substanz, die also in 3,3 g Alcohol vorhanden waren. 100 g Lösungsmittel nahmen also 1,11 g Substanz auf.

i-Chlorcamphersäureanhydrid.

Die racemische Verbindung der beiden Chlorcamphersäureanhydride wurde durch Zusammenmischen gleicher Theile der Componenten in kochender alcoholischer Lösung dargestellt. Beim Erkalten krystallisirte das i-Chlorcamphersäureanhydrid in glänzenden, platten Nadeln, die, wie die Componenten, Aggregate von kleineren Krystallindividuen sind. Bei freiwilligem Verdunsten der gesättigten alcoholischen Lösung erscheinen grosse klare Krystallkörner, die octaëderähnlich aussehen oder eine Combination von einem Prisma mit zwei Pyramiden darstellen. Der Körper schmilzt scharf bei 234^0, also bei gleicher Temperatur wie die Componenten. Eine Chlorbestimmung fiel folgendermassen aus:

0,1551 g Substanz gaben 0,1024 g $AgCl$;

Berechnet für $C_{10}H_{13}ClO_3$:	Gefunden:
Cl 16,40 %	16,33 %.

Die Verbindung zeigte sich in gesättigter alcoholischer Lösung ($p = 1{,}26$) *inactiv*.

---

[1]) Diese Bestimmungen wurden von Stud. A. MALIN ausgeführt.

Löslichkeit in absolutem Alcohol bei 18,5°. 3,3234 g Lösung enthielten 0,0414 g Substanz, die also in 3,282 g Lösungsmittel vorhanden waren. 100 g absoluter Alcohol lösen 1,26 g i-Chlorcamphersäureanhydrid.

Allem Anschein nach liegt hier, wie bei i-Camphersäureanhydrid und i-Bromcamphersäureanhydrid, eine *wahre racemische Verbindung* vor.



V. Die Camphansäuren.

l-Camphansäure.

Diese schon längere Zeit bekannte Verbindung wird gewöhnlich durch Einwirkung von Wasser oder Alkalien auf Bromcamphersäureanhydrid dargestellt. Wie Reyher fand [1]), entsteht hierbei eine gewisse Menge der zweibasischen Isocamphansäure, und ich habe mitgetheilt, dass ein Theil des Bromanhydrids auch in Lauronolsäure übergeht. Aus diesen Gründen ist die nach dieser Methode erhaltene Camphansäure niemals rein, und sie muss noch einen von Reyher (l. c. S. 29) ausgearbeiteten, etwas umständlichen Reinigungsprocess durchmachen.

Ich habe gelegentlich gefunden, dass eine von Anfang an ziemlich reine Camphansäure erhalten werden kann, wenn man die Zersetzung des Bromcamphersäureanhydrids mittelst Kaliumacetat in Eisessiglösung vornimmt. Ich arbeitete in folgender Weise.

l-Bromcamphersäureanhydrid wird mit der 4- bis 5-fachen Menge Eisessig und 2 Mol. frisch geschmolzenem Kaliumacetat unter Rückfluss gekocht, bis sich eine Probe, nach Verdampfen des Eisessigs, in Wasser klar löst, wozu gewöhnlich etwa 3-stündiges Kochen nöthig ist. Nach kurzer Zeit beginnt während dem Kochen die Abscheidung von Kaliumbromid. Nach beendigter Einwirkung lässt man erkalten, filtrirt von Kaliumbromid an der Saugpumpe ab und verdunstet den Eisessig auf dem Wasserbade, wobei das Kaliumsalz der Camphansäure zurückbleibt. Es wird in nicht zu viel warmen Wassers aufgelöst, und die Lösung angesäuert, wobei die Camphansäure rein weiss aus-

---

[1]) Inaug. Dissert. Leipzig 1891. S. 33.

krystallisirt. Nach einmaligem Umkrystallisiren aus kochendem Wasser ist sie rein. Bei der Umkrystallisation schmilzt die Camphansäure zu einem Oel; man kocht, bis Lösung eintritt, kühlt dann ab, wobei eine geringe Menge harziger Verunreinigungen ausfällt, filtrirt schnell ab und lässt krystallisiren. In dieser Weise erhält man die Camphansäure gleich rein; die im Vacuum über Schwefelsäure von Krystallwasser befreite Säure schmilzt bei 200—201°.

Dass hier wirklich Camphansäure vorlag, wurde durch folgende Analyse bestätigt:

0,2072 g Substanz gaben 0,4595 g CO_2 und 0,1350 g H_2O;

	Berechnet für $C_{10}H_{14}O_4$:	Gefunden:
C	60,61 %	60,43 %
H	7,07 „	7,24 „

Über die Eigenschaften der Camphansäure habe ich hier nur hinzuzufügen, dass sie in wasserhaltigem Zustande schon auf dem Wasserbade merklich flüchtig ist. Zu ihrer Befreiung vom Krystallwasser muss sie im Vacuum getrocknet werden. Vor der Ausführung von Schmelzpunktsbestimmungen muss die Säure ganz zum Pulver zerfallen sein, weil sonst die genannte Constante, bei ungenügender Austreibung des Krystallwassers, viel zu niedrig ausfällt.

Das *Drehungsvermögen* der Camphansäure wurde in alcoholischer Lösung bestimmt:

$t = 19{,}5^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}98587$
$D^{19,5}/_4 = 0{,}82103$
$\alpha j = -3{,}0^0$ $[\alpha]j = -7{,}15^0$.

Eine andere Bestimmung wurde mit einer Substanz ausgeführt, die aus l-Bromcamphersäureanhydrid, welches bei der Einwirkung von Brom auf l-Isocamphersäurechlorid (S. 207) entstanden war, mittelst Kaliumacetat und Eisessig erhalten wurde:

$t = 20^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}803$
$D^{20}/_4 = 0{,}82113$
$\alpha j = -2{,}94^0$ $[\alpha]j = -7{,}13^0$.

Hier zeigt sich wieder, wie schon früher gefunden, dass die Derivate der d-Camphersäure meistens linksdrehend sind.

Wie früher hervorgehoben, entsteht l-Camphansäure, neben Lauronolsäure, auch bei der Zersetzung des l-Bromcamphersäureanhydrids (S. 202), des l-Chlorcamphersäureanhydrids (S. 217) und der Brom-l-isocamphersäure (S. 212) mittelst Sodalösung.

Versuche zur Umlagerung der l-Camphansäure.

1) 10 g Camphansäure wurden in überschüssiger Natronlauge von etwa 50 % unter Erwärmen gelöst und die Lösung in einer Silberschale langsam eingekocht, bis sich das Natronsalz abschied, was nach etwa 1 Stunde stattfand. Die Säure wurde in gewöhnlicher Weise abgeschieden und einmal aus Wasser umkrystallisirt. Sie zeigte nach längerem Verweilen in Vacuum den Schmelzpunkt 200—201°. Die Bestimmung des Drehungsvermögens in absolutem Alcohol ergab Folgendes:

$t = 16^0$
$l = 2$ dm
$p = 9{,}9964$
$D^{16}/_4 = 0{,}82528$
$\alpha_j = -3{,}01^0$ $\qquad [\alpha]_j = -7{,}13^0$.

Bei längerem Erhitzen von Camphansäure mit überschüssigen Alkalien findet Zersetzung statt. Als Product entsteht hierbei unter Anderm eine Buttersäure-ähnlich riechende oelige Säure. Die genauere Untersuchung dieser Reaction wird später ausgeführt.

2) 5 g Camphansäure wurden mit 20 g Eisessig in ein Rohr eingeschmolzen und während 8 Stunden auf 145—150° erhitzt. Aus der etwas bräunlich gefärbten, filtrirten Lösung wurde das Lösungsmittel im Wasserbade verdunstet, der Rückstand in heissem Wasser aufgenommen, und die Lösung, nach Entfärben mit Thierkohle, zum Krystallisiren gestellt. Der Schmelzpunkt der entwässerten Säure lag bei 198—200°. Das Drehungsvermögen war unverändert, wie folgende Bestimmung in Alcohol zeigte:

$t = 16^0$
$l = 1$ dm
$p = 9{,}7526$
$D^{16}/_4 = 0{,}82466$
$\alpha j = -1{,}43^0$ $[\alpha]_j = -6{,}94^0$.

3) 5 g Camphansäure wurden mit 20 g Eisessig in zugeschmolzenem Rohr auf $191-203^0$ während 9 Stunden erhitzt. Die wie oben gereinigte Säure schmolz bei $199-200{,}5^0$ und zeigte in absolut-alcoholischer Lösung dasselbe Drehungsvermögen wie vorher:

$t = 16{,}^0$
$l = 2$ dm
$p = 10{,}0106$
$D^{16}/_4 = 0{,}82552$
$\alpha j = -3{,}0^0$ $[\alpha]_j = -7{,}09^0$.

Es erleidet also die Camphansäure keine Umlagerung bei höherer Temperatur, weder in alkalischer, noch in saurer Lösung.

Früher habe ich schon mitgetheilt[1]), das die l-Camphansäure, beim langsamen Destilliren in einem Strom von Kohlendioxyd, in Lauronolsäure und einen ungesättigten Kohlenwasserstoff zerfällt. An dieser Stelle habe ich nur noch Einiges über das Verhalten der somit erhaltenen Lauronolsäure bei der Einwirkung von Brom, sowie über das Amid derselben, hinzuzufügen, um weiter den Beweis zu führen, dass die bei der Zersetzung des l-Bromcamphersäureanhydrids (S. 198) und der Brom-l-isocamphersäure (S. 211) entstehende ungesättigte Säure von der Formel $C_8H_{13}.COOH$ wirklich mit Lauronolsäure identisch ist.

Einwirkung von Brom auf Lauronolsäure. 3 g dieser aus l-Camphansäure dargestellten Säure wurden in wenig trocknem Chloroform gelöst, und 1 Mol. Brom, das ebenfalls mit Chloroform verdünnt war, allmählig unter guter Kühlung mit Eis und Kochsalz tropfenweise zugegeben. Hierbei fand von Anfang an starke Bromwasserstoffentwickelung statt. Nach Verdunsten des

[1]) Berichte der deutsch. chem. Gesellsch. *1894*, 3504.

Chloroforms im Vacuum wurde der Rückstand, wie Seite 200 beschrieben, zuerst mit Sodalösung behandelt, mittelst Aether isolirt, auf Thon von einem oeligen, die Schleimhäute stark angreifenden Zersetzungsproduct befreit und aus Eisessig unter Zusatz von Wasser umkrystallisirt. Das Product riecht dem Campher sehr ähnlich, krystallisirt in kleinen, dicken Prismen, die eine beiderseitige, pyramidale Abstumpfung zeigen, beim raschen Abscheiden in Salmiak-ähnlichen Aggregaten. Es schmolz bei 186—187°. Die folgenden Analysen zeigten, dass ein Körper von der Zusammensetzung $C_{10}H_{13}BrO_2$ vorliegt:

1) 0,1600 g Substanz gaben 0,1286 g $AgBr$;
2) 0,2250 g „ „ 0,1802 g „ ;

Berechnet für $C_9H_{13}BrO_2$:	Gefunden: 1)	2)
Br 34,34 %	34,20 %	34,08 %.

Amid der Lauronolsäure. Dieser Körper wurde in der früher (S. 199) beschriebenen Weise durch Einwirkung von Lauronolsäurechlorid auf stark gekühlter, conc. Ammoniakflüssigkeit dargestellt. Es krystallisirt aus Wasser, worin es auch in der Kälte ziemlich leicht löslich ist, in glasglänzenden Blättern, die wasserhaltig sind. Das Krystallwasser entweicht schon theilweise an der Luft, weshalb die Bestimmung seiner Menge ausbleiben musste, vollständig erst im Vacuum über Schwefelsäure. Der Schmelzpunkt liegt bei der reinen Substanz bei 71—72°. Eine Bestimmung des Stickstoffgehaltes ergab Folgendes:

0,1916 g Substanz gaben 15,4 cm^3 N, bei 18° Temperatur und 763,5 mm Druck gemessen.

Berechnet für $C_8H_{13}.CONH_2$:	Gefunden:
N 9,15 %	9,31 %.

Auch aus diesen Versuchen ist also ersichtlich, dass die oben (S. 198 u. 211) beschriebene ungesättigte Säure, $C_8H_{13}.COOH$, mit Lauronolsäure identisch ist.

d-Camphansäure.

Diese Säure wurde aus d-Camphersäureanhydrid durch Kochen mit Kaliumacetat und Eisessig nach dem unter l-Camphansäure (S. 221) angegebenen Verfahren dargestellt. Die Einwirkung war nach 4 Stunden beendigt. Sie krystallisirt aus Wasser in langen, platten Nadeln, die die Krystalle der l-Camphansäure durchaus ähnlich sind. Wie diese, enthält d-Camphansäure Krystallwasser, das in Vacuum über Schwefelsäure leicht entweicht. In wasserfreiem Zustande schmilzt der Körper bei 200°.

Die Analyse bestätigte die Zusammensetzung:

0,1857 g Substanz gaben 0,4116 g CO_2 und 0,1193 g H_2O;

Berechnet für $C_{10}H_{14}O_4$:		Gefunden:
C	60,61 %	60,44 %
H	7,07 „	7,14 „

Die Bestimmung des *Drehungsvermögens* zeigte, dass die Säure, wie zu erwarten, rechtsdrehend war, und zwar wurden folgende Zahlen erhalten:

$$t = 19^0$$
$$l = 2 \text{ dm}$$
$$p = 10{,}015$$
$$D^{19}/_4 = 0{,}8249$$
$$\alpha_j = +2{,}96^0 \qquad [\alpha]_j = +7{,}0^0.$$

Es liegt also hier die optisch isomere Verbindung der l-Camphansäure vor.

i-Camphansäure.

Die inactive Camphansäure wurde sowohl durch Einwirkung von Kaliumacetat in Eisessiglösung auf i-Bromcamphersäureanhydrid, wie auch durch Zusammenmischen gleicher Theile der Componenten in Wasserlösung erhalten.

In erstem Falle wurde wie bei der Darstellung der Componenten (vergl. S. 221) verfahren. Man erhält somit die inactive Säure in glasglänzenden Blättern mit schiefer Abstumpfung. In der Krystallform zeigt sich also schon eine Verschiedenheit, indem die optisch activen Säuren, in reinem Zustande aus Wasser umkrystallisirt, mehrere Centimeter lange Nadeln bilden. Auch

konnte ich nicht mit Bestimmtheit eine Verwitterung der Krystalle beim Liegen im Vacuumexsiccator beobachten. Der Schmelzpunkt liegt bei etwa derselben Temperatur, wie der der Componenten, bei 201—202°.

Die Analyse der aus i-Bromcamphersäureanhydrid erhaltenen Säure ergab Folgendes:

0,1851 g Substanz gaben 0,4099 g CO_2 und 0,1170 g H_2O:

Berechnet für $C_{10}H_{14}O_4$:		Gefunden:
C	60,61 %	60,40 %
H	7,07 „	7,03 „

Die durch Racemation aus den activen Verbindungen erhaltene i-Camphansäure zeigte sich der oben beschriebenen durchaus ähnlich. Sie schmilzt ebenfalls bei 201—202°, ist in kaltem Wasser schwer, in heissem leicht löslich, und löst sich in Alcohol, Eisessig sehr leicht; in Aether ist sie mässig löslich.

Die beiden in verschiedener Weise erhaltenen Substanzen sind in alcoholischer Lösung *optisch inactiv.*

Berichtigungen.

Seite 5 u. 6 fallen die Parabindungen in den Campherformeln von V. MEYER weg.
" 16 Note [3]) lies: „Ann. der Chemie **145**, *129*“ statt „*145*, 29“.
" 27 Z. 11 v. u. lies: „20 mal *kleiner*“ statt „grösser“.
" 36 Z. 11 v. o. lies: „*Camphansäurebildung*“ statt „Camphersäurebildung“.
" 48 Note [7]) lies: „Ann. der Chemie **163**, *330*“ statt „*163*, 328“.
" 54 Z. 6 v. o. lies: „nur *3* Decigrade“ statt „2 Decigrade“.
" 62 Z. 9 v. u. lies: „*Graebe*“ statt „Gärbe“.
" 76 Z. 11 v. u. lies: „*Polymethylenkohlenwasserstoff*“ statt „Polymethylenverbindung“.
" 96 Unter den Formeln zu lesen: „*I Rechts II Rechts II Links I Links*“ statt „I Rechts I Links II Rechts II Links“.
" 107 Z. 5 v. o. lies: „jedes einzelne *asymmetrische System*“ statt „Kohlenstoffatom“.
" 108 Z. 17 v. o. lies: „$A + B = 48{,}9^0$“ statt „$48{,}7^0$“.
" 114 Z. 11 v. o. lies: „*Camphansäuren*“ statt „Camphersäuren“.
" 120 Note [1]) lies: *Annalen d. Chemie 163, 333*‘ statt „163, 330“.
" 152 Z. 17 v. o. lies: „zu *44,8* % in *d-Isocamphersäure*“ statt „zu 43,8 % in d-Camphersäure“.
" 153 Z. 16 v. o. lies: „*0,1466 g* Substanz“ statt „0,1566 g“.
" 173 Z. 3 v. o. lies: „$\left(\frac{-49{,}5-48{,}9}{2}\right)$“ statt „$\left(\frac{49{,}5-48{,}9}{2}\right)$“.
" 191 Z. 8 v. u. lies: „*H 7,69* %“ statt „7,93 %“.
" 198 Z. 14 v. o. lies: „Reactionsproductes“ statt „Reductionsproductes“.
" 199 Z. 4 v. o. lies: „*das rückständige wasserfreie Salz gab beim Veraschen 0,0510 g* $CaCO_3$“ statt „gab nach dem Abrauchen mit Schwefelsäure 0,0510 g $CaSO_3$“.
" 200 Z. 11 v. u. lies: „Gefunden: *N* 8,94 %“ statt „*N* 8,96 %“.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXI. № 6.

ÜBER GEWISSE DURCH BESTIMMTE INTEGRALE VERMITTELTE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT RATIONALEN COEFFICIENTEN.

VON

HJ. MELLIN.

Über gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten.

Obgleich die bestimmten Integrale mit veränderlichem Parameter schon frühzeitig einen hervorragenden Platz unter denjenigen analytischen Ausdrücken eingenommen haben, deren man sich zur Darstellung der Integrale von linearen Differentialgleichungen bedient hat, so bieten doch die früher zu diesem Zwecke benutzten Integrale durchaus keine Mannigfaltigkeit hinsichtlich ihrer Formen dar. Sie treten in der That nur in den beiden Formen auf:

$$(A)\quad \int_{(l)} e^{xt}\,\varphi(t)\,dt \quad \text{und} \quad (B)\quad \int_{(l)} (1-xt)^{\alpha}\,\varphi(t)\,dt,$$

oder lassen sich wenigstens durch einfache Substitutionen auf die eine oder andere dieser Formen bringen. Hierbei bedeutet φ eine von t abhängige, von dem Parameter x aber unabhängige Function, welche — damit das bestimmte Integral einer vorgelegten Differentialgleichung genüge — ihrerseits auch als Integral einer solchen Gleichung zu bestimmen ist.

Erst in letzterer Zeit ist diese Art von Ausdrücken wesentlich bereichert worden, und zwar in erster Linie durch eine von Herrn Goursat im 2. Bande von *Acta Mathematica* publicirte Arbeit mit dem Titel: *Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies.* Daselbst wird eine umfassende Klasse bestimmter, über mehrdeutige Functionen gebildeter Integrale behandelt, welche die für die Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit eindeutigen Coefficienten charakteristischen Eigenschaften besitzen, woraus geschlossen wird, dass die betreffenden Integrale selbst auch solche Gleichungen befriedigen müssen. Zu der fraglichen Klasse können auch die in der vorlie-

genden Arbeit zu behandelnden Integrale gerechnet werden. Auf die von Herrn GOURSAT entwickelten Resultate stützt sich die gegenwärtige Arbeit jedoch nicht. Der hier eingeschlagene Weg ist vielmehr von der in der citirten Arbeit benutzten Methode gänzlich verschieden.

Kehren wir, um den Zweck dieser Arbeit näher anzugeben, zu den Integralen (A) und (B) zurück, wo φ als Integral einer linearen Differentialgleichung betrachtet wird, so erkennen wir, dass sie in der allgemeineren Form

$$(C) \qquad \int_{(l)} \psi(xt)\,\varphi(t)\,dt$$

enthalten sind, wo ψ ebenfalls irgend eine lineare Differentialgleichung befriedigen soll. Die beiden Functionen e^x und $(1-x)^\alpha$ — mit denen $\psi(x)$ zu identificiren ist, damit (C) in die resp. Integrale (A) und (B) übergehe — können als Integrale von den einfachsten linearen Differentialgleichungen bezeichnet werden. Zwei allgemeine Fragen treten hier nun ungezwungen hervor:

Vorausgesetzt, dass φ und ψ beide als Integrale von gegebenen linearen Differentialgleichungen definirt sind, lässt sich dann auch eine lineare Differentialgleichung angeben, die von dem Integrale (C) bei passender Wahl seines Integrationsweges befriedigt wird?

Vorausgesetzt, dass die eine von den Functionen φ und ψ als Integral einer gewissen linearen Differentialgleichung fixirt ist, lässt sich dann die andere als Integral einer solchen Gleichung bestimmen, dass das Integral (C) bei passender Wahl des Integrationsweges einer vorgelegten linearen Differentialgleichung Genüge leistet?

Unter linearen Differentialgleichungen werden hierbei vorzugsweise *homogene* lineare Gleichungen mit *rationalen* Coefficienten verstanden.

Obgleich diese Fragen in der vorliegenden Arbeit nicht in voller Allgemeinheit erledigt werden, so sind wir doch im Stande, wenn die eine von den Functionen φ, ψ passend beschränkt wird, zu Ergebnissen zu gelangen, die wegen ihrer Einfachheit und Übersichtlichkeit bemerkenswerth sein dürften. Wie aus der folgenden Darlegung des Inhaltes dieser Arbeit ersichtlich wird, sollen die obigen Fragen unter gewissen Beschränkungen ebenfalls auf Integrale von der nachstehenden Form (E) bezogen werden.

Als Grundtheorem der ganzen Arbeit muss die LAGRANGEsche Identität zwischen adjungirten Differentialausdrücken bezeichnet werden. Dieselbe wird deshalb im *ersten* Abschnitte in verschiedenen Formen dargestellt. In demselben Abschnitte werden ausserdem mit ihrer Hülfe gewisse, für die folgenden Abschnitte erforderliche, allgemeine Formeln entwickelt.

Im *zweiten* Abschnitte werden die gewöhnlichen Transformationen von Differentialgleichungen vermittelst Integralsubstitutionen von den Formen (A) und (B) aus dem Gesichtspunkte der Lagrangeschen Identität behandelt, die sich in der That als die eigentliche Quelle der betreffenden und der noch allgemeineren Transformationen der folgenden Abschnitte erweist.

Im *dritten* Abschnitte werden die oben aufgeworfenen Fragen für den ziemlich allgemeinen Fall erörtert, wo die eine von den Functionen φ, ψ irgend eine Differentialgleichung der Form

$$(D) \qquad (a_n + b_n x) x^n \frac{d^n y}{dx^n} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

befriedigt, während die andere einer beliebigen homogenen linearen Differentialgleichung mit *rationalen* Coefficienten genügen darf. Mit Hülfe von Ausdrücken, die zu den Differentialgleichungen der Functionen φ und ψ gehören, sind wir in diesem Falle im Stande, für das bestimmte Integral (C) eine Differentialgleichung in sehr übersichtlicher Form herzustellen. Sodann kann auch die letztere der obigen Fragen unter den nämlichen Voraussetzungen in einem gewissen Sinne beantwortet werden.

Im *vierten* Abschnitte werden von den oben angeführten wesentlich verschiedene Integrale besprochen, nämlich solche der Form

$$(E) \qquad \int_{(l)} \psi(x-t)\, \varphi(t)\, dt,$$

wo φ und ψ fortwährend als Lösungen von homogenen linearen Differentialgleichungen mit *rationalen* Coefficienten erklärt sind. Die oben aufgeworfenen Fragen können selbstverständlich ebenfalls auf Integrale der Gestalt (E) bezogen werden. Im vierten Abschnitte wird nun für solche Integrale genau dasselbe geleistet, was im dritten für Integrale der Form (C) gethan wird. Während aber die *hypergeometrischen* Differentialgleichungen (D) sich im dritten Abschnitte als die einfachsten erweisen, spielen die Laplaceschen Gleichungen:

$$(F) \qquad (a_n + b_n x) \frac{d^n y}{dx^n} + (a_{n-1} + b_{n-1} x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + (a_0 + b_0 x) y = 0$$

die elementare Rolle bei den Untersuchungen des vierten Abschnittes.

Gerade bei der Integration von hypergeometrischen und Laplaceschen Differentialgleichungen sind bekanntlich die Integrale (A) und (B) vorzugsweise und mit bestem Erfolge verwendet worden.

Obgleich ein bestimmtes Integral der Form (C) durch die transcendenten Substitutionen $x=e^{\xi}$, $t=e^{-\tau}$ auf eine mit (E) übereinstimmende Form gebracht werden kann, so müssen doch im Bereiche der linearen Differentialgleichungen mit *rationalen* Coefficienten die Integrale (C) und (E) im Allgemeinen als wesentlich verschieden betrachtet werden. Denn die Substitution $x=e^{\xi}$ verwandelt in der That auch die Coefficienten in den Differentialgleichungen, denen die Factoren des Integranden genügen, in transcendente Functionen der neuen Veränderlichen. — Eine bemerkenswerthe Ausnahme bildet indess das Integral (B). Denn durch die Substitution $(\frac{1}{x}, x)$ geht dasselbe über in:

$$x^{-\alpha}\int_{(l)}(x-t)^{\alpha}\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Erster Abschnitt.

§ 1.

Es wird sich ergeben, dass die Erledigung der oben bezeichneten Aufgaben gegründet werden muss auf die Lehre von der Zusammensetzung und der Zerlegung linearer Differentialausdrücke. Die Principien dieser Lehre sollen, soweit sie für das Folgende erforderlich sind, in diesem § des Zusammenhanges wegen hervorgehoben werden, und zwar mit Benutzung der, in der englischen Litteratur gebräuchlichen, symbolischen Bezeichungsweise, ohne welche fast unüberwindliche Weitläufigkeiten späterhin kaum zu vermeiden wären.

Wird in einem homogenen linearen Differentialausdrucke $Q(y)$ die abhängige Variable y durch einen anderen ebensolchen Ausdruck $P(y)$ ersetzt, so entsteht ein neuer Differentialausdruck, welcher aus P und Q zusammengesetzt ist und durch $Q(P)=QP$ bezeichnet wird. Gelingt es umgekehrt, einen gegebenen Differentialausdruck in dieser Form darzustellen, so sagt man, derselbe sei in zwei symbolische Factoren zerlegt.

Obgleich nun ein aus zwei oder mehreren Differentialausdrücken zusammengesetztes symbolisches Product im Allgemeinen von der Reihenfolge seiner Factoren abhängt, so giebt es doch auch gewisse Arten von Differentialausdrücken, die dadurch bemerkenswerth sind, dass jedes symbolische Product, welches aus lauter Differentialausdrücken der betreffenden Art zusammengesetzt

ist, von der Reihenfolge der Factoren unabhängig ist. Repräsentanten zweier solcher Arten sind die Ausdrücke:

$$(1)\qquad a_0 y + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_2 x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + a_n x^n \frac{d^ny}{dx^n},$$

$$(2)\qquad a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + a_n \frac{d^ny}{dx^n},$$

wo die a willkürliche Constanten bezeichnen. Ob es noch andere solche Arten gebe, soll bei dieser Gelegenheit dahin gestellt bleiben. Dass aber jeder aus lauter Ausdrücken der Form (1) und ebenso jeder aus lauter Ausdrücken der Form (2) zusammengesetzte Differentialausdruck von der Reihenfolge seiner Factoren unabhängig ist, wird sich aus den nachstehenden Erörterungen ergeben.

Setzt man zur Abkürzung allgemein:

$$x\frac{dX}{dx} + \varrho X = \left(x\frac{d}{dx} + \varrho\right) X,$$

so überzeugt man sich, wenn $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ zunächst als gegeben Grössen betrachtet werden, durch den Schluss von n auf $n+1$ von der Gültigkeit der Identität:

$$\left(x\frac{d}{dx} + \varrho_1\right) \cdots \left(x\frac{d}{dx} + \varrho_n\right) y = a_0 y + a_1 x \frac{dy}{dx} + \cdots + x^n \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Bei der Annahme $y = x^\varrho$ ergiebt sich die in Bezug auf ϱ identische Gleichung:

$$(\varrho + \varrho_1) \cdots (\varrho + \varrho_n) = a_0 + a_1 \varrho + a_2 \varrho(\varrho - 1) + \cdots + \varrho(\varrho - 1) \cdots (\varrho - n + 1).$$

die für $\varrho = 0, 1, \cdots, n-1$ eine zur Bestimmung von $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ hinreichende Anzahl Gleichungen liefert. Da die Grössen $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sich als symmetrische Functionen von $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ ergeben, so folgt, dass die linke Seite der obigen Formel von der Reihenfolge ihrer symbolischen Factoren unabhängig ist.

Umgekehrt ersieht man aber auch, dass jeder Differentialausdruck, welcher die Form der rechten Seite der obigen Formel besitzt, auf die Form der linken Seite gebracht werden kann, wenn die Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ der oben angeführten Gleichung gemäss definirt werden. Nimmt man insbesondere $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ an, so entsteht die Formel:

$$(3)\qquad x^n \frac{d^ny}{dx^n} = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx} - 1\right) \cdots \left(x\frac{d}{dx} - n + 1\right) y.$$

Benutzt man weiter die Symbolik:

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n y = x\frac{d}{dx}\,x\frac{d}{dx}\cdots x\frac{d}{dx}\,y\,,$$

welche also nicht mit $x^n\frac{d^n y}{dx^n}$ verwechselt werden darf, so hat man offenbar:

(4) $$c_n\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu\left(x\frac{d}{dx}\right)^\nu y\,,$$

wo die c die, mit c_n multiplicirten, elementaren symmetrischen Functionen von $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ bezeichnen. Natürlich lässt sich auch umgekehrt jeder Differentialausdruck, welcher die Form der rechten Seite hat, auf die Form der linken Seite bringen.

Es verdient besonders beachtet zu werden, dass ein Differentialausdruck der Form (1) mit alleiniger Benutzung der Formel (3), also ohne Kentniss der Grössen $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$, auf die Form der rechten Seite von (4) gebracht werden kann.

Bezeichnet $\boldsymbol{f}(\varrho)$ eine, von x unabhängige, ganze rationale Function von ϱ, so hat nach dem Obigen die Bezeichnungsweise $\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)y$ einen wohlbestimmten Sinn, indem sie einen Differentialausdruck vorstellt, welcher nach Belieben in der Form der linken oder in der rechten Seite von (4) gedacht werden kann.

Durch wiederholte Anwendung der evidenten Gleichungen:

$$\left(x\frac{d}{dx}+\alpha\right)x^\varrho = x^\varrho(\varrho+\alpha)\,,$$

$$\left(x\frac{d}{dx}+\alpha\right)x^\varrho y = x^\varrho\left(x\frac{d}{dx}+\varrho+\alpha\right)y\,,\quad x^\varrho\left(x\frac{d}{dx}+\alpha\right)y=\left(x\frac{d}{dx}-\varrho+\alpha\right)x^\varrho y\,,$$

$$\left(x\frac{d}{dx}+\alpha\right)y=\left(-t\frac{d}{dt}+\alpha\right)y \quad \text{für } x=t^{-1}\,,$$

ergeben sich die resp. allgemeineren Formeln:

(5) $$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)x^\varrho = x^\varrho\boldsymbol{f}(\varrho)\,,$$

(6) $$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)x^\varrho y = x^\varrho\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}+\varrho\right)y\,,\quad x^\varrho\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)y=\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}-\varrho\right)x^\varrho y\,,$$

(7) $$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)y=\boldsymbol{f}\left(-t\frac{d}{dt}\right)y \quad \text{für } x=t^{-1}$$

In analoger Weise können auch die Differentialausdrücke von der Form (2) behandelt werden. Durch den Schluss von n auf $n+1$ überzeugt man sich, wenn $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ zunächst als gegebene Grössen betrachtet verden, von der Gültigkeit der Identität

$$\left(\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y = a_0 y + a_1\frac{dy}{dx} + a_2\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Bei der Annahme $y = e^{\varrho x}$ ergiebt sich:

$$(\varrho+\varrho_1)\cdots(\varrho+\varrho_n) = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + \cdots + \varrho^n,$$

so dass die Grössen a gleich den elementaren symmetrischen Functionen von $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ sind, woraus weiter folgt, dass die linke Seite der obigen Formel von der Reihenfolge ihrer symbolischen Factoren unabhängig ist.

Umgekehrt ersieht man aber auch, dass jeder Differentialausdruck, welcher die Form der rechten Seite hat, auf die Form der linken Seite gebracht werden kann, wenn $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ der obigen Gleichung gemäss bestimmt werden.

Setzt man ferner $\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \frac{d^\nu}{dx^\nu}y = \left(\frac{d}{dx}\right)^\nu y$, so kann die obige Formel nach Multiplication mit c_n folgenderweise geschrieben werden:

$$(8) \qquad c_n\left(\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\left(\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)^\nu y,$$

wo also die c die, mit c_n multiplicirten, elementaren symmetrischen Functionen von $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ bezeichnen.

Bezeichnet $\boldsymbol{f}(\varrho)$ eine ganze rationale Function von ϱ, so hat nach dem Obigen die Bezeichnung $\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)y$ einen wohlbestimmten Sinn, indem sie einen Differentialausdruck vorstellt, welcher in der Form der linken oder in der der rechten Seite von (8) auftreten kann.

Durch wiederholte Anwendung der evidenten Gleichungen:

$$\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)e^{\varrho x} = e^{\varrho x}(\varrho+\alpha),$$

$$\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)e^{\varrho x}y = e^{\varrho x}\left(\frac{d}{dx}+\varrho+\alpha\right)y, \quad e^{\varrho x}\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)y = \left(\frac{d}{dx}-\varrho+\alpha\right)e^{\varrho x}y,$$

ergeben sich die allgemeineren Formeln:

(9) $$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)e^{\varrho x}=e^{\varrho x}\boldsymbol{f}(\varrho),$$

(10) $$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)e^{\varrho x}y=e^{\varrho x}\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}+\varrho\right)y,\quad e^{\varrho x}\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)y=\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}-\varrho\right)e^{\varrho x}y.$$

Aus dem Obigen geht ohne weiteres auch die Richtigkeit der früheren Behauptung hervor, dass die symbolischen Producte:

$$\boldsymbol{f}_1\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{f}_2\left(x\frac{d}{dx}\right)\cdots\boldsymbol{f}_m\left(x\frac{d}{dx}\right)y,$$

$$\boldsymbol{f}_1\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{f}_2\left(\frac{d}{dx}\right)\cdots\boldsymbol{f}_m\left(\frac{d}{dx}\right)y,$$

wo die $\boldsymbol{f}(\varrho)$ ganze rationale Functionen von ϱ bezeichnen, von der Reihenfolge der Factoren unabhängig sind.

Beachtet man, dass die gewöhnlichen Regeln der Differentiation von Summen, Differenzen, Producten und Quotienten unverändert bestehen bleiben, wenn das Operationszeichen $x\frac{d}{dx}$ an Stelle von $\frac{d}{dx}$ benutzt wird, so kann die Formel:

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n uv=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\nu}u\,.\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n-\nu}v$$

genau so erhalten werden wie die Leibnitzsche Formel:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n uv=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\nu}u\,.\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-\nu}v.$$

Mit Hülfe dieser Formeln ergeben sich beziehungsweise die allgemeineren:

(11) $$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)uv=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\nu}u}{\underline{|\nu}}\boldsymbol{f}^{(\nu)}\left(x\frac{d}{dx}\right)v,$$

(12) $$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)uv=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\left(\frac{d}{dx}\right)^{\nu}u}{\underline{|\nu}}\boldsymbol{f}^{(\nu)}\left(\frac{d}{dx}\right)v,$$

wo $\boldsymbol{f}^{(\nu)}(\varrho)$ die νte Ableitung von $\boldsymbol{f}(\varrho)$ bezeichnet.

Mit Benutzung der oben erörterten *elementaren* Differentialausdrücke $\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)y$ und $\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)y$ kann jeder andere homogene lineare Differentialausdruck

mit ganzen rationalen Coefficienten — und gleichzeitig auch jede homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten — auf *zwei verschiedene*, charakteristische Formen gebracht werden, welche bei gewissen Untersuchungen vortheilhafter sind als die gewöhnliche, nach den Ableitungen von y geordnete Form.

Jede homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten kann in der That zuvörderst auf die Form gebracht werden:

$$\sum_{\lambda,\mu} A_{\lambda\mu} x^{\lambda} \frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} = 0, \tag{13}$$

wo die A constante Grössen und die λ nicht negative ganze Zahlen bezeichnen. Wird die linke Seite nach Potenzen von x geordnet, so werden die Coefficienten elementare Differentialausdrücke von der Form $\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right) y$. Auf diese Weise erhält die Differentialgleichung die Gestalt:

$$\boldsymbol{f}_0\left(\frac{d}{dx}\right) y + x \boldsymbol{f}_1\left(\frac{d}{dx}\right) y + \cdots + x^n \boldsymbol{f}_n\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0, \tag{14}$$

und dies ist die eine von den charakteristischen Formen.

Soll die Differentialgleichung (13) auf die andere von den fraglichen Formen gebracht werden, so multiplicirt man sie — falls die Zahl λ in irgend einem Gliede kleiner ist als die Zahl μ — mit der niedrigsten ganzzahligen Potenz von x, welche bewirkt, dass λ in keinem Gliede kleiner ist als μ. Setzt man hierauf in jedem Gliede $\lambda = \mu + \nu$ und der Formel (3) gemäss:

$$x^{\mu} \frac{d^{\mu} y}{dx^{\mu}} = x \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} - 1\right) \cdots \left(x \frac{d}{dx} - \mu + 1\right) y,$$

so kann die Differentialgleichung, nachdem die einzelnen Glieder nach Potenzen des Symbols $x \frac{d}{dx}$ entwickelt worden, zunächst auf die Form gebracht werden:

$$\sum_{\lambda,\mu} B_{\lambda\mu} x^{\lambda} \left(x \frac{d}{dx}\right)^{\mu} y = 0.$$

Wird die linke Seite weiter nach Potenzen von x geordnet, so werden die Coefficienten elementare Differentialausdrücke der Form $\boldsymbol{f}\left(x \frac{d}{dx}\right) y$. Die Differentialgleichung erhält also schliesslich die Gestalt:

(15) $$\boldsymbol{F}_0\left(x\frac{d}{dx}\right)y + x\,\boldsymbol{F}_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y + \cdots + x^m\,\boldsymbol{F}_m\left(x\frac{d}{dx}\right)y = 0,$$

und dies ist die andere charakteristische Form.

Zwischen den linken Seiten der Gleichungen (14) und (15) besteht offenbar eine Identität von der Form:

$$x^p\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)y = \sum_{\nu=0}^{m} x^\nu\,\boldsymbol{F}_\nu\left(x\frac{d}{dx}\right)y,$$

wo p eine nicht negative ganze Zahl bezeichnet.

Lassen wir die ganz einfachen Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{F}\left(x\frac{d}{dx}\right)y = 0$$

bei Seite, von denen bekanntlich die erstere mit Hülfe von Exponentialfunctionen und Potenzen, die letztere mit Hülfe von Potenzen und Logarithmen integrirt werden kann, so nehmen die Gleichungen (14) und (15) ihre einfachsten Formen an: die erstere, wenn $n = 1$, und die letztere, wenn $m = 1$ ist. Im Allgemeinen kann jedoch nicht gleichzeitig $n = 1$ und $m = 1$ sein, wofern nämlich (14) und (15) als verschiedene Formen einer und derselben Differentialgleichung betrachtet werden. Damit in der That eine Differentialgleichung auf die Form

$$\boldsymbol{f}_0\left(\frac{d}{dx}\right)y + x\,\boldsymbol{f}_1\left(\frac{d}{dx}\right)y = 0$$

gebracht werden könne, muss sie offenbar eine Laplacesche Differentialgleichung sein:

$$(a_p + b_p x)\frac{d^p y}{dx^p} + (a_{p-1} + b_{p-1}x)\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \cdots + (a_0 + b_0 x)y = 0.$$

Soll sie dagegen die Form

$$\boldsymbol{F}_0\left(x\frac{d}{dx}\right)y + x\,\boldsymbol{F}_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y = 0$$

annehmen können, so muss sie eine *hypergeometrische* Differentialgleichung sein:

$$(a_p + b_p x)x^p\frac{d^p y}{dx^p} + (a_{p-1} + b_{p-1}x)x^{p-1}\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \cdots + (a_0 + b_0 x)y = 0.$$

Die Differentialgleichungen der Functionen e^x und $(1-x)^\alpha$, welche in den am Anfange dieser Arbeit angeführten Integralen (A) und (B) vorkommen, können gleichzeitig als LAPLACEsche und hypergeometrische betrachtet werden.

Es wurde schon am Anfange dieser Arbeit erwähnt, dass die hypergeometrischen Differentialgleichungen bei den Untersuchungen des dritten, die LAPLACEschen aber bei denen des vierten Abschnittes, die Rolle von elementaren Differentialgleichungen spielen werden.

§ 2.

Ähnlich wie sich der Ausdruck

$$\varrho^{k-1}+\varrho^{k-2}\sigma+\varrho^{k-3}\sigma^2+\cdots+\sigma^{k-1}$$

durch Multiplication mit $\varrho-\sigma$ in den binomischen Ausdruck $\varrho^k-\sigma^k$ verwandelt, hat auch der bilineare Differentialausdruck

$$z\cdot\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}-\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^{k-2}y}{dx^{k-2}}+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^{k-3}y}{dx^{k-3}}-\cdots+(-1)^{k-1}\frac{d^{k-1}z}{dx^{k-1}}\cdot y$$

die analoge Eigenthümlichkeit, dass er durch Differentiation in den binomischen Ausdruck $z\frac{d^ky}{dx^k}-(-1)^k y\frac{d^kz}{dx^k}$ übergeht, so dass also:

$$z\frac{d^ky}{dx^k}-(-1)^k y\frac{d^kz}{dx^k}=\frac{d}{dx}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\frac{d^\nu z}{dx^\nu}\cdot\frac{d^{k-1-\nu}y}{dx^{k-1-\nu}} \tag{16}$$

ist. Setzt man $z=\varphi(-x)$, $y=\psi(x)$ und integrirt, so entsteht die Integralformel:

$$\int\psi^{(k)}(x)\,\varphi(-x)\,dx-\int\psi(x)\,\varphi^{(k)}(-x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{k-1}\varphi^{(\nu)}(-x)\,\varphi^{(k-1-\nu)}(x),$$

welche in dem KRONECKERschen Aufsatze *Ueber eine bei der partiellen Integration nützliche Formel* (Berl. Ber. 1885) die Grundlage der Untersuchungen bildet.

Mit Benutzung von (16) erhält man unmittelbar die von LAGRANGE entdeckte Identität:

$$z\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{d^k y}{dx^k} - y\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[p_k(x)z] =$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu \frac{d^{k-1-\nu}y}{dx^{k-1-\nu}}\cdot\frac{d^\nu}{dx^\nu}[p_k(x)z],$$

die zugleich als eine Verallgemeinerung von (16) betrachtet werden kann, und deren Integration eine Verallgemeinerung des obigen Schemas der partiellen Integration liefert.

Wir werfen nun die Frage auf: wie gestaltet sich die Lagrangesche Identität, wenn man an Stelle von $\frac{d}{dx}$ das Zeichen $x\frac{d}{dx}$ auf die im vorangehenden § auseinandergesetzte Weise benutzt?

Da die gewöhnlichen Regeln der Differentiation unverändert bestehen bleiben, wenn das Operationszeichen $x\frac{d}{dx}$ an Stelle von $\frac{d}{dx}$ benutzt wird, so ergiebt sich leicht, dass der Differentialausdruck

$$z\cdot\left(x\frac{d}{dx}\right)^{k-1}y + \left(-x\frac{d}{dx}\right)z\cdot\left(x\frac{d}{dx}\right)^{k-2}y + \left(-x\frac{d}{dx}\right)^2 z\cdot\left(x\frac{d}{dx}\right)^{k-3}y + \cdots + \left(-x\frac{d}{dx}\right)^{k-1}z\cdot y$$

die Eigenthümlichkeit besitzt, dass er bei Ausführung der Operation $x\frac{d}{dx}$ in den binomischen Ausdruck $z\left(x\frac{d}{dx}\right)^k y - y\left(-x\frac{d}{dx}\right)^k z$ übergeht, so dass also:

$$(17)\qquad z\left(x\frac{d}{dx}\right)^k y - y\left(-x\frac{d}{dx}\right)^k z = x\frac{d}{dx}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{k-1-\nu} y\cdot\left(-x\frac{d}{dx}\right)^\nu z$$

ist, falls die Bedeutung von $\left(x\frac{d}{dx}\right)^0 X$ durch $\left(x\frac{d}{dx}\right)^0 X = X$ erklärt wird.

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit c_k und setzt $k=1,2,\cdots,n$, so ergiebt sich durch Addition der so entstehenden Gleichungen:

$$(18)\qquad z\sum_{k=0}^{n} c_k\left(x\frac{d}{dx}\right)^k y - y\sum_{k=0}^{n} c_k\left(-x\frac{d}{dx}\right)^k z = x\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n} c_k\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{k-1-\nu} y\cdot\left(-x\frac{d}{dx}\right)^\nu z,$$

wo die Summation auf der linken Seite wegen $zc_0y - yc_0z = 0$ mit $k=0$ anfangen darf.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\boldsymbol{f}(\varrho)=\sum_{k=0}^{n} c_k\,\varrho^k,$$

und:

$$\boldsymbol{f}[\varrho,\sigma]=\frac{\boldsymbol{f}(\varrho)-\boldsymbol{f}(\sigma)}{\varrho-\sigma}=\sum_{k=1}^{n} c_k\sum_{\nu=0}^{k-1}\varrho^{k-1-\nu}\,\sigma^\nu, \tag{19}$$

so kann die Gleichung (18) in der charakteristischen Form:

$$z\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)y-y\boldsymbol{f}\left(-x\frac{d}{dx}\right)z=x\frac{d}{dx}\boldsymbol{f}\left[x\frac{d}{dx}y,-x\frac{d}{dx}z\right] \tag{20}$$

geschrieben werden, wofern zugleich auf der rechten Seite die Erklärungen:

$$\left(x\frac{d}{dx}y\right)^k=\left(x\frac{d}{dx}\right)^k y,\ \left(-x\frac{d}{dx}z\right)^k=\left(-x\frac{d}{dx}\right)^k z$$

angenommen werden.

Die Gleichung (20) enthält nun die Beantwortung unserer Frage für den Fall, dass es sich um den elementaren Differentialausdruck $\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)y$ handelt. Mit Hülfe von (20) ergiebt sich aber auch die allgemeinere Formel:

$$z\sum_{\nu=0}^{m}x^\nu\boldsymbol{f}_\nu\left(x\frac{d}{dx}\right)y-y\sum_{\nu=0}^{m}\boldsymbol{f}_\nu\left(-x\frac{d}{dx}\right)x^\nu z=x\frac{d}{dx}\sum_{\nu=0}^{m}\boldsymbol{f}_\nu\left[x\frac{d}{dx}y,-x\frac{d}{dx}x^\nu z\right], \tag{21}$$

welche unsere Frage auch für den Fall beantwortet, dass es sich um einen beliebigen homogenen linearen Differentialausdruck mit ganzen rationalen Coefficienten handelt. Die $\boldsymbol{f}_\nu[\varrho,\sigma]$ sind gemäss der Gleichung (19) zu erklärende ganze rationale Functionen.

Indem wir für den *Differenzenquotienten* einer Function $\boldsymbol{f}(\varrho)$ ein besonderes Zeichen $\boldsymbol{f}[\varrho,\sigma]$ anwenden, welches an die ursprüngliche Function erinnert, werden wir späterhin im Stande sein, gewisse verwickelte Differentialausdrücke in verhältnissmässig einfacher Form symbolisch darzustellen. Die Nützlichkeit dieses Zeichens dürfte schon aus (21) einleuchten.

Man erhält eine bemerkenswerthe zweite Form für den Differentialausdruck

$$\boldsymbol{f}\left[x\frac{d}{dx}y,-x\frac{d}{dx}z\right]=\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(x\frac{d}{dx}\right)^{k-1-\nu}y\cdot\left(-x\frac{d}{dx}\right)^{\nu}z, \tag{22}$$

wenn die Herleitung von (20) mehr der Vorstellung angepasst wird, dass $f\left(x\frac{d}{dx}\right)y$ auf die Form

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)y = c_n\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y$$

gebracht ist. Ersetzt man in der evidenten Gleichung

$$z\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)y - y\left(-x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)z = x\frac{d}{dx}(yz)$$

y durch den Differentialausdruck $\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y$, so folgt:

$$\begin{aligned} z\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y &= \left[\left(-x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)z\right]\cdot\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y \\ &\quad + x\frac{d}{dx}\left[z\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y\right]. \end{aligned}$$

Wendet man diese Formel wiederholt auf sich selbst an, so bekommt man, nach Multiplication mit c_n, die Gleichung (20), wo aber $f\left[x\frac{d}{dx}y, -x\frac{d}{dx}z\right]$ nunmehr den folgenden Ausdruck bezeichnet:

$$\begin{aligned} (23)\quad f\left[x\frac{d}{dx}y, -x\frac{d}{dx}z\right] &= c_n z\cdot\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_3\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_4\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y \\ &\quad + c_n\left[\left(-x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)z\right]\cdot\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_3\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_4\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y \\ &\quad + c_n\left[\left(-x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\left(-x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)z\right]\cdot\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_4\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + c_n\left[\left(-x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\left(-x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\left(-x\frac{d}{dx}+\varrho_3\right)\cdots\left(-\frac{d}{dx}+\varrho_{n-1}\right)z\right]\cdot y. \end{aligned}$$

Setzt man in der auf diese Weise erhaltenen Gleichung (20) speciel $y=x^\varrho$ und $z=x^{-\sigma}$, so entsteht, nachdem auf beiden Seiten der Factor $x^{\varrho-\sigma}$ fortgelassen und durch $\varrho-\sigma$ dividirt worden, die Formel:

$$\begin{aligned} \frac{f(\varrho)-f(\sigma)}{\varrho-\sigma} &= c_n(\varrho+\varrho_2)(\varrho+\varrho_3)(\varrho+\varrho_4)\cdots(\varrho+\varrho_n) \\ &\quad + c_n(\sigma+\varrho_1)\cdot(\varrho+\varrho_3)(\varrho+\varrho_4)\cdots(\varrho+\varrho_n) \\ &\quad + c_n(\sigma+\varrho_1)(\sigma+\varrho_2)\cdot(\varrho+\varrho_4)\cdots(\varrho+\varrho_n) \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots \\ &\quad + c_n(\sigma+\varrho_1)(\sigma+\varrho_2)(\sigma+\varrho_3)\cdots(\sigma+\varrho_{n-1}), \end{aligned}$$

die zugleich beweist, dass die durch (23) gegebene neue Definition von $\boldsymbol{f}\left[x\frac{d}{dx}y, -x\frac{d}{dx}z\right]$ mit der früheren (22) übereinstimmt, so dass die beiden, durch $\boldsymbol{f}\left[x\frac{d}{dx}y, -x\frac{d}{dx}z\right]$ bezeichneten und derselben Gleichung (20) genügenden Ausdrücke nicht etwa um eine constante Grösse von einander differiren können.

Ein Paar einfache Eigenschaften des Ausdruckes $\boldsymbol{f}\left[x\frac{d}{dx}y, -x\frac{d}{dx}z\right]$ sollen hier angeführt werden.

Nach der allgemeinen Definition (19) ist $\boldsymbol{f}[\varrho, \sigma]$ eine symmetrische Function von ϱ und σ. Somit ist auch:

$$\boldsymbol{f}\left[x\frac{d}{dx}y, -x\frac{d}{dx}z\right] = \boldsymbol{f}\left[-x\frac{d}{dx}z, x\frac{d}{dx}y\right].$$

Beachtet man, dass $\left(\pm x\frac{d}{dx} + \alpha\right)x^\varrho y = x^\varrho\left(\pm x\frac{d}{dx} \pm \varrho + \alpha\right)y$, so ergeben sich beispielsweise aus (23) die Formeln:

$$(24)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{f}\left[x\frac{d}{dx}x^\varrho y, -x\frac{d}{dx}x^\sigma z\right] = x^{\varrho+\sigma}\boldsymbol{f}\left[\left(x\frac{d}{dx}+\varrho\right)y, \left(-x\frac{d}{dx}-\sigma\right)z\right], \\ x^{\varrho+\sigma}\boldsymbol{f}\left[x\frac{d}{dx}y, -x\frac{d}{dx}z\right] = \boldsymbol{f}\left[\left(x\frac{d}{dx}-\varrho\right)x^\varrho y, \left(-x\frac{d}{dx}+\sigma\right)x^\sigma z\right]. \end{cases}$$

Hierbei müssen die erklärenden Gleichungen beachtet werden:

$$\left[\left(x\frac{d}{dx}\pm\varrho\right)y\right]^k = \left(x\frac{d}{dx}\pm\varrho\right)^k y, \quad \left[\left(-x\frac{d}{dx}\pm\sigma\right)z\right]^k = \left(-x\frac{d}{dx}\pm\sigma\right)^k z.$$

Ferner ist:

$$\boldsymbol{f}\left[x\frac{d}{dx}x^\varrho, -x\frac{d}{dx}x^{-\sigma}\right] = \frac{\boldsymbol{f}(\varrho)-\boldsymbol{f}(\sigma)}{\varrho-\sigma}x^{\varrho-\sigma}.$$

Bezeichnet man durch $\overset{(k)}{\boldsymbol{f}}(\varrho)$ die k^{te} Ableitung von $\boldsymbol{f}(\varrho)$ und durch $\overset{(k)}{\boldsymbol{f}}[\varrho, \sigma]$, gemäss der allgemeinen Definition (19), den Differenzenquotienten von $\overset{(k)}{\boldsymbol{f}}(\varrho)$, so ergiebt sich zunächst:

$$\boldsymbol{f}'[\varrho, \sigma] = \frac{\partial}{\partial\varrho}\boldsymbol{f}[\varrho, \sigma] + \frac{\partial}{\partial\sigma}\boldsymbol{f}[\varrho, \sigma] = \left(\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\boldsymbol{f}[\varrho, \sigma],$$

und sodann die allgemeinere Formel:

$$(25)\qquad \overset{(k)}{\boldsymbol{f}}[\varrho, \sigma] = \left(\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^k \boldsymbol{f}[\varrho, \sigma] = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\frac{\partial^k}{\partial\varrho^\nu\partial\sigma^{k-\nu}}\boldsymbol{f}[\varrho, \sigma].$$

§ 3.

In diesem § werden die Formeln hergeleitet, welche den Untersuchungen des dritten Abschnittes zu Grunde liegen. An Stelle der am Anfange dieser Arbeit erwähnten Integrale (C) sollen im dritten Abschnitte, aus dort anzugebenden Gründen, ausschliesslich Integrale der Form

$$\int\limits_{(l)} \psi\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(t) \frac{dt}{t}$$

behandelt werden. Deswegen beziehen sich auch die Erörterungen dieses § unmittelbar nur auf Integrale dieser Form.

In der Formel (20) soll nunmehr die unabhängige Variable durch t bezeichnet werden. Multiplicirt man zugleich jene Formel mit t^{-1}, so folgt:

$$t^{-1} z \boldsymbol{f}\left(t \frac{d}{dt}\right) y = t^{-1} y \boldsymbol{f}\left(-t \frac{d}{dt}\right) z + \frac{d}{dt} \boldsymbol{f}\left[t \frac{d}{dt} y, -t \frac{d}{dt} z\right].$$

In dieser Gleichung setze man nun $y = \varphi(t)$, $z = \psi\left(\frac{x}{t}\right)$ und beachte, dass $\left(-t \frac{\partial}{\partial t}\right)^k \psi\left(\frac{x}{t}\right) = \left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)^k \psi\left(\frac{x}{t}\right)$ ist, woraus $\boldsymbol{f}\left(-t \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi = \boldsymbol{f}\left(x \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi$ folgt. Alsdann ergiebt sich aus der obigen Gleichung durch Integration:

$$(26) \qquad \int \frac{dt}{t} \psi\left(\frac{x}{t}\right) \boldsymbol{f}\left(t \frac{d}{dt}\right) \varphi(t) = \int \frac{dt}{t} \varphi(t) \boldsymbol{f}\left(x \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi\left(\frac{x}{t}\right) + \boldsymbol{f}\left[t \frac{d}{dt} \varphi, x \frac{\partial}{\partial x} \psi\right].$$

Im Folgenden wird stets angenommen, dass $\varphi(t)$ von dem Parameter x unabhängig ist. Werden nun die Integrale zwischen bestimmten, von x unabhängigen Grenzen genommen, so erhält man aus (26) die bemerkenswerthe Formel:

$$(27) \qquad \int_a^b \frac{dt}{t} \psi\left(\frac{x}{t}\right) \boldsymbol{f}\left(t \frac{d}{dt}\right) \varphi(t) = \boldsymbol{f}\left(x \frac{d}{dx}\right) \int_a^b \psi\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(t) \frac{dt}{t} + \boldsymbol{f}\left[t \frac{d}{dt} \varphi, x \frac{\partial}{\partial x} \psi\right]_{t=a}^{t=b}.$$

Diese Formel wurde unter der Voraussetzung erhalten, dass die Grenzen a und b von x unabhängig sind. Nunmehr soll (26) unter der ebenfalls nahe liegenden Annahme erörtert werden, dass die Integrale zwischen den bestimmten Grenzen $t = a$ und $t = bx$ genommen werden. Auch in diesem Falle wird sich eine Formel ergeben, die im Wesentlichen mit (27) übereinstimmt.

Aus der evidenten Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{bx}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}=\int_a^{bx}\frac{dt}{t}\varphi(t)\frac{\partial}{\partial x}\psi\left(\frac{x}{t}\right)+\frac{1}{x}\left[\varphi\,\psi\right]_{t=bx}$$

folgt:

$$\left(x\frac{d}{dx}+\varrho\right)\int_a^{bx}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}=\int_a^{bx}\frac{dt}{t}\varphi(t)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\varrho\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)+\left[\varphi\,\psi\right]_{t=bx}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich:

$$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_a^{bx}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}=\int_a^{bx}\frac{dt}{t}\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)+f(x),$$

wo $\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)y=c_n\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)y$ ist, während $f(x)$ den folgenden Ausdruck bezeichnet:

$$\begin{aligned}f(x)=&\,c_n\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_2\right)\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_3\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)\left[\varphi\,\psi\right]_{t=bx}\\&+c_n\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_3\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)\left[\varphi\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\varrho_1\right)\psi\right]_{t=bx}\\&+c_n\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_4\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}+\varrho_n\right)\left[\varphi\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\varrho_1\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\varrho_2\right)\psi\right]_{t=bx}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+c_n\left[\varphi\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\varrho_1\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\varrho_2\right)\cdots\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\varrho_{n-1}\right)\psi\right]_{t=bx}.\end{aligned}$$

Bemerkenswerth ist nun, dass der Ausdruck

$$\boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi,\,x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]=\boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi,\,-t\frac{\partial}{\partial t}\psi\right]\tag{28}$$

bei der Substitution $t=bx$ gerade in diesen Ausdruck $f(x)$ übergeht. Um dies zu finden, beachte man zunächst, dass die in $f(x)$ vorkommenden homogenen Ausdrücke von dem nullten Grade:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\varrho_1\right)\cdots\left(x\frac{\partial}{\partial x}+\varrho_k\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)$$

bei der Substitution $t=bx$ von x *unabhängige* Werthe annehmen, die wegen $\left(-t\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\psi=\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\psi$ bezüglich mit denjenigen übereinstimmen, welche die in (28) — man siehe (23), wo x, y, z resp. durch t, φ, ψ zu ersetzen sind — vorkommenden Ausdrücke:

$$\left(-t\frac{\partial}{\partial t}+\varrho_1\right)\cdots\left(-t\frac{\partial}{\partial t}+\varrho_k\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)$$

bei derselben Substitution erhalten. Die Richtigkeit der Behauptung folgt sodann durch einen einfachen Vergleich der beiden fraglichen Ausdrücke. Zugleich haben wir aber auch die folgende Formel erhalten:

$$(29)\qquad \int_a^{bx}\frac{dt}{t}\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)=\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_a^{bx}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}-\boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi,x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=bx}.$$

Verbindet man diese Formel mit derjenigen, die sich aus (26) ergiebt, indem die Integrale zwischen den Grenzen $t=a$ und $t=bx$ ausgedehnt werden, so folgt:

$$(30)\qquad \int_a^{bx}\frac{dt}{t}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_a^{bx}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}-\boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi,x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a},$$

eine Formel, welche im Wesentlichen mit (27) übereinstimmt.

Mit Benutzung von (30) ergiebt sich offenbar die Formel:

$$(31)\qquad \int_{ax}^{bx}\frac{dt}{t}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_{ax}^{bx}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t},$$

welche deshalb bemerkenswerth ist, weil sie den Ausdruck (28) nicht mehr enthält.

Ebenso folgt aus (29) die Formel:

$$(32)\qquad \int_{ax}^{bx}\frac{dt}{t}\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)=\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_{ax}^{bx}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}-\boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi,x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=ax}^{t=bx}.$$

Sind die Grenzen der Integration von x unabhängig, so hat man offenbar die Formel:

$$(33)\qquad \int_a^{b}\frac{dt}{t}\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)=\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_a^{b}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t},$$

welche den Formeln (29) und (32) analog und bei der Herleitung von (27) schon stillschweigend benutzt worden ist.

Das Gemeinsame der in diesem § entwickelten Formeln ist, dass ihre linken Seiten die Form eines bestimmten Integrals haben, worin unter dem Integralzeichen ein mit Hülfe von φ oder ψ als abhängiger Variablen gebildeter, elementarer Differentialausdruck als Factor enthalten ist, während auf ihren rechten Seiten ein bestimmtes Integral der Form:

$$\int \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}$$

in *demselben* Differentialausdrucke als abhängige Variable auftritt. Je nachdem aber $\varphi(t)$ oder $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ in dem links unter dem Integralzeichen vorkommenden Differentialausdrucke sich befindet, zerfallen unsere Formeln in zwei verschiedene Gruppen mit drei analogen Formeln in jeder Gruppe. Der Übersichtlichkeit halber werden sie hier folgenderweise zusammengestellt [1]:

$$\text{I.}\quad \int_a^b \frac{dt}{t}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = \boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_a^b \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t} + \boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi, x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}^{t=b}.$$

$$\text{II.}\quad \int_a^{bx} \frac{dt}{t}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = \boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_a^{bx} \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t} - \boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi, x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t\ a}.$$

$$\text{III.}\quad \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = \boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_{ax}^{bx} \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}.$$

$$\text{I}'.\quad \int_a^b \frac{dt}{t}\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right) = \boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_a^b \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}.$$

$$\text{II}'.\quad \int_a^{bx} \frac{dt}{t}\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right) = \boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_a^{bx} \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t} - \boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi, x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=bx}.$$

$$\text{III}'.\quad \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t}\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right) = \boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_{ax}^{bx} \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t} - \boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi, x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=ax}^{t=bx}.$$

---

[1]) Diese Formeln sind vielleicht früher nicht beachtet worden. Jedenfalls finden sie sich nicht in den bekannten Lehrbüchern (über Differentialgleichungen) von Forsyth und Todhunter, wo die symbolischen Methoden sonst ausführlich besprochen werden. Dasselbe gilt übrigens auch von den Formeln des § 5.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit nicht untersuchen, welche Veränderungen diese Formeln bei den nahe liegenden Substitutionen $\frac{1}{t}=\tau$ und $\frac{x}{t}=\tau$ erleiden.

Mit Rücksicht auf die Anwendungen der obigen Formeln ist es von Wichtigkeit, dass die darin vorkommenden bestimmten Integrale keinen unnöthigen Beschränkungen unterworfen werden. Wir nehmen natürlich den vortheilhaftesten Standpunkt ein, wenn wir die Integration im Allgemeinen auf complexem Wege und zwischen complexen Grenzen ausgeführt denken. In den Formeln I und I′ ist also der Fall nicht ausgeschlossen, dass die Grenzen a und b einander gleich sind, d. h. dass die Integrale über eine geschlossene Curve erstreckt sind. In den Formeln III und III′ kann gleichfalls $a=b$ sein, was den Sinn hat, dass die Integration auf beiden Seiten über eine geschlossene Curve erstreckt wird, die vom Punkte $t=ax$ ausgehend nach demselben Punkte zurück führt.

Bezeichnen wir die jedesmalige, gerade oder krumme Linie, über welche unsere Integrale erstreckt sind, durch l, so kann jede der obigen Gruppen von Formeln durch eine einzige Formel repräsentirt werden. Denn alsdann erhalten die Formeln I, II, III die gemeinsame Gestalt:

$$(34) \qquad \int\limits_{(l)}\frac{dt}{t}\,\psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}+M(x),$$

während I′, II′, III′ die Form:

$$(35) \qquad \int\limits_{(l)}\frac{dt}{t}\,\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)=\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}+N(x)$$

annehmen.

Bei den Anwendungen im dritten Abschnitte werden wir auf diese Formeln (34) und (35) hinweisen. Die nähere Form der Ausdrücke $M(x)$ und $N(x)$, die auch identisch verschwinden können, ergiebt sich jedesmal aus den Gleichungen I bis III′.

Schliesslich darf eine bei den Anwendungen nützliche Regel nicht unerwähnt gelassen werden. Ersetzt man in den Formeln I bis III′ die Function $\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ durch $\left(\frac{x}{t}\right)^{a}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ und φ durch $t^{a}\varphi$, so erhält beispielsweise die Formel I,

nachdem die Formeln (6), (24) benutzt und der allen Gliedern gemeinschaftliche Factor x^a fortgelassen worden, die Gestalt:

$$\int_a^b \frac{dt}{t}\,\psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}+a\right)\varphi(t)=\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}+a\right)\int_a^b \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}+\boldsymbol{f}\left[\left(t\frac{d}{dt}+a\right)\varphi,\left(x\frac{\partial}{\partial x}+a\right)\psi\right]_{t=a}^{t=b},$$

und genau in derselben Weise verändern sich auch die übrigen Formeln. Man hat somit die bei den Anwendungen nützliche Regel: *Wird in den Formeln I bis III′ der symbolische Ausdruck* $\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}\right)$ *durch* $\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}+a\right)$, *resp.* $\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)$ *durch* $\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+a\right)$ *ersetzt, so ist auch*

$$\boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}\varphi, x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right] \text{ durch } \boldsymbol{f}\left[\left(t\frac{d}{dt}+a\right)\varphi, \left(x\frac{\partial}{\partial x}+a\right)\psi\right],$$

zu ersetzen.

Diese Regel stimmt übrigens auch damit überein, dass $\boldsymbol{f}[\varrho+a, \sigma+a]$ gleich den mit Hülfe von $\boldsymbol{f}(\varrho+a)$ gebildeten Differenzenquotienten ist, falls $\boldsymbol{f}[\varrho, \sigma]$ den entsprechenden mit Hülfe von $\boldsymbol{f}(\varrho)$ gebildeten Quotienten bezeichnet; was sich aus der allgemeinen Definition (19) leicht ergiebt.

§ 4.

Für bestimmte Integrale von der Form

$$\int_{(l)} \psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

lassen sich, wofern zugleich an Stelle von $\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)y$ der elementare Differentialausdruck $\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)y$ benutzt wird, ebenfalls Formeln entwickeln, die den im vorigen § enthaltenen analog sind. Die betreffenden Formeln können am schnellsten durch passende Substitutionen aus den Formeln des vorigen § erhalten werden. Da indess auch die direkte Ableitung derselben ein gewisses Interesse haben dürfte, so soll sie hier zuerst kurz angedeutet werden.

Die in § 2 vorkommende Gleichung (16) kann, wenn man die Bezeichnungsweise:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k y = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad \left(-\frac{d}{dx}\right)^k y = (-1)^k \frac{d^k y}{dx^k}$$

annimmt, folgenderweise geschrieben werden:

$$z\left(\frac{d}{dx}\right)^k y - y\left(-\frac{d}{dx}\right)^k z = \frac{d}{dx}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1-\nu} y \cdot \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\nu} z.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit c_k und setzt $k = 1, 2, \cdots, n$, so ergiebt sich durch Addition der so entstehenden Gleichungen:

$$(36) \qquad z\sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{d}{dx}\right)^k y - y\sum_{k=0}^{n} c_k \left(-\frac{d}{dx}\right)^k z = \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1-\nu} y \cdot \left(-\frac{d}{dx}\right)^{\nu} z,$$

wo die Summation auf der linken Seite wegen $z c_0 y - y c_0 z = 0$ mit $k = 0$ anfangen darf.

Setzt man nun wieder:

$$\boldsymbol{f}(\varrho) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varrho^k$$

und:

$$\boldsymbol{f}[\varrho, \sigma] = \frac{\boldsymbol{f}(\varrho) - \boldsymbol{f}(\sigma)}{\varrho - \sigma} = \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{\nu=0}^{k-1} \varrho^{k-1-\nu} \sigma^{\nu},$$

so kann die Gleichung (36) in der charakteristischen Form:

$$(37) \qquad z\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right) y - y\boldsymbol{f}\left(-\frac{d}{dx}\right) z = \frac{d}{dx}\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dx} y, -\frac{d}{dx} z\right]$$

geschrieben werden, wofern zugleich auf der rechten Seite die Erklärungen:

$$\left(\frac{d}{dx} y\right)^k = \left(\frac{d}{dx}\right)^k y, \quad \left(-\frac{d}{dx} z\right)^k = \left(-\frac{d}{dx}\right)^k z$$

festgesetzt werden.

Mit Benutzung von (37) ergiebt sich die allgemeinere Formel:

$$(38) \qquad z\sum_{\nu=0}^{m} x^{\nu} \boldsymbol{f}_{\nu}\left(\frac{d}{dx}\right) y - y\sum_{\nu=0}^{m} \boldsymbol{f}_{\nu}\left(-\frac{d}{dx}\right) x^{\nu} z = \frac{d}{dx}\sum_{\nu=0}^{m} \boldsymbol{f}_{\nu}\left[\frac{d}{dx} y, -\frac{d}{dx} x^{\nu} z\right],$$

welche nichts anderes ist als die LAGRANGEsche Identität in einer besonderen Form.

Beachtet man, dass $\left(\pm\frac{d}{dx}+\alpha\right)e^{\varrho x}y=e^{\varrho x}\left(\pm\frac{d}{dx}\pm\varrho+\alpha\right)y$, so ergeben sich aus

(39) $$\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dx}y, -\frac{d}{dx}z\right]=\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1-\nu}y\cdot\left(-\frac{d}{dx}\right)^{\nu}z$$

die Formeln:

(40) $$\begin{cases}\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dx}e^{\varrho x}y, -\frac{d}{dx}e^{\sigma x}y\right]=e^{(\varrho+\sigma)x}\boldsymbol{f}\left[\left(\frac{d}{dx}+\varrho\right)y, \left(-\frac{d}{dx}-\sigma\right)z\right],\\ e^{(\varrho+\sigma)x}\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dx}y, -\frac{d}{dx}y\right]=\boldsymbol{f}\left[\left(\frac{d}{dx}-\varrho\right)e^{\varrho x}y, \left(-\frac{d}{dx}+\sigma\right)e^{\sigma x}z\right].\end{cases}$$

Hierbei müssen die erklärenden Gleichungen:

$$\left[\left(\frac{d}{dx}+\varrho\right)y\right]^k=\left(\frac{d}{dx}+\varrho\right)^k y, \quad \left[\left(-\frac{d}{dx}+\sigma\right)z\right]^k=\left(-\frac{d}{dx}+\sigma\right)^k z$$

beachtet werden.

Schliesslich ist:

$$\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dx}e^{\varrho x}, -\frac{d}{dx}e^{-\sigma x}\right]=\frac{\boldsymbol{f}(\varrho)-\boldsymbol{f}(\sigma)}{\varrho-\sigma}e^{(\varrho-\sigma)x}.$$

§ 5.

Setzt man in der Formel (37):

$$z\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)y-y\boldsymbol{f}\left(-\frac{d}{dt}\right)z=\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}y, -\frac{d}{dt}z\right],$$

wo die unabhängige Variable nunmehr durch t bezeichnet wird, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(x-t)$ und beachtet, dass $\boldsymbol{f}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x-t)=\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t)$ ist, so ergiebt sich durch Integration:

(41) $$\int dt\cdot\psi(x-t)\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=\int dt\cdot\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t)+\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right].$$

Werden die Integrale zwischen bestimmten, von x unabhängigen Grenzen erstreckt, und ist zugleich φ von x unabhängig, so ergiebt sich hieraus die erste von den nachfolgenden Formeln:

$$\text{I.}\quad \int_a^b dt\cdot\psi(x-t)\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^b \psi(x-t)\varphi(t)\,dt + \boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}^{t=b}.$$

$$\text{II.}\quad \int_a^{b+x} dt\cdot\psi(x-t)\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^{b+x} \psi(x-t)\varphi(t)\,dt - \boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}.$$

$$\text{III.}\quad \int_{a+x}^{b+x} dt\cdot\psi(x-t)\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{a+x}^{b+x} \psi(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

$$\text{I}'.\quad \int_a^b dt\cdot\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t) = \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^b \psi(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

$$\text{II}'.\quad \int_a^{b+x} dt\cdot\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t) = \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^{b+x} \psi(x-t)\varphi(t)\,dt - \boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=b+x}.$$

$$\text{III}'.\quad \int_{a+x}^{b+x} dt\cdot\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t) = \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{a+x}^{b+x} \psi(x-t)\varphi(t)\,dt - \boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a+x}^{t=b+x}.$$

Die Formeln II bis III′ können durch Rechnungen erhalten werden, die den in § 3 ausgeführten genau entsprechen. Die obigen Formeln können aber auch aus den entsprechenden des § 3 auf einem viel kürzeren Wege dadurch abgeleitet werden, dass man in jenen Formeln die Substitutionen $t=e^{\tau}$, $x=e^{\xi}$ bewerkstelligt. Beachtet man, dass $\left(t\frac{d}{dt}\right)^k=\left(\frac{d}{d\tau}\right)^k$ und $\left(x\frac{d}{dx}\right)^k=\left(\frac{d}{d\xi}\right)^k$ wird, so ergiebt sich beispielsweise aus der Formel II des § 3 die Gleichung:

$$\int_{\alpha}^{\beta+\xi} d\tau\cdot\psi\left(e^{\xi-\tau}\right)\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{d\tau}\right)\varphi\left(e^{\tau}\right)=\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{d\xi}\right)\int_{\alpha}^{\beta+\xi}\psi\left(e^{\xi-\tau}\right)\varphi\left(e^{\tau}\right)d\tau+\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{d\tau}\varphi,\frac{\partial}{\partial\xi}\psi\right]_{\tau=\alpha},$$

wo $\alpha=\log a$ und $\beta=\log b$. Weil φ und ψ willkürliche Functionen bezeichnen, so können $\psi(e^{\xi-\tau})$ und $\varphi(e^{\tau})$ unbeschadet der Allgemeingültigkeit durch $\psi(\xi-\tau)$ und $\varphi(\tau)$ ersetzt werden. Werden überdies τ,ξ,α,β resp. durch t,x,a,b ersetzt, so hat man in der That die obige Formel II.

Bezeichnen wir die gerade oder krumme Linie, über welche unsere Integrale erstreckt sind, durch l, so kann jede der obigen Gruppen von Formeln durch eine einzige Formel repräsentirt werden. Denn alsdann erhalten die Formeln I, II, III die gemeinsame Gestalt:

$$\int_{(l)} dt\cdot\psi(x-t)\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi(x-t)\varphi(t)\,dt+M(x), \tag{42}$$

während I′, II′, III′ die Form:

$$(43) \qquad \int\limits_{(l)} dt \cdot \varphi(t) \boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x-t) = \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right) \int\limits_{(l)} \psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt + N(x)$$

annehmen.

Bei den Anwendungen im vierten Abschnitte werden wir auf diese Formeln (42) und (43) hinweisen. Die nähere Form der Ausdrücke $M(x)$ und $N(x)$, die auch identisch verschwinden können, findet man jedesmal aus den Gleichungen I bis III′.

Schliesslich verdient die folgende, an der Hand des § 3 sich leicht ergebende, bei den Anwendungen nützliche Regel beachtet zu werden: *Wird in den obigen Formeln I bis III′ der symbolische Ausdruck* $\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)$ *durch* $\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)$, *resp.* $\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ *durch* $\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha\right)$ *ersetzt, so ist auch*

$$\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right] \text{ durch } \boldsymbol{f}\left[\left(\frac{d}{dt}+a\right)\varphi, \left(\frac{\partial}{\partial x}+a\right)\psi\right]$$

zu ersetzen.

Zweiter Abschnitt.

§ 6.

Es giebt bekanntlich zwei von Laplace herrührende Methoden, von denen die eine die Integration einer gegebenen linearen Differentialgleichung, die andere die Lösung einer vorgelegten linearen Differenzen-Gleichung, durch eine Integralsubstitution abhängig macht von der Integration einer gewissen linearen Differentialgleichung. Da diese beiden Laplaceschen *Transformationen* ihre natürliche Quelle in der Lagrangeschen Identität haben, was aber nicht genügend beachtet zu sein scheint, so sollen sie von diesem Gesichtspunkte aus hier betrachtet werden.

Zuvörderst soll eine bei der Laplaceschen Transformation von Differentialgleichungen nützliche Formel vorausgeschickt werden.

Setzt man in der Formel (12) $u = t^k$, $v = e^{xt}$, so folgt mit Benutzung von (9):

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)[t^k e^{xt}] = e^{xt}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{k}{\nu}t^{k-\nu}\boldsymbol{f}^{(\nu)}(x).$$

Ist k eine *positive ganze* Zahl, so ist $\binom{k}{\nu}=0$, wenn $\nu>k$ ist, während $\boldsymbol{f}^{(\nu)}(x)\equiv 0$, sobald $\nu>n$ ist. Unter der genannten Annahme über k kann also die obere Grenze der Summation durch k ersetzt werden, wodurch sich ergiebt:

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)[t^k e^{xt}] = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\boldsymbol{f}^{(\nu)}(x)\, e^{xt}\, t^{k-\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\boldsymbol{f}^{(\nu)}(x)\frac{d^{k-\nu}e^{xt}}{dx^{k-\nu}} = \frac{d^k}{dx^k}[\boldsymbol{f}(x)\, e^{xt}].$$

Die so erhaltene Formel:

(44) $$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)[t^k e^{xt}] = \frac{d^k}{dx^k}[\boldsymbol{f}(x)\, e^{xt}]$$

kann aber leicht verallgemeinert werden. Multiplicirt man nämlich auf beiden Seiten mit c_k und setzt $k=0, 1, 2, \cdots, m$, so ergiebt sich durch Addition der so entstehenden Gleichungen:

(45) $$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)[\boldsymbol{g}(t)\, e^{xt}] = \boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)[\boldsymbol{f}(x)\, e^{xt}],$$

wo die Abkürzung benutzt wird:

$$\boldsymbol{g}(\varrho) = \sum_{k=0}^{m} c_k \varrho^k.$$

Ersetzt man in (45) x durch $-x$, so folgt:

(46) $$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)[\boldsymbol{g}(t)\, e^{-xt}] = \boldsymbol{g}\left(-\frac{d}{dx}\right)[\boldsymbol{f}(-x)\, e^{-xt}].$$

Beiläufig sei bemerkt, dass man aus (45) mit Benutzung von (10) die eigenthümliche Formel erhält:

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}+x\right)\boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}+t\right)\boldsymbol{f}(x).$$

Das Wesentliche bei der Laplaceschen Transformation von Differentialgleichungen kann nunmehr folgenderweise dargestellt werden.

Ersetzt man in der LAGRANGEschen Identität:

$$z\sum_{\nu=0}^{n} t^\nu \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dt}\right)y = y\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu\left(-\frac{d}{dt}\right)t^\nu z + \frac{d}{dt}\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu\left[\frac{d}{dt}y, -\frac{d}{dt}t^\nu z\right]$$

y durch e^{xt} und z durch ein beliebiges Integral $\varphi(t)$ der Differentialgleichung:

$$(47)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu\left(-\frac{d}{dt}\right)t^\nu\varphi(t) = 0,$$

so ergiebt sich durch Integration zwischen bestimmten Grenzen und mit Benutzung von (44) für den Fall $k=0$:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu(x)\int_a^b e^{xt}\varphi(t)\,t^\nu\,dt = \sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu\left[\frac{d}{dt}e^{xt}, -\frac{d}{dt}t^\nu\varphi\right]_{t=a}^{t=b}.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der Satz:

Ist φ ein integrirender Factor der Differentialgleichung

$$(48)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} t^\nu\boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0,$$

so genügt das bestimmte Integral

$$(49)\qquad \psi(x) = \int_a^b e^{xt}\varphi(t)\,dt$$

der Differentialgleichung

$$(50)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu(x)\frac{d^\nu\psi}{dx^\nu} = 0,$$

wofern die Grenzen des Integrals die Bedingung erfüllen:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu\left[\frac{d}{dt}e^{xt}, -\frac{d}{dt}t^\nu\varphi\right]_{t=a}^{t=b} = 0.$$

Die Differentialgleichung der integrirenden Factoren von (48), d. h. die Gleichung (47), welche auch die adjungirte Differentialgleichung von (48) heisst, ist also identisch mit der sogenannten LAPLACEschen *Transformirten* von (50).

Vergleicht man die Gleichung (50) mit ihrer LAPLACEschen Transformirten (47), so ergiebt sich, dass die Gradzahl jeder dieser Gleichungen in Bezug auf die unabhängige Variable gleich der Ordnungszahl der anderen ist.

Zwischen der Differentialgleichung (50) und ihrer LAPLACEschen Transformirten (47) besteht eine bemerkenswerthe Reciprocität, die wohl zuerst von PETZVAL entdeckt worden ist.

Ersetzt man nämlich in der LAGRANGEschen Identität:

$$z\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu(t)\frac{d^\nu y}{dt^\nu}-y\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dt^\nu}[\boldsymbol{f}_\nu(t)z]=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{\nu-1}(-1)^k\frac{d^{\nu-1-k}y}{dt^{\nu-1-\nu}}\cdot\frac{d^k}{dt^k}[\boldsymbol{f}_\nu(t)z]$$

z durch e^{-xt} und y durch ein beliebiges Integral $\psi(t)$ der Differentialgleichung (50), wo die unabhängige Variable nunmehr durch t bezeichnet wird, so ergiebt sich durch Integration zwischen bestimmten Grenzen und mit Benutzung von (46), wo jetzt $\boldsymbol{f}(\varrho)=\varrho^\nu$ anzunehmen ist:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\int_a^b e^{-xt}\psi(t)\,dt=-\Big|_{t=a}^{t=b}\sum_{\nu=1}^{m}\sum_{k=0}^{\nu-1}(-1)^k\frac{d^{\nu-1-k}\psi}{dt^{\nu-1-k}}\cdot\frac{d^k}{dt^k}[\boldsymbol{f}_\nu(t)e^{-xt}].$$

Ist also ψ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (50), *so genügt das bestimmte Integral*

$$\varphi(x)=\int_a^b e^{-xt}\psi(t)\,dt \tag{51}$$

der LAPLACEschen Transformirten derselben Gleichung, d. h. der Gleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\varphi=0, \tag{52}$$

wofern die Grenzen des Integrals die Bedingung erfüllen:

$$\Big|_{t=a}^{t=b}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=0}^{\nu-1}(-1)^k\frac{d^{\nu-1-k}\psi}{dt^{\nu-1-k}}\cdot\frac{d^k}{dt^k}[\boldsymbol{f}_\nu(t)e^{-xt}]=0.$$

Der Zusammenhang zwischen den Gleichungen (50) und (52) wird also durch die beiden Integralformeln (49) und (51) vermittelt.

§ 7.

Multiplicirt man die Gleichung (21), wo die unabhängige Variable durch t bezeichnet werde, mit t^{-1} und ersetzt darin z durch tz, so ergiebt sich die Lagrange'sche Identität in der Form:

$$z\sum_{\nu=0}^{m} t^{\nu}\boldsymbol{F}_{\nu}\left(t\frac{d}{dt}\right)y - y\sum_{\nu=0}^{m}\boldsymbol{F}_{\nu}\left(-t\frac{d}{dt}-1\right)t^{\nu}z = \frac{d}{dt}\sum_{\nu=0}^{m}\boldsymbol{F}_{\nu}\left[t\frac{d}{dt}y,\, -t\frac{d}{dt}t^{\nu+1}z\right].$$

Ersetzt man weiter z durch ein beliebiges Integral $\Phi(t)$ der Differentialgleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{m}\boldsymbol{F}_{\nu}\left(-t\frac{d}{dt}-1\right)t^{\nu}\Phi = 0, \tag{53}$$

und y durch $\chi(xt)$, wobei χ zunächst irgend eine willkürliche Function bedeute, so folgt durch Integration zwischen bestimmten, von dem Parameter x unabhängigen Grenzen:

$$\sum_{\nu=0}^{m}\int_a^b dt\cdot\Phi(t)\,t^{\nu}\boldsymbol{F}_{\nu}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)\chi(xt) = \sum_{\nu=0}^{m}\int_a^b dt\cdot\Phi(t)\,t^{\nu}\boldsymbol{F}_{\nu}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\chi(xt) =$$

$$\sum_{\nu=0}^{m}\boldsymbol{F}_{\nu}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_a^b\chi(xt)\,\Phi(t)\,t^{\nu}\,dt = \sum_{\nu=0}^{m}\boldsymbol{F}_{\nu}\left[t\frac{\partial}{\partial t}\chi,\, -t\frac{d}{dt}t^{\nu+1}\Phi\right]_{t=a}^{t=b}. \tag{54}$$

Durch passende Specialisirungen von χ können hieraus verschiedene Sätze abgeleitet werden. Die Laplace'sche Transformation von Differenzen-Gleichungen ist z. B. als specieller Fall in dieser Formel enthalten. Nimmt man in der That $\chi(t) = t^{\varrho}$ an und beachtet, dass $\boldsymbol{F}_{\nu}\left(x\frac{d}{dx}\right)x^{\varrho} = x^{\varrho}\boldsymbol{F}_{\nu}(\varrho)$ ist, so hat man den Satz:

Ist Φ ein integrirender Factor der Differentialgleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{m} t^{\nu}\boldsymbol{F}_{\nu}\left(t\frac{d}{dt}\right)y = 0, \tag{55}$$

d. h. ist Φ ein Integral der Differentialgleichung (53), *so genügt das bestimmte Integral*

$$\psi(\varrho)=\int_a^b \Phi(t)\, t^{\varrho}\, dt \tag{56}$$

der Differenzen-Gleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{m} \boldsymbol{F}_{\nu}(\varrho)\, \psi(\varrho+\nu)=0, \tag{57}$$

wofern die Grenzen des Integrals die Bedingung erfüllen:

$$\sum_{\nu=0}^{m} \boldsymbol{F}_{\nu}\left[\varrho, -t\frac{d}{dt} t^{\nu+1}\Phi\right]_{t=a}^{t=b}=0.$$

Die Ermittelung von Lösungen von (57) wird also durch das bestimmte Integral (56) zurückgeführt auf die Integration der Differentialgleichung (53), welche somit die Laplacesche Transformirte der Differenzen-Gleichung (57) ist.

Aber auch die Laplacesche Transformation von Differentialgleichungen ist als specieller Fall in der Formel (54) enthalten. Setzt man nämlich $\chi(t)=e^t$ und:

$$\psi(x)=\int_a^b e^{xt}\Phi(t)\, dt, \quad \frac{d^{\nu}\psi}{dx^{\nu}}=\int_a^b e^{xt}\Phi(t)\, t^{\nu}\, dt,$$

so ergiebt sich aus (54) der Satz:

Ist Φ ein integrirender Factor von (55), *d. h. ist Φ ein Integral der Differentialgleichung* (53), *so genügt das bestimmte Integral*

$$\psi(x)=\int_a^b e^{xt}\Phi(t)\, dt \tag{58}$$

der Differentialgleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{m} \boldsymbol{F}_{\nu}\left(x\frac{d}{dx}\right)\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}\psi(x)=0, \tag{59}$$

wofern die Grenzen des Integrals die Bedingung erfüllen:

$$\sum_{\nu=0}^{m} \boldsymbol{F}_{\nu}\left[t\frac{\partial}{\partial t}e^{xt}, -t\frac{d}{dt}t^{\nu}\varphi\right]_{t=a}^{t=b}=0.$$

Nimmt man an, die Gleichung (55) sei nur eine andere Form von (48), so wird gemäss dem § 1 die linke Seite von (48) nach Multiplication mit einer passenden Potenz x^p mit der linken Seite von (55) identisch. Berücksichtigt man, welche einfache Veränderung die adjungirte Differentialgleichung von (48) hierbei erfährt, und dass sie zugleich mit der adjungirten von (55) identisch wird, so ergiebt sich zwischen den Integralen (49) und (58) die Beziehung:

$$\psi(x) = \frac{d^p}{dx^p}\,\Psi(x)\,.$$

§ 8.

Aus Gründen, auf die wir bei dieser Gelegenheit nicht eingehen wollen, können die Grenzen der bei der LAPLACEschen Transformation von Differentialgleichungen benutzten Integrale unbeschadet der Allgemeinheit von dem Parameter x unabhängig angenommen werden. Bei den nunmehr in Betracht zu nehmenden Integralen:

(60) $$\int_{(l)} (x-t)^{\alpha} \varphi(t)\, dt$$

soll aber der Werth $t = x$ als Integrationsgrenze nicht ausgeschlossen sein. In gewissen Fällen kann dieser Werth $t = x$ sogar gleichzeitig als obere und untere Grenze verwendet werden, was den Sinn hat, dass die Integration über eine geschlossene Curve erstreckt wird, die vom Punkte $t = x$ ausgehend nach demselben Punkte zurück führt.

Man überzeugt sich leicht, dass die Differentiation des Integrals (60) jedenfalls gemäss der Formel:

(61) $$\frac{d}{dx}\int_{(l)} (x-t)^{\alpha} \varphi(t)\, dt = \int_{(l)} \frac{\partial}{\partial x}(x-t)^{\alpha} \varphi(t)\, dt$$

ausgeführt werden kann, wofern nur in dem Falle, dass $t = x$ Integrationsgrenze ist, der reelle Theil von α positiv ist. Diese Bedingung ist in dem genannten Falle eine nothwendige, denn sonst hat die rechte Seite keinen bestimmten Sinn. Dass sie in demselben Falle auch eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (61) ist, folgt aus der evidenten Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{b+x}(x-t)^\alpha\varphi(t)\,dt=(-b)^\alpha\varphi(b+x)+\int_a^{b+x}\frac{\partial}{\partial x}(x-t)^\alpha\varphi(t)\,dt,$$

wenn man b gegen die Null convergiren lässt. Aus (61) folgt die allgemeinere Formel:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}(x-t)^\alpha\varphi(t)\,dt=\int_{(l)}f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(x-t)^\alpha\varphi(t)\,dt. \tag{62}$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten der Gleichung

$$\alpha(x-t)^\alpha=(x-t)\frac{\partial}{\partial x}(x-t)^\alpha=x\frac{\partial}{\partial x}(x-t)^\alpha-t\frac{\partial}{\partial x}(x-t)^\alpha$$

mit $\varphi(t)\,t^{\nu-1}dt$, so ergiebt sich durch Integration und mit Benutzung von (61):

$$\alpha\int_{(l)}(x-t)^\alpha\varphi(t)\,t^{\nu-1}\,dt=x\frac{d}{dx}\int_{(l)}(x-t)^\alpha\varphi(t)\,t^{\nu-1}dt-\frac{d}{dx}\int_{(l)}(x-t)^\alpha\varphi(t)\,t^\nu dt.$$

Setzt man:

$$y_\nu=\int_{(l)}(x-t)^\alpha\varphi(t)\,t^\nu dt,$$

so hat man also:

$$\frac{d}{dx}y_\nu=x\frac{d}{dx}y_{\nu-1}-\alpha\,y_{\nu-1}=\left(x\frac{d}{dx}-\alpha\right)y_{\nu-1}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}y_\nu=\left(x\frac{d}{dx}-\alpha+\nu-1\right)\frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}}y_{\nu-1}$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}y_\nu=\left(x\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(x\frac{d}{dx}-\alpha+1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}-\alpha+\nu-1\right)y=x^{\alpha+1}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(yx^{\nu-\alpha-1}\right). \tag{63}$$

Der letzte Ausdruck kann mit Benutzung von (3) erhalten werden. Diese Formel (63) wird im Nachstehenden angewandt.

Man nehme nun die Lagrange'sche Identität in der Form:

$$z\sum_{\nu=0}^{n}f_\nu\left(\frac{d}{dt}\right)t^\nu y-y\sum_{\nu=0}^{n}t^\nu f_\nu\left(-\frac{d}{dt}\right)z=\frac{d}{dt}\sum_{\nu=0}^{n}f_\nu\left[\frac{d}{dt}t^\nu y,-\frac{d}{dt}z\right]$$

und ersetze hierin z durch $(x-t)^\alpha$ und y durch ein Integral $\varphi(t)$ der Differentialgleichung:

(64) $$\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dt}\right) t^\nu \varphi(t) = 0.$$

Beachtet man zugleich, dass $\boldsymbol{f}_\nu\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)(x-t)^\alpha = \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(x-t)^\alpha$, so folgt aus der obigen Identität durch Integration und mit Benutzung von (62):

$$\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)} (x-t)^\alpha \varphi(t)\, t^\nu\, dt = -\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu \left[\frac{d}{dt} t^\nu \varphi, \frac{\partial}{\partial x}(x-t)^\alpha\right]_{(l)}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die n^{te} Ableitung, so ergiebt sich:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}\frac{d^\nu}{dx^\nu} y_\nu = -\frac{d^n}{dx^n}\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu \left[\frac{d}{dt} t^\nu \varphi, \frac{\partial}{\partial x}(x-t)^\alpha\right]_{(l)},$$

wo y_ν die oben festgesetzte Bedeutung hat. Beachtet man die Formel (63), so ergiebt sich hieraus schliesslich der Satz:

Ist φ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (64), *so befriedigt das bestimmte Integral*

(65) $$y = \int_{(l)} (x-t)^\alpha \varphi(t)\, dt$$

die Differentialgleichung:

(66) $$\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}\left(x\frac{d}{dx}-\alpha\right)\left(x\frac{d}{dx}-\alpha+1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}-\alpha+\nu-1\right) y = 0$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}\left[x^{\alpha+1}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(y x^{\nu-\alpha-1}\right)\right] = 0,$$

wofern das Integral über eine solche Linie erstreckt ist, dass die Bedingung erfüllt wird:

$$\frac{d^n}{dx^n}\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu \left[\frac{d}{dt} t^\nu \varphi, \frac{\partial}{\partial x}(x-t)^\alpha\right]_{(l)} = 0.$$

Man findet leicht, dass jede homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten auf die Form (64) gebracht werden kann.

Das in diesem Abschnitte Dargelegte genügt schon, um zu zeigen, dass die Lagrangesche Identität als die allgemeine Quelle der meisten bisher angewandten Transformationen von Differentialgleichungen vermittelst bestimmter Integrale betrachtet werden kann.

Das am Anfange dieser Arbeit angeführte Integral (B):

$$\chi(x)=\int_{(l)}(1-xt)^{\alpha}\varphi(t)\,dt$$

ist offenbar mit dem Integrale (65), welches $\psi(x)$ heisse, folgenderweise verbunden:

$$\chi(x)=x^{\alpha}\,\psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Eine Differentialgleichung für $\chi(x)$ kann somit leicht aus (66) erhalten werden.

Die in diesem Abschnitte entwickelten Sätze können als die wichtigsten speciellen Fälle von den allgemeineren Sätzen der beiden folgenden Abschnitte betrachtet werden.

Dritter Abschnitt.

§ 9.

An Stelle der am Anfange dieser Arbeit angeführten Integrale:

$$\int_{(l)}\psi(xt)\,\varphi(t)\,dt \tag{67}$$

können wir unbeschadet der Allgemeingültigkeit Integrale von der Form:

$$\int_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t} \tag{68}$$

zum Gegenstand der Untersuchung machen. Diese Integrale (67) und (68) sind in der That nicht wesentlich verschieden, da jedes derselben durch eine leicht ersichtliche rationale Substitution eine Form erhält, welche mit der des anderen

übereinstimmt. Hat man unter der Annahme, dass φ und ψ gegebene lineare Differentialgleichungen befriedigen, eine ebensolche Gleichung für das eine von den Integralen (67) und (68) ermittelt, so lässt sich ohne Mühe auch eine Differentialgleichung für das andere angeben. Es zeigt sich aber, dass die zu bestimmende Differentialgleichung mit Rücksicht auf die gegebenen sich am einfachsten gestaltet, wenn das Integral (68) zum Gegenstand der Untersuchung gemacht wird. Deswegen und weil das Integral (68) zugleich die Eigenheit hat, dass es sich unter allen Integralen der Form:

$$\int\limits_{(l)} \psi\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(t)\, t^{\varrho} dt \tag{69}$$

bei der Substitution $\frac{x}{t} = \tau$ am einfachsten ändert, soll in erster Linie eine Differentialgleichung für (68) ermittelt werden. Ist dieselbe gefunden, so lässt sich auch eine Differentialgleichung für das scheinbar allgemeinere Integral (69) unmittelbar angeben.

In diesem § wird zuvörderst der einfachste Fall behandelt, wo φ und ψ beide hypergeometrische Functionen sind, d. h. wo sie beide Gleichungen von der Form:

$$\boldsymbol{f}\left(t\frac{d}{dt}\right)\psi(t) = t\,\boldsymbol{g}\left(t\frac{d}{dt}\right)\psi(t), \tag{70}$$

$$\boldsymbol{F}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = t\,\boldsymbol{G}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) \tag{71}$$

befriedigen. Ersetzen wir in der Gleichung (70) t durch $\frac{x}{t}$ und sehen x als die neue unabhängige Variable an, so haben wir:

$$\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t}\,\boldsymbol{g}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right). \tag{72}$$

Wird (71) mit $t^{-1}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ und (72) mit $\varphi(t)$ multiplicirt, so folgt durch Integration der so entstehenden Gleichungen:

$$x\int\limits_{(l)}\frac{dt}{t}\frac{t}{x}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{G}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) = \int\limits_{(l)}\frac{dt}{t}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{F}\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t),$$

$$\int\limits_{(l)}\frac{dt}{t}\,t\,\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right) = x\int\limits_{(l)}\frac{dt}{t}\varphi(t)\boldsymbol{g}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right).$$

Wendet man die Formel (34) auf die erstere und die Formel (35) auf die letztere Gleichung an, so resultiren nach Benutzung von (6) zwei Gleichungen von den Formen:

$$(73)\qquad \boldsymbol{G}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\int_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,dt=\boldsymbol{F}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}+P,$$

$$(74)\qquad \boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,dt=x\,\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}+Q.$$

Nach dem in § 3 Dargelegten bezeichnen P und Q — je nachdem die Integrale zwischen den Grenzen a und b, oder zwischen a und bx, oder zwischen ax und bx erstreckt sind — der Reihe nach die folgenden Ausdrücke:

$$(75)\qquad \begin{cases} P=\boldsymbol{F}\left[t\dfrac{d}{dt}\varphi,\ x\dfrac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}^{t=b}-x\,\boldsymbol{G}\left[t\dfrac{d}{dt}\varphi,\ x\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{t}{x}\psi\right]_{t=a}^{t=b}, \\ Q=0, \end{cases}$$

$$(76)\qquad \begin{cases} P=-\boldsymbol{F}\left[t\dfrac{d}{dt}\varphi,\ x\dfrac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}+x\,\boldsymbol{G}\left[t\dfrac{d}{dt}\varphi,\ x\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{t}{x}\psi\right]_{t=a}, \\ Q=\boldsymbol{f}\left[t\dfrac{d}{dt}t\varphi,\ x\dfrac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=bx}-x\,\boldsymbol{g}\left[t\dfrac{d}{dt}\varphi,\ x\dfrac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=bx}, \end{cases}$$

$$(77)\qquad \begin{cases} P=0, \\ Q=\boldsymbol{f}\left[t\dfrac{d}{dt}t\varphi,\ x\dfrac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=ax}^{t=bx}-x\,\boldsymbol{g}\left[t\dfrac{d}{dt}\varphi,\ x\dfrac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=ax}^{t=bx}. \end{cases}$$

Fügt man auf beiden Seiten von (73) den Ausdruck $\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)$, und auf beiden Seiten von (74) den Ausdruck $\boldsymbol{G}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)$ als symbolischen Factor hinzu, so werden die linken Seiten der betreffenden Gleichungen identisch. Durch Elimination ergiebt sich also:

$$(78)\qquad \boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{F}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}=x\,\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{G}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}$$
$$+\boldsymbol{G}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)Q-\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)P.$$

Hieraus leuchtet nun ohne weiteres die Richtigkeit des folgenden Satzes ein: *Ist das Integral*

(79) $$y=\int\limits_{(l)} \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t},$$

wo ψ *und* φ *die resp. Gleichungen:*

(80) $$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\psi(x)=x\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}\right)\psi(x),$$

(81) $$\boldsymbol{F}\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)=x\boldsymbol{G}\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)$$

befriedigen, zwischen solchen Grenzen genommen, dass der Ausdruck

$$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)P-\boldsymbol{G}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)Q$$

identisch verschwindet, so genügt y *der hypergeometrischen Differentialgleichung*

(82) $$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{F}\left(x\frac{d}{dx}\right)y=x\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{G}\left(x\frac{d}{dx}\right)y.$$

Es leuchtet aber unmittelbar auch die Richtigkeit des umgekehrten Satzes ein: *Eine vorgelegte hypergeometrische Differentialgleichung, welche auf die symbolische Form* (82) *gebracht ist — was ja auf mannigfaltige Weise geschehen kann — wird von dem bestimmten Integrale* (79), *wo* ψ *und* φ *den resp. Gleichungen* (80) *und* (81) *genügen, befriedigt, wofern die Grenzen des Integrals die Bedingung*

(83) $$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)P-\boldsymbol{G}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)Q=0$$

erfüllen.

Die obigen Sätze sind indess einer Discussion bedürftig, da nicht ohne weiteres einzusehen ist, ob die Bedingung (83) befriedigt werden kann, und zwar so, dass das Integral (79) zugleich einen bestimmten Sinn erhält. Es mag hier ein für allemal hervorgehoben werden, dass dieselbe Bemerkung auch von den weiteren analogen Sätzen dieser Arbeit gilt, dass wir aber auf eine nähere Discussion der Bedingungsgleichung (83) und der anderen analogen Gleichungen hier verzichten werden, weil eine solche Erörterung von den besonderen Voraussetzungen abhängt, welche über die singulären Stellen und die Constanten der betreffenden Differentialgleichungen gemacht werden können.

Dass die betreffenden Bedingungsgleichungen im Allgemeinen keine schwer zu erfüllende Forderung ausdrücken, soll indess im folgenden § gezeigt werden.

Als specielle Fälle der obigen Sätze können diejenigen betrachtet werden, welche Herr Pochhammer vor einiger Zeit in der Abhandlung *Über die Reduction der Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe* (Crelles Journal Bd. 112) entwickelt hat. Die betreffenden Sätze gehen in der That aus den obigen dadurch hervor, dass man $\psi(x)$ mit den hypergeometrischen Functionen *erster* Ordnung e^x und $(1-x)^{-\alpha}$ nach einander identificirt.

§ 10.

Es werde fortwährend angenommen, dass ψ der hypergeometrischen Differentialgleichung (80) genüge, während φ nunmehr eine beliebige homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten befriedige. Eine solche Gleichung kann nach § 1 stets auf die Form:

(84) $$\sum_{\nu=0}^{m} t^\nu \boldsymbol{F}_\nu\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=0$$

gebracht werden. Wenn die Grenzen der Integration eine gewisse Bedingung erfüllen, so befriedigt das bestimmte Integral (79) auch in dem gegenwärtigen Falle eine homogene lineare Differentialgleichung, die jetzt ermittelt werden soll.

Multiplicirt man (84) mit $t^{-1}\psi\left(\frac{x}{t}\right)$ und (72) mit $t^\nu\varphi(t)$, so folgt durch Integration der so entstehenden Gleichungen:

$$\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu \int\limits_{(l)} \frac{dt}{t}\left(\frac{t}{x}\right)^\nu \psi\left(\frac{x}{t}\right)\boldsymbol{F}_\nu\left(t\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=0,$$

$$\int\limits_{(l)}\frac{dt}{t}t^{\nu+1}\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right)=x\int\limits_{(l)}\frac{dt}{t}t^\nu\varphi(t)\boldsymbol{g}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\left(\frac{x}{t}\right).$$

Wendet man die Formel (34) auf die erstere und die Formel (35) auf die letztere Gleichung an, so resultiren nach Benutzung von (6) zwei Gleichungen von den Formen:

(85) $$\sum_{\nu=0}^{m}\boldsymbol{F}_\nu\left(x\frac{d}{dx}-\nu\right)\int\limits_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,t^\nu\frac{dt}{t}=P,$$

(86) $$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,t^{\nu+1}\frac{dt}{t}=x\,\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,t^{\nu}\frac{dt}{t}+Q_\nu\,.$$

Nach dem in § 3 Dargelegten bezeichnen P und Q_ν — je nachdem die Integrale zwischen den Grenzen a und b, oder zwischen a und bx, oder zwischen ax und bx erstreckt sind — der Reihe nach die folgenden Ausdrücke:

(87) $$\begin{cases} P=-\sum\limits_{\nu=0}^{m}x^\nu \boldsymbol{F}_\nu\left[t\frac{d}{dt}\varphi\,,\,x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x}\right)^\nu\psi\right]_{t=a}^{t=b}, \\ Q_\nu=0, \end{cases}$$

(88) $$\begin{cases} P=+\sum\limits_{\nu=0}^{m}x^\nu \boldsymbol{F}_\nu\left[t\frac{d}{dt}\varphi\,,\,x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x}\right)^\nu\psi\right]_{t=a}, \\ Q_\nu=\boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}t^{\nu+1}\varphi\,,\,x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=bx}-x\,\boldsymbol{g}\left[t\frac{d}{dt}t^\nu\varphi\,,\,x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=bx}, \end{cases}$$

(89) $$\begin{cases} P=0, \\ Q_\nu=\boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}t^{\nu+1}\varphi\,,\,x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=ax}^{t=bx}-x\,\boldsymbol{g}\left[t\frac{d}{dt}t^\nu\varphi\,,\,x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=ax}^{t=bx}. \end{cases}$$

Setzt man in (86) nach einander $\nu=0,1,\cdots,m-1$, so erhält man m Gleichungen, die mit (85) ein System von $m+1$ Gleichungen constituiren, worin ebenso viele bestimmte Integrale:

$$y_\nu=\int\limits_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,t^\nu\frac{dt}{t}\qquad(\nu=0,1,2,\cdots,m)$$

enthalten sind. Aus den genannten $m+1$ Gleichungen sollen jetzt die m Integrale $y_1, y_2, \cdots, y_m$ eliminirt werden. Zu dem Ende setze man zur Abkürzung $x\frac{d}{dx}=\vartheta$. Aus den m Gleichungen, die aus (86) entstehen, indem man $\nu=0,1,\cdots,m-1$ setzt, d. h. aus den Gleichungen:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{f}(\vartheta)\,y_1=x\,\boldsymbol{g}(\vartheta)\,y+Q_1 \\ \boldsymbol{f}(\vartheta)\,y_2=x\,\boldsymbol{g}(\vartheta)\,y_1+Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{f}(\vartheta)\,y_m=x\,\boldsymbol{g}(\vartheta)\,y_{m-1}+Q_{m-1} \end{gathered}$$

ergeben sich successive die folgenden:

$$\boldsymbol{f}(\vartheta)y_1 = x\boldsymbol{g}(\vartheta)y + Q_1$$

$$\boldsymbol{f}(\vartheta)\boldsymbol{f}(\vartheta-1)y_2 = x^2\boldsymbol{g}(\vartheta)\boldsymbol{g}(\vartheta+1)y + Q_1 + x\boldsymbol{g}(\vartheta)Q$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{f}(\vartheta)\boldsymbol{f}(\vartheta-1)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-m+1)y_m = x^m\boldsymbol{g}(\vartheta)\boldsymbol{g}(\vartheta+1)\cdots\boldsymbol{g}(\vartheta+m-1)y$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}x^k\boldsymbol{g}(\vartheta)\cdots\boldsymbol{g}(\vartheta+k-1)Q_{m-1-k},$$

wo $x^k\boldsymbol{g}(\vartheta)\boldsymbol{g}(\vartheta+1)\cdots\boldsymbol{g}(\vartheta+k-1)$ für $k=0$ die Einheit bedeutet.

Multiplicirt man die Gleichung (85) symbolisch mit $\boldsymbol{f}(\vartheta)\boldsymbol{f}(\vartheta-1)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-m+1)$, so hat man:

$$\sum_{\nu=0}^{m}\boldsymbol{F}_\nu(\vartheta-\nu)\boldsymbol{f}(\vartheta)\boldsymbol{f}(\vartheta-1)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-m+1)y_\nu = \boldsymbol{f}(\vartheta)\boldsymbol{f}(\vartheta-1)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-m+1)P.$$

Eliminirt man hieraus mit Hülfe von den vorangehenden Gleichungen die m Grössen $\boldsymbol{f}(\vartheta)\boldsymbol{f}(\vartheta-1)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-\nu+1)y_\nu$, $\nu=1,2,\cdots,m$, so resultirt mit Benutzung von (6) eine Gleichung der Form:

$$\sum_{\nu=0}^{m}x^\nu\boldsymbol{F}_\nu(\vartheta)\boldsymbol{f}(\vartheta)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-m+\nu+1)\boldsymbol{g}(\vartheta)\cdots\boldsymbol{g}(\vartheta+\nu-1)y = S, \tag{90}$$

wo S den folgenden Ausdruck bezeichnet:

$$S = \boldsymbol{f}(\vartheta)\boldsymbol{f}(\vartheta-1)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-m+1)P$$
$$-\sum_{\nu=1}^{m}\boldsymbol{F}_\nu(\vartheta-\nu)\boldsymbol{f}(\vartheta-\nu)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-m+1)\sum_{k=0}^{\nu-1}x^k\boldsymbol{g}(\vartheta)\cdots\boldsymbol{g}(\vartheta-k+1)Q_{\nu-1-k}. \tag{91}$$

Die Gleichung (90) enthält schliesslich den folgenden Satz:

Ist das Integral

$$y = \int_{(l)}\psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}, \tag{92}$$

wo ψ *und* φ *die resp. Gleichungen:*

$$\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\psi(x) = x\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}\right)\psi(x) \tag{93}$$

$$(94)\quad \boldsymbol{F}_0\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)+x\,\boldsymbol{F}_1\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)+x^2\boldsymbol{F}_2\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)+\cdots+x^m\boldsymbol{F}_m\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)=0$$

befriedigen, zwischen solchen Grenzen genommen, dass der obige Ausdruck S identisch verschwindet, so genügt y der Differentialgleichung:

$$(95)\quad \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{F}_0\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}-2\right)\cdots\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}-m+1\right)y \\ +x\,\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{F}_1\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\cdots\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}-m+2\right)y \\ +x^2\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}+1\right)\boldsymbol{F}_2\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}\right)\cdots\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}-m+3\right)y \\ +\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +x^m\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}+1\right)\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}+2\right)\cdots\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}+m-1\right)=_m\left(x\frac{d}{dx}\right)y \end{array}\right\}=0.$$

Diese Gleichung ist nun sehr übersichtlich aus den Ausdrücken zusammengesetzt, welche in den Differentialgleichungen (93) und (94) der Functionen ψ und φ vorkommen.

Man kann sich ohne Mühe überzeugen, dass die Bedingungsgleichung $S=0$ keineswegs eine Forderung ausdrückt, die nur ausnahmsweise erfüllt werden kann. In der That verschwindet (91) identisch, wenn dasselbe mit den sämmtlichen darin enthaltenen Ausdrücken P und Q der Fall ist. Diese Ausdrücke sind wiederum homogene lineare Functionen von denjenigen Werthen, welche die Ausdrücke:

$$(96)\quad \boldsymbol{f}\left[t\frac{d}{dt}t^{\nu+1}\varphi,\ x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right],\ \boldsymbol{g}\left[t\frac{d}{dt}t^{\nu}\varphi,\ x\frac{\partial}{\partial x}\psi\right],\ \boldsymbol{F}_\nu\left[t\frac{d}{dt}\varphi,\ x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t}{x}\right)^\nu\psi\right]$$

annehmen, indem die Variable t gleich den Grenzen des bestimmten Integrals (92) gesetzt wird. Die Ausdrücke (96) können aber durch Glieder von der Form

$$C\,t^\alpha x^\beta\,\psi^{(\lambda)}\left(\frac{x}{t}\right)\varphi^{(\mu)}(t)$$

dargestellt werden, in denen also Ableitungen von den beiden Functionen ψ und φ, oder diese Functionen selbst, *gleichzeitig* vorhanden sind.

Unter den folgenden Voraussetzungen hinsichtlich der Integrationsgrenzen und der Functionen ψ und φ wird nun offenbar die Bedingungsgleichung $S=0$ stets erfüllt.

Wird die Function $\varphi(t)$ sammt ihren in den Ausdrücken (96) vorhandenen Ableitungen für $t=a$ und $t=b$ gleich der Null, so ist $S=0$, wenn das Integral (92) zwischen den Grenzen $t=a$ und $t=b$ genommen wird.

Wird die Function $\varphi(t)$ sammt ihren in den Ausdrücken (96) vorhandenen Ableitungen für $t=a$ gleich der Null, und ebenso die Function $\psi(t)$ sammt ihren in denselben Ausdrücken vorhandenen Ableitungen für $t=\frac{1}{b}$ gleich der Null, so ist $S=0$, wenn das Integral (92) zwischen den Grenzen $t=a$ und $t=bx$ genommen wird.

Wird die Function $\psi(t)$ sammt ihren in den Ausdrücken (96) vorhandenen Ableitungen für $t=\frac{1}{a}$ und $t=\frac{1}{b}$ gleich der Null, so ist $S=0$, wenn das Integral (92) zwischen den Grenzen $t=ax$ und $t=bx$ genommen wird.

In allen diesen Fällen genügt also das Integral (92) der Differentialgleichung (95).

Damit die Grenzen des Integrals (92) die Bedingung $S=0$ erfüllen mögen, ist man in den meisten Fällen genötigt, die oben erwähnten Stellen $t=a$, $t=b$, $t=\frac{1}{a}$, $t=\frac{1}{b}$ unter den *singulären* Stellen der Differentialgleichungen (93) und (94) auszuwählen. Der Grund hierfür liegt in dem Satze, dass jedes Integral einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, welches sammt seinen $(n-1)$ ersten Ableitungen an einer regulären Stelle verschwindet, identisch gleich der Null sein muss.

Durch den obigen Satz ist die erste am Anfange dieser Arbeit aufgeworfene Frage für den Fall beantwortet, dass die Function ψ, welche in dem Integrale (92) den Parameter x enthält, eine hypergeometrische Function ist, während φ eine beliebige homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten befriedigen darf. Der umgekehrte Fall, wo φ den Parameter enthält, lässt sich unmittelbar auf den ersteren Fall zurückführen. Denn durch die Substitution $\frac{x}{\tau}=t$ wird:

$$\int\limits_{(\lambda)} \varphi\left(\frac{x}{\tau}\right)\psi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=\int\limits_{(l)} \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t},$$

und zwar sind die Grenzen der beiden Integrale mit einander folgenderweise verbunden, wobei $\frac{1}{a}=\beta$ und $\frac{1}{b}=\alpha$ ist:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi\psi\frac{d\tau}{\tau}=\int_{ax}^{bx}\psi\varphi\frac{dt}{t}, \quad \int_{\alpha}^{\beta x}\varphi\psi\frac{d\tau}{\tau}=\int_{a}^{bx}\psi\varphi\frac{dt}{t}, \quad \int_{\alpha x}^{\beta x}\varphi\psi\frac{d\tau}{\tau}=\int_{a}^{b}\psi\varphi\frac{dt}{t}.$$

§ 11.

Auch die zweite am Anfange dieser Arbeit aufgeworfene Frage lässt sich nun in dem folgenden Sinne beantworten:

Ist ψ als Integral irgend einer hypergeometrischen Differentialgleichung (93) *fixirt, und ist*

$$(97) \qquad \boldsymbol{f}_0\left(x\frac{d}{dx}\right)y + x\boldsymbol{f}_1\left(x\frac{d}{dx}\right)y + \cdots + x^m\boldsymbol{f}_m\left(x\frac{d}{dx}\right)y = 0$$

eine vorgelegte lineare Differentialgleichung, so lässt sich φ als Integral einer solchen Gleichung (99) *bestimmen, dass das Integral*

$$(98) \qquad \int\limits_{(l)} \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t},$$

wenn der Integrationsweg eine gewisse Bedingung erfüllt, einer Differentialgleichung genügt, welche ebenfalls von den sämmtlichen Integralen der Gleichung (97) *befriedigt wird.*

Sei (93) die Differentialgleichung von ψ, so ist der Satz erwiesen, wenn gezeigt werden kann, dass die vorgelegte Gleichung (97) auf die Form (95) gebracht werden kann. Denn nach dem vorigen § genügt alsdann das Integral (98) der Gleichung (95), wenn φ als Integral von (94) definirt wird und der Integrationsweg die Bedingung $S = 0$ erfüllt. Hierbei bezeichnet S den Ausdruck (91).

Multiplicirt man die Gleichung (97) symbolisch mit

$$\boldsymbol{f}(\vartheta)\boldsymbol{f}(\vartheta-1)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-m+1)\boldsymbol{g}(\vartheta-1)\boldsymbol{g}(\vartheta-2)\cdots\boldsymbol{g}(\vartheta-m),$$

wo $x\frac{d}{dx} = \vartheta$ gesetzt ist, so erhält sie mit Benutzung von (6) die Form:

$$(97') \qquad \sum_{\nu=0}^{m} x^\nu \{\boldsymbol{f}(\vartheta+1)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta+\nu)\boldsymbol{g}(\vartheta-1)\cdots\boldsymbol{g}(\vartheta-m+\nu)\boldsymbol{f}_\nu(\vartheta)\cdot\boldsymbol{f}(\vartheta)\cdots$$
$$\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta-m+\nu+1)\boldsymbol{g}(\vartheta)\cdots\boldsymbol{g}(\vartheta+\nu-1)y\} = 0.$$

Diese Gleichung nimmt nun die Form (95) an, wenn man setzt:

$$\boldsymbol{f}(\vartheta+1)\cdots\boldsymbol{f}(\vartheta+\nu)\boldsymbol{g}(\vartheta-1)\cdots\boldsymbol{g}(\vartheta-m+\nu)\boldsymbol{f}_\nu(\vartheta) = \boldsymbol{F}_\nu(\vartheta).$$

Bezeichnet also φ ein beliebiges Integral der Differentialgleichung:

$$\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu \boldsymbol{F}_\nu\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi$$

(99)
$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}_0\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}-2\right)\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}-3\right)\cdots\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}-m\right)\varphi\\
&+x\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}+1\right)\boldsymbol{f}_1\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}-2\right)\cdots\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}-m+1\right)\varphi\\
&+x^2\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}+1\right)\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}+2\right)\boldsymbol{f}_2\left(x\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\cdots\boldsymbol{g}\left(x\frac{d}{dx}-m+2\right)\varphi\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+x^m\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}+1\right)\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}+2\right)\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}+3\right)\cdots\boldsymbol{f}\left(x\frac{d}{dx}+m\right)\boldsymbol{f}_m\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi
\end{aligned}\right\}=0,$$

so genügt nach dem vorigen § das Integral (98), wenn der Integrationsweg die Bedingung $S=0$ erfüllt, der Differentialgleichung (97'), welche nach dem Obigen auch von den sämmtlichen Integralen der vorgelegten Differentialgleichung (97) befriedigt wird.

§ 12.

Als Beispiel soll hier die LAPLACEsche Differentialgleichung betrachtet werden:

$$(a_m+b_m x)\frac{d^m y}{dx^m}+(a_{m-1}+b_{m-1}x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+(a_0+b_0 x)y=0.$$

Multiplicirt man mit x^m und benutzt die Formel (3), so bringt man diese Gleichung leicht auf die Form:

(100)
$$\begin{aligned}
&a_m x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\left(x\frac{d}{dx}-2\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}-m+1\right)y\\
&+x\left(b_m x\frac{d}{dx}+c_m\right)x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}-m+2\right)y\\
&+x^2\left(b_{m-1}x\frac{d}{dx}+c_{m-1}\right)x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}-1\right)\cdots\left(x\frac{d}{dx}-m+3\right)y\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+x^m\left(b_1 x\frac{d}{dx}+c_1\right)y+x^{m+1}b_0 y=0
\end{aligned}$$

wo die c von den Grössen a und b abhängige Constanten bezeichnen.

Ist *erstens* $a_m = 0$, so entsteht diese Gleichung ohne weiteres aus der allgemeinen Form (95), wenn man darin $\boldsymbol{f}(\varrho) = \varrho$, $\boldsymbol{g}(\varrho) = 1$ und $\boldsymbol{F}_\nu(\varrho) = b_{m-\nu}\varrho + c_{m-\nu}$ annimmt. In diesem Falle wird also die LAPLACEsche Gleichung von dem Integrale

(101) $$\int_{(l)} e^{\frac{x}{t}} \varphi(t) \frac{dt}{t}$$

befriedigt, wofern φ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung erster Ordnung bezeichnet:

$$\left(b_m x \frac{d}{dx} + c_m\right)\varphi + x\left(b_{m-1} x \frac{d}{dx} + c_{m-1}\right)\varphi + \cdots + x^m b_0 \varphi = 0$$

und die Grenzen des Integrals eine gewisse Bedingung erfüllen.

Ist *zweitens* a_m von der Null verschieden, so multiplicire man die Gleichung (100) symbolisch mit $\left(x\frac{d}{dx} - m\right)$, wodurch sie eine Gestalt erhält, die als specieller Fall in (95) enthalten ist. Die so entstandene Gleichung wird nun von dem Integrale (101) befriedigt, wofern φ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung erster Ordnung bezeichnet:

$$a_m \varphi + x\left(b_m x \frac{d}{dx} + c_m\right)\varphi + x^2\left(b_{m-1} x \frac{d}{dx} + c_{m-1}\right)\varphi + \cdots + x^{m+1} b_0 \varphi = 0$$

und die Grenzen des Integrals eine gewisse Bedingung erfüllen.

Vierter Abschnitt.

§ 13.

Es wurde schon am Anfange dieser Arbeit erwähnt, dass die LAPLACEschen Differentialgleichungen bei den Untersuchungen dieses Abschnittes, wo bestimmte Integrale der Form

(102) $$\int_{(l)} \psi(x-t)\, \varphi(t)\, dt$$

verwendet werden, dieselbe elementare Rolle spielen wie die hypergeometrischen Gleichungen im vorigen Abschnitte.

Wir stellen uns also die einfachste Aufgabe, wenn wir zunächst eine Differentialgleichung für das Integral (102) unter der Annahme suchen, dass die Functionen ψ und φ beide LAPLACEsche Differentialgleichungen befriedigen:

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dt}\right)\psi(t)=t\,\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dt}\right)\psi(t), \tag{103}$$

$$\boldsymbol{F}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=t\,\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t). \tag{104}$$

Ersetzen wir in der Gleichung (103) t durch $x-t$ und sehen x als die neue unabhängige Variable an, so haben wir:

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t)=x\,\boldsymbol{g}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t)-t\,\boldsymbol{g}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t). \tag{105}$$

Wird (104) mit $\psi(x-t)$ und (105) mit $\varphi(t)$ multiplicirt, so folgt durch Integration der so entstehenden Gleichungen:

$$\int\limits_{(l)} dt\cdot\psi(x-t)\,\boldsymbol{F}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=\int\limits_{(l)} dt\cdot t\,\psi(x-t)\,\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)=$$

$$x\int\limits_{(l)} dt\cdot\psi(x-t)\,\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)-\int\limits_{(l)} dt\cdot(x-t)\,\psi(x-t)\,\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t),$$

$$\int\limits_{(l)} dt\cdot\varphi(t)\,\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t)=x\int\limits_{(l)} dt\cdot\varphi(t)\,\boldsymbol{g}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t)-\int\limits_{(l)} dt\cdot t\,\varphi(t)\,\boldsymbol{g}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t).$$

Wendet man die Formel (42) auf die erstere und die Formel (43) auf die letztere Gleichung an, so resultiren zwei Gleichungen von den Formen:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\left(\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt&=x\,\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt\\&\quad-\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi(x-t)\,\varphi(t)\,(x-t)\,dt+P,\end{aligned} \tag{106}$$

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt=x\,\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt-\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\int\limits_{(l)}\psi(x-t)\,\varphi(t)\,t\,dt+Q. \tag{107}$$

Nach dem § 5 bezeichnen P und Q — je nachdem die Integrale zwischen den Grenzen a und b, oder zwischen a und $b+x$, oder zwischen $a+x$ und $b+x$ erstreckt sind — der Reihe nach die folgenden Ausdrücke:

$$(108)\quad \begin{cases} P=-\boldsymbol{F}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}^{t=b}+x\boldsymbol{G}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}^{t=b}-\boldsymbol{G}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}(x-t)\psi\right]_{t=a}^{t=b}, \\ Q=0. \end{cases}$$

$$(109)\quad \begin{cases} P=+\boldsymbol{F}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}-x\boldsymbol{G}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}+\boldsymbol{G}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}(x-t)\psi\right]_{t=a}, \\ Q=\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=b+x}-x\boldsymbol{g}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=b+x}+\boldsymbol{g}\left[\frac{d}{dt}t\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=b+x}. \end{cases}$$

$$(110)\quad \begin{cases} P=0, \\ Q=\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a+x}^{t=b+x}-x\boldsymbol{g}\left[\frac{d}{dt}\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a+x}^{t=b+x}+\boldsymbol{g}\left[\frac{d}{dt}t\varphi, \frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a+x}^{t=b+x}. \end{cases}$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$y=\int_{(l)}\psi(x-t)\varphi(t)\,dt, \quad y_1=\int_{(l)}\psi(x-t)\varphi(t)\,t\,dt,$$

so erhalten wir aus (106) und (107) die Gleichungen:

$$\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1=\boldsymbol{F}\left(\frac{d}{dx}\right)y-x\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)y+\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)xy-P=$$

$$=\boldsymbol{F}\left(\frac{d}{dx}\right)y+\boldsymbol{G}'\left(\frac{d}{dx}\right)y-P,$$

$$\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)y_1=x\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)y-\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)y+Q,$$

wo $\boldsymbol{G}'(\varrho)$ die Ableitung von $\boldsymbol{G}(\varrho)$ bezeichnet. Fügt man auf beiden Seiten der ersteren Gleichung den Ausdruck $\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)$, und auf beiden Seiten der letzteren den Ausdruck $\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)$ als symbolischen Factor hinzu, so werden die linken Seiten der betreffenden Gleichungen identisch. Durch Elimination ergiebt sich also, wenn man auch jetzt die Formel $\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)x\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)y=x\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)y+\boldsymbol{G}'\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)y$ beachtet:

$$(111)\quad \left[\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{F}\left(\frac{d}{dx}\right)+\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)\right]y = x\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)y+\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)P+\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)Q.$$

Hieraus leuchtet nun schliesslich die Richtigkeit des folgenden Satzes ein: *Ist das Integral*

$$(112)\quad y=\int_{(l)}\psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

wo ψ *und* φ *die resp. Gleichungen befriedigen:*

$$(113)\quad \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x)=x\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x)$$

$$(114)\quad \boldsymbol{F}\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)=x\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x),$$

zwischen solchen Grenzen genommen, dass die Bedingung

$$(115)\quad \boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)P+\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)Q=0$$

erfüllt ist, so genügt y *der Differentialgleichung*

$$(116)\quad \left[\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{F}\left(\frac{d}{dx}\right)+\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)\right]y=x\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{G}\left(\frac{d}{dx}\right)y,$$

die offenbar auch eine Laplacesche Gleichung ist.

Ist $\boldsymbol{F}_1\left(\frac{d}{dx}\right)y=x\boldsymbol{G}_1\left(\frac{d}{dx}\right)y$ irgend eine gegebene Laplacesche Differentialgleichung, so kann sie im Allgemeinen auf mannigfaltige Weise auf die Form (116) gebracht werden. Denn zuvörderst kann man auf mannigfaltige Weise $\boldsymbol{G}_1(\varrho)=\boldsymbol{g}(\varrho)\boldsymbol{G}(\varrho)$ setzen, wo $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{G}$ ebenfalls ganze rationale Functionen von ϱ bezeichnen. Sind zugleich $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{G}$ so angenommen, dass sie keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so weiss man, dass die Functionen $\boldsymbol{f}(\varrho)$ und $\boldsymbol{F}(\varrho)$ so bestimmt werden können, dass

$$\boldsymbol{g}(\varrho)\boldsymbol{F}(\varrho)+\boldsymbol{f}(\varrho)\boldsymbol{G}(\varrho)=\boldsymbol{F}_1(\varrho)$$

wird, womit die Richtigkeit der Behauptung erwiesen ist. Man hat also auch den umgekehrten Satz:

Eine Laplace*sche Differentialgleichung, welche auf die symbolische Form* (116) *gebracht ist — was nach dem Obigen im Allgemeinen auf mannigfaltige Weise geschehen kann — wird von dem bestimmten Integrale* (112), *wo* ψ *und*

φ den resp. Gleichungen (113) *und* (114) *genügen, befriedigt, wofern die Grenzen des Integrals die Bedingung* (115) *erfüllen.*

§ 14.

Es genüge ψ fortwährend der LAPLACEschen Gleichung (103), während φ nunmehr eine beliebige homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten befriedige. Eine solche Gleichung kann nach § stets auf die Form:

$$\sum_{\nu=0}^{n} t^{\nu} \boldsymbol{F}_{\nu}\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi = 0$$

gebracht werden. Man überzeugt sich nun leicht, dass diese Gleichung ebenfalls auf die Form:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_{\nu}\left(\frac{d}{dt}\right) t^{\nu} \varphi = 0 \tag{117}$$

gebracht werden kann, welche bei den nachfolgenden Untersuchungen angemessener ist als die erstere. Damit in der That die linken Seiten der obigen Gleichungen identisch seien, müssen wegen (12) die nachstehen Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}_{n}(\varrho) = \boldsymbol{f}_{n}(\varrho)\\
&\boldsymbol{F}_{n-1}(\varrho) = \boldsymbol{f}_{n-1}(\varrho) + \binom{m}{1} \boldsymbol{f}_{n}'(\varrho)\\
&\boldsymbol{F}_{n-2}(\varrho) = \boldsymbol{f}_{n-2}(\varrho) + \binom{m-1}{1} \boldsymbol{f}_{n-1}'(\varrho) + \binom{m}{2} \boldsymbol{f}_{n}''(\varrho)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\boldsymbol{F}_{0}(\varrho) = \boldsymbol{f}_{0}(\varrho) + \boldsymbol{f}_{1}'(\varrho) + \boldsymbol{f}_{2}''(\varrho) + \cdots + \boldsymbol{f}^{(n)}(\varrho),
\end{aligned}$$

wodurch die Functionen $\boldsymbol{f}_{n}(\varrho), \cdots, \boldsymbol{f}_{0}(\varrho)$ eindeutig bestimmt werden.

Multiplicirt man (117) mit $\psi(x-t)$ und (105) mit $t^{\nu}\varphi(t)$, so folgt durch Integration der so entstehenden Gleichungen:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \int_{(l)} dt \cdot \psi(x-t) \boldsymbol{f}_{\nu}\left(\frac{d}{dt}\right) t^{\nu} \varphi(t) = 0,$$

$$\int_{(l)} dt\cdot t^{\nu}\varphi(t)\boldsymbol{f}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t)=x\int_{(l)} dt\cdot t^{\nu}\varphi(t)\boldsymbol{g}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t)-\int_{(l)} dt\cdot t^{\nu+1}\varphi(t)\boldsymbol{g}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x-t).$$

Wendet man die Formel (42) auf die erstere und die Formel (43) auf die letztere Gleichung an, so resultiren zwei Gleichungen von den Formen:

$$\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_{\nu}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi(x-t)\varphi(t)t^{\nu}dt=P, \tag{118}$$

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi(x-t)\varphi(t)t^{\nu}dt=x\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi(x-t)\varphi(t)t^{\nu}dt \tag{119}$$
$$-\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_{(l)}\psi(x-t)\varphi(t)t^{\nu+1}dt+Q_{\nu}.$$

Nach dem § 5 bezeichnen P und Q_{ν} — je nachdem die Integrale zwischen den Grenzen a und b, oder zwischen a und $b+x$, oder zwischen $a+x$ und $b+x$ erstreckt sind — der Reihe nach die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{cases} P=-\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_{\nu}\left[\frac{d}{dt}t^{\nu}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}^{t=b}, \\ Q_{\nu}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P=+\sum_{\nu=0}^{n}\boldsymbol{f}_{\nu}\left[\frac{d}{dt}t^{\nu}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a}, \\ Q_{\nu}=\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}t^{\nu}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=b+x}-x\boldsymbol{g}\left[\frac{d}{dt}t^{\nu}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=b+x}+\boldsymbol{g}\left[\frac{d}{dt}t^{\nu+1}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=b+x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} P=0, \\ Q_{\nu}=\boldsymbol{f}\left[\frac{d}{dt}t^{\nu}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a+x}^{t=b+x}-x\boldsymbol{g}\left[\frac{d}{dt}t^{\nu}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a+x}^{t=b+x}+\boldsymbol{g}\left[\frac{d}{dt}t^{\nu+1}\varphi,\frac{\partial}{\partial x}\psi\right]_{t=a+x}^{t=b+x}. \end{cases}$$

Setzt man in (119) nach einander $\nu=0,1,\cdots,n-1$, so erhält man n Gleichungen, die mit (118) ein System von $n+1$ Gleichungen constituiren, worin ebenso viele bestimmte Integrale:

$$y_{\nu}=\int_{(l)}\psi(x-t)\varphi(t)t^{\nu}dt \qquad (\nu=0,1,2,\cdots,n)$$

enthalten sind. Aus den genannten $n+1$ Gleichungen sollen die n Integrale $y_1, y_2, \cdots, y_n$ eliminirt werden.

Mit Benutzung der Bezeichnung y_ν kann die Gleichung (119), wenn zugleich ν durch $\nu-1$ ersetzt wird, folgenderweise geschrieben werden:

$$\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right) y_\nu = \left[x\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right) - \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\right] y_{\nu-1} + Q_{\nu-1}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten symbolisch mit der $(\nu-1)$ten Potenz von $\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)$, die durch $\boldsymbol{g}^{\nu-1} = \boldsymbol{g}^{\nu-1}\left(\frac{d}{dx}\right)$ bezeichnet werde, während $\boldsymbol{g}'$ im Folgenden die Ableitung von $\boldsymbol{g}$ bedeute, so erhält man mit Benutzung von (12):

$$\boldsymbol{g}^\nu y_\nu = [x\boldsymbol{g} + (\nu-1)\boldsymbol{g}' - \boldsymbol{f}]\,\boldsymbol{g}^{\nu-1} y_{\nu-1} + \boldsymbol{g}^{\nu-1} Q_{\nu-1},$$

wo das Zeichen $\frac{d}{dx}$ der Kürze halber überall fortgelassen ist. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich:

$$(120) \quad \boldsymbol{g}^\nu y_\nu = \prod_{\mu=1}^{\nu} [x\boldsymbol{g} + (\nu-\mu)\boldsymbol{g}' - \boldsymbol{f}]\, y + \sum_{k=1}^{\nu} \prod_{\mu=1}^{k-1} [x\boldsymbol{g} + (\nu-\mu)\boldsymbol{g}' - \boldsymbol{f}]\, \boldsymbol{g}^{\nu-k} Q_{\nu-k}.$$

Die symbolischen Producte auf der rechten Seite sind von der Reihenfolge ihrer Factoren natürlich *nicht* unabhängig.

Fügt man auf beiden Seiten von (118) den Ausdruck $\boldsymbol{g}^n\left(\frac{d}{dx}\right)$ als symbolischen Factor hinzu, so ergiebt sich:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dx}\right) \boldsymbol{g}^{n-\nu}\left(\frac{d}{dx}\right) \boldsymbol{g}^\nu\left(\frac{d}{dx}\right) y_\nu = \boldsymbol{g}^n\left(\frac{d}{dx}\right) P.$$

Eliminirt man hieraus mit Hülfe von (120) die n Grössen $\boldsymbol{g}^\nu\left(\frac{d}{dx}\right) y_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots, n$, so resultirt eine Gleichung der Form:

$$(121) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu\left(\frac{d}{dx}\right) \boldsymbol{g}^{n-\nu}\left(\frac{d}{dx}\right) \prod_{\mu=1}^{\nu} \left[x\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right) + (\nu-\mu)\,\boldsymbol{g}'\left(\frac{d}{dx}\right) - \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\right] y = S,$$

wo S den folgenden Ausdruck bezeichnet:

$$(122)\qquad S = \boldsymbol{g}^n P - \sum_{\nu=0}^{n} \boldsymbol{f}_\nu \boldsymbol{g}^{n-\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \prod_{\mu=1}^{k-1} [x\boldsymbol{g} + (\nu-\mu)\boldsymbol{g}' - \boldsymbol{f}]\, \boldsymbol{g}^{\nu-k} Q_{\nu-k}.$$

Hier ist wieder $\frac{d}{dx}$ der Kürze halber fortgelassen.

Aus (121) ergiebt sich nun schliesslich der Satz:

Ist das Integral

$$y = \int_{(l)} \psi(x-t)\, \varphi(t)\, dt,$$

wo ψ *und* φ *die resp. Gleichungen:*

$$(123)\qquad \boldsymbol{f}\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x) = x\boldsymbol{g}\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x),$$

$$(124)\qquad \boldsymbol{f}_0\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x) + \boldsymbol{f}_1\left(\frac{d}{dx}\right)x\varphi(x) + \boldsymbol{f}_2\left(\frac{d}{dx}\right)x^2\varphi(x) + \cdots + \boldsymbol{f}_n\left(\frac{d}{dx}\right)x^n\varphi(x) = 0$$

befriedigen, zwischen solchen Grenzen genommen, dass der obige Ausdruck (122) *identisch verschwindet, so genügt* y *der Differentialgleichung*

$$(125)\qquad 0 = \begin{cases} \boldsymbol{f}_0\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}^n\left(\frac{d}{dx}\right)y \\ +\boldsymbol{f}_1\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}^{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)[x\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}]\,y \\ +\boldsymbol{f}_2\left(\frac{d}{dx}\right)\boldsymbol{g}^{n-2}\left(\frac{d}{dx}\right)[x\boldsymbol{g}+\boldsymbol{g}'-\boldsymbol{f}][x\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}]\,y \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ +\boldsymbol{f}_n\left(\frac{d}{dx}\right)[x\boldsymbol{g}+(n-1)\boldsymbol{g}'-\boldsymbol{f}][x\boldsymbol{g}+(n-2)\boldsymbol{g}'-\boldsymbol{f}]\cdots[x\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}]\,y. \end{cases}$$

Durch ähnliche Betrachtungen, wie sie in § 10 in einem analogen Falle angestellt wurden, ergiebt sich auch hier ohne Mühe, dass die Bedingungsgleichung $S=0$ im Allgemeinen keine schwer zu erfüllende Forderung ausdrückt.

Oben wurde angenommen, dass die Function ψ, welche in dem obigen Integrale den Parameter x enthält, einer Laplaceschen Gleichung genüge, während φ eine beliebige homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten befriedigen darf. Der Fall, wo der Parameter in dieser Function φ enthalten ist, lässt sich auf den ersteren unmittelbar zurückführen. Denn durch die Substitution $x - \tau = t$ wird

$$\int_{(\lambda)} \varphi(x-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = \int_{(l)} \psi(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

und zwar sind die Grenzen der beiden Integrale mit einander derart verbunden, dass:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi\,\psi\,d\tau = \int_{x-\beta}^{x-\alpha} \psi\,\varphi\,dt\,, \quad \int_{\alpha}^{\beta+x} \varphi\,\psi\,d\tau = \int_{-\beta}^{x-\alpha} \psi\,\varphi\,dt\,, \quad \int_{\alpha+x}^{\beta+x} \varphi\,\psi\,d\tau = \int_{-\beta}^{-\alpha} \psi\,\varphi\,dt\,.$$

Bei der Annahme $f(\varrho)=\alpha$, $g(\varrho)=\varrho$ geht die Gleichung (125) in die Gleichung (66) des § 8 über.

Schlussbemerkung.

Zwischen den linearen Differential- und Differenzen-Gleichungen existirt bekanntlich ein Zusammenhang, der nicht nur formaler, sondern auch innerer Art ist. Es fragt sich daher: giebt es auch zwischen den linearen Differenzen-Gleichungen Relationen, welche den in dieser Arbeit zwischen den linearen Differentialgleichungen entwickelten Beziehungen entsprechen und mit diesen im Zusammenhange stehen? Das Nachstehende ist eine kurze Beantwortung dieser Frage, wobei allerdings nur die Ergebnisse des dritten Abschnittes berücksichtigt werden.

Unter $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ verstehen wir, wie in § 10, Integrale von den resp. Differentialgleichungen (93) und (94). Setzt man:

(126) $$\chi(x) = \int_{a}^{b} \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\,\frac{dt}{t}\,,$$

so befriedigt $\chi(x)$ die Differentialgleichung (95), wofern der Ausdruck (91) identisch verschwindet, was im Nachstehenden angenommen wird.

Jetzt sollen die folgenden, über die Functionen $\psi(x)$, $\varphi(x)$, $\chi(x)$ gebildeten bestimmten Integrale betrachtet werden:

$$\Psi(\varrho)=\int_a^b \psi(x)\,x^\varrho\,dx\,,\quad \Phi(x)=\int_a^b \varphi(x)\,x^\varrho\,dx\,,\quad X(\varrho)=\int_a^b \chi(x)\,x^\varrho\,dx\,.$$

Nach einem in § 7 bewiesenen Satze können diejenigen homogenen linearen Differenzen-Gleichungen ohne Mühe angegeben werden, welche die resp. Functionen $\Psi(\varrho)$, $\Phi(\varrho)$, $X(\varrho)$ unter der Voraussetzung befriedigen, dass die Integrationsgrenzen gewisse Bedingungen erfüllen. Zu dem Ende beachte man zunächst, dass die adjungirten Differentialgleichungen von (93), (94), (95) bezüglich folgenderweise lauten:

$$\boldsymbol{f}(-\vartheta-1)\,y=x\,\boldsymbol{g}(-\vartheta-2)\,y\,,$$

$$\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu\,\boldsymbol{F}_\nu(-\vartheta-\nu-1)\,y=0\,,$$

$$\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu\,\boldsymbol{F}_\nu(-\vartheta-\nu-1)\,\boldsymbol{g}(-\vartheta-2)\cdots\boldsymbol{g}(-\vartheta-\nu-1)\,\boldsymbol{f}(-\vartheta-m)\cdots\boldsymbol{f}(-\vartheta-\nu-1)\,y=0,$$

wo zur Abkürzung $x\dfrac{d}{dx}=\vartheta$ gesetzt ist. Nach dem fraglichen Satze des § 7 befriedigen nun die Functionen $\Psi(\varrho), \Phi(\varrho), X(\varrho)$, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind, die nachstehenden Differenzen-Gleichungen:

$$\boldsymbol{f}(-\varrho-1)\,\Psi(\varrho)=\boldsymbol{g}(-\varrho-2)\,\Psi(\varrho+1)\,, \tag{127}$$

$$\sum_{\nu=0}^{m} \boldsymbol{F}_\nu(-\varrho-\nu-1)\,\Phi(\varrho+\nu)=0\,, \tag{128}$$

$$\sum_{\nu=0}^{m} \boldsymbol{F}_\nu(-\varrho-\nu-1)\,\boldsymbol{g}(-\varrho-2)\cdots\boldsymbol{g}(-\varrho-\nu-1)\,\boldsymbol{f}(-\varrho-m)\cdots\boldsymbol{f}(-\varrho-\nu-1)\,X(\varrho+\nu)=0. \tag{129}$$

Zu beachten ist aber jetzt, dass die Gleichung (129) in einem sehr einfachen Zusammenhange mit den Gleichungen (127) und (128) steht. Die Gleichung (129) wird nämlich offenbar erhalten, wenn man unter der Annahme, dass $\Psi(\varrho)$ und $\Phi(\varrho)$ die resp. Gleichungen (127) und (128) befriedigen, eine Differenzen-Gleichung für das Product $\Psi(\varrho)\,\Phi(\varrho)$ ermittelt. Dies veranlasst uns zu der Vermuthung, dass sich das Integral $X(\varrho)$ als Product von den beiden Integralen $\Phi(\varrho)$ und $\Psi(\varrho)$ darstellen lässt. Dass dies unter gewissen Voraussetzungen wirklich der Fall ist, kann folgenderweise evident gemacht werden. Wir nehmen erstens an, dass die untere Grenze a in allen unseren Integralen $=0$ ist,

während die obere Grenze $b=\infty$ sei. Multiplicirt man die beiden Seiten von (126) mit $x^\varrho\,dx$, so folgt durch Integration:

$$X(\varrho)=\int_0^\infty \chi(x)\,x^\varrho dx=\int_0^\infty x^\varrho dx\int_0^\infty \psi\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}=\int_0^\infty \varphi(t)\frac{dt}{t}\int_0^\infty \psi\left(\frac{x}{t}\right)x^\varrho dx,$$

wobei natürlich die Bedingungen für die Umkehrbarkeit der Integrationsfolge erfüllt sein müssen. Macht man in dem doppelten Integral die Substitution $\frac{x}{t}=\tau$, so stellt sich in der That heraus, dass:

$$X(\varrho)=\Phi(\varrho)\,\Psi(\varrho).$$



ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXI. № 7.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE

DE L'EXISTENCE DES INTÉGRALES D'UN SYSTÈME

D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

PAR

ERNST LINDELÖF.



1. Pour mieux faire comprendre l'idée de notre démonstration nous allons considérer d'abord le cas d'une seule équation différentielle

(1) $$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Nous supposons que $f(x, y)$ est une fonction analytique de x et de y, holomorphe pour $x=0$, $y=0$, en sorte qu'on ait

(2) $$f(x, y) = \sum_{m,n} A_{mn} x^m y^n,$$

la série du second membre étant convergente tant que les modules de x et de y restent inférieurs à certaines limites, et nous nous proposons de démontrer que l'équation (1) admet une intégrale qui se réduise à zéro, pour $x=0$, et qui soit holomorphe pour les valeurs de x de module suffisamment petit.

On aura d'abord à démontrer qu'il est possible de satisfaire *formellement* à l'équation (1) par une série suivant les puissances entières et positives de x

(3) $$y = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots\cdots,$$

les c désignant des constantes. A cet effet substituons dans l'équation (1) l'expression précédente de y; on aura

(4) $$\frac{dy}{dx} = c_1 + 2\, c_2 x + \cdots + n\, c_n x^{n-1} + \cdots\cdots,$$

et d'autre part

(5) $$f(x, y) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \cdots\cdots + \varphi_n x^n + \cdots,$$

les φ étant des polynômes par rapport aux c et par rapport aux coefficients A de la série (2). Il est d'ailleurs facile de voir que φ_0 est une constante indépendante des c, et que φ_1 ne dépend que de c_1, φ_2 de c_1 et $c_2, \cdots\cdots$, φ_n de $c_1, c_2, \cdots, c_n$, ce que nous mettons en évidence en écrivant

$$\varphi_i = \varphi_i(c_1, c_2, \cdots, c_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Cela posé, pour que l'équation proposée soit satisfaite par la série (3), il faut que les termes correspondants des séries (4) et (5) soient égaux entre eux, ou bien que

$$\begin{aligned} c_1 &= \varphi_0, \\ 2c_2 &= \varphi_1(c_1), \\ 3c_3 &= \varphi_2(c_1, c_2), \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ nc_n &= \varphi_{n-1}(c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

En résolvant successivement ces égalités, on déterminera sans ambiguité les constantes c, et nous pouvons donc affirmer qu'il existe une série (3) bien déterminée qui vérifie l'équation (1) *formellement*. Il reste à en prouver la convergence, et c'est dans cette partie que notre démonstration diffère essentiellement de celles qui ont été proposées jusqu'ici.

Au lieu de l'équation (1) nous allons considérer la suivante

$$\frac{dy}{dx} = \bar{f}(x, y) = \sum_{m,n} |A_{mn}| x^m y^n. \tag{7}$$

La série du second membre sera convergente pour les valeurs de x et de y comprises dans certains cercles, soit pour

$$|x| \leq \varrho, \quad |y| \leq r;$$

soit M un nombre positif supérieur au module de $\bar{f}(x, y)$ dans ces cercles.

Cherchons encore à satisfaire à l'équation (7) par une série

$$Y = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots\cdots + C_n x^n + \cdots\cdots; \tag{8}$$

on sera conduit, pour la détermination des C, aux équations:

$$
(9) \qquad
\begin{aligned}
C_1 &= \bar{\varphi}_0 ,\\
2\,C_2 &= \bar{\varphi}_1(C_1),\\
3\,C_3 &= \bar{\varphi}_2(C_1, C_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
n\,C_n &= \bar{\varphi}_{n-1}(C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

les $\bar{\varphi}$ désignant les coefficients successifs du développement

$$\bar{f}(x, Y) = \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_1 x + \bar{\varphi}_2 x^2 + \cdots\cdots + \bar{\varphi}_n x^n + \cdots\cdots .$$

D'ailleurs les $\bar{\varphi}$ sont évidemment les mêmes fonctions par rapport aux $|A|$ et aux C que les φ par rapport aux A et aux c; par rapport aux C, en particulier, elles sont des polynômes à coefficients *positifs* supérieurs ou égaux aux modules des coefficients correspondants des φ. En rapprochant les équations (9) des équations (6), on en conclut que les constantes C sont toutes positives et supérieures ou certainement non inférieures aux modules des constantes c de même indice, et par suite, on sera assuré de la convergence de la série (3) une fois qu'on aura démontré que la série (8) converge.

Or, cette dernière démonstration ne présente aucune difficulté. En effet, désignons par Y_μ l'expression

$$Y_\mu = C_1 x + C_2 x^2 + \cdots\cdots + C_\mu x^\mu,$$

et d'une manière analogue, F étant une fonction quelconque développable suivant les puissances entières et positives de x, par $[F]_\mu$ la somme des premiers termes du développement de F jusqu'au terme en x^μ inclusivement. Puisque les développements des expressions

$$\frac{dY}{dx} \quad \text{et} \quad \bar{f}(x, Y)$$

sont identiques, d'après la manière même dont nous avons formé la série Y, on aura

$$\frac{dY_\mu}{dx} = [\bar{f}(x, Y)]_{\mu-1} = \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_1 x + \cdots\cdots \bar{\varphi}_{\mu-1} x^{\mu-1} .$$

Mais nous avons vu que $\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1 \cdots, \bar{\varphi}_{\mu-1}$ ne dépendent pas des constantes $C_\mu, C_{\mu+1}, \cdots\cdots$. On aura donc

$$[f(x, Y)]_{\mu-1} = [\bar{f}(x, Y_{\mu-1})]_{\mu-1},$$

et par suite

$$\frac{dY_\mu}{dx} = [\bar{f}(x, Y_{\mu-1})]_{\mu-1},$$

identité fondamentale dont nous allons tirer la démonstration de la convergence de la série Y.

Écrivons en effet cette identité en donnant successivement à μ les valeurs $1, 2, \cdots\cdots$:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{dY_1}{dx} &= [\bar{f}(x, 0)]_0 = |A_{00}|, \\ \frac{dY_2}{dx} &= [\bar{f}(x, Y_1)]_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{dY_\mu}{dx} &= [\bar{f}(x, Y_{\mu-1})]_{\mu-1}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse on a

$$|A_{00}| < M,$$

et la première équation nous donne par suite, en ne considérant que les valeurs *réelles* et *positives* de x,

$$Y_1 < Mx.$$

Dès lors, si nous imposons à la variable x la condition

$$(11)\qquad 0 \leq x \leq h,$$

h désignant la plus petite des deux quantités

$$\varrho \quad \text{et} \quad \frac{r}{M},$$

on aura

$$Y_1 < r, \quad x \leq \varrho,$$

et par suite, d'après l'hypothèse,

$$\bar{f}(x, Y_1) < M.$$

D'ailleurs, comme x et Y_1 ont des valeurs positives, tous les termes du développement de $\bar{f}(x, Y_1)$ seront positifs, en sorte qu'on aura

$$[\bar{f}(x, Y_1)]_1 \leq \bar{f}(x, Y_1) < M.$$

La seconde équation (10) nous donne donc

$$\frac{dY_2}{dx} < M,$$

d'où il suit, en intégrant,

$$Y_2 < Mx \leq M \cdot \frac{r}{M} = r,$$

x restant toujours dans l'intervalle (11). D'une manière générale, supposons qu'on ait, dans le même intervalle,

$$Y_{\mu-1} < r;$$

on en tirera

$$[f(x, Y_{\mu-1})]_{\mu-1} \leq f(x, Y_{\mu-1}) < M,$$

et par suite, d'après la dernière équation (10),

$$\frac{dY_\mu}{dx} < M,$$

ou encore

$$Y_\mu < Mx \leq r.$$

Donc, les polynômes $Y_1, Y_2, \cdots, Y_\mu, \cdots$ sont tous inférieurs à r, pour les valeurs (11) de x, et on en conclut, en passant à la limite, qu'il en est de même de la série Y. Cette série, ayant une somme finie pour $x = h$, sera par suite convergente pour

$$|x| \leq h.$$

En remontant à l'équation proposée (1), nous pouvons donc affirmer qu'elle admet une intégrale se réduisant à zéro pour $x = 0$, et qui est holomorphe dans le cercle ayant l'origine pour centre et pour rayon la plus petite des deux quantités

$$\varrho \quad \text{et} \quad \frac{r}{M}.$$

2. Passons maintenant au cas d'un système de n équations différentielles ordinaires:

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

En supposant que les F soient des fonctions analytiques holomorphes dans le voisinage des valeurs

$$x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0,$$

nous nous proposons de démontrer que ces équations admettent un système d'intégrales se réduisant respectivement, pour $x = x_0$, à

$$y_1^0 + \eta_1, \quad y_2^0 + \eta_2, \cdots\cdots, y_n^0 + \eta_n,$$

et qui soient développables en séries suivant les puissances entières et positives des quantités

$$x - x_0, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n.$$

Faisons un changement de variables, en posant

$$x = x_0 + \bar{x}, \qquad y_i = y_i^0 + \eta_i + \bar{y}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

le système (1) sera transformé en un système d'équations différentielles entre $\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n$, dont on aura à chercher les intégrales qui, pour $\bar{x} = 0$, se réduisent à zéro. Quant aux quantités $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$, elles joueront, dans le nouveau système, le rôle de paramètres, et l'on voit par suite, que le théorème que nous venons d'énoncer se ramène au suivant, qui comporte même un plus haut degré de généralité que le premier:

Soit donné le système des équations différentielles

$$(2) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \cdots, y_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_m) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

où $f_1, \cdots, f_n$ sont des fonctions analytiques des variables $x, y_1, \cdots, y_n$ et des paramètres $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, développables en séries suivant les puissances entières et positives de toutes ces quantités:

$$f_i = \sum_{\varrho, \mu, \nu} A^{(i)}_{\varrho, \mu_1 \cdots \mu_n, \nu_1 \cdots \nu_m} x^\varrho y_1^{\mu_1} \cdots y_n^{\mu_n} \lambda_1^{\nu_1} \cdots \lambda_m^{\nu_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

ces séries étant convergentes pour les valeurs des arguments de module suffisamment petit; ces conditions supposées remplies, *il existe un système d'intégrales des équations* (2) *qui, pour $x = 0$, se réduisent à zéro, et qui sont développables suivant les puissances de*

$$x, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n,$$

en séries convergentes, tant que les modules de ces quantités restent inférieurs à certaines limites.

Si dans le système (2) nous substituons aux y les séries

$$(3) \qquad y_i = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{\infty} c^{(i)}_{\mu, \nu_1 \cdots \nu_m} x^\mu \lambda_1^{\nu_1} \cdots \lambda_m^{\nu_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

les f se présenteront sous forme de séries suivant les puissances de $x, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$:

$$f_i = \sum_{\mu, \nu} \varphi^{(i)}_{\mu, \nu_1 \cdots \nu_m} x^\mu \lambda_1^{\nu_1} \cdots \lambda_m^{\nu_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots n);$$

il est facile de voir que les φ sont des polynômes par rapport aux A et aux c, et que $\varphi^{(i)}_{\mu, \nu_1 \cdots \nu_m}$ ne dépend que de celles des constantes c dont les indices inférieurs ne dépassent pas les nombres $\mu, \nu_1, \cdots, \nu_m$ respectivement. Par suite, les relations

$$(4) \qquad \mu\, c^{(i)}_{\mu, \nu_1 \cdots \nu_m} = \varphi^{(i)}_{\mu-1, \nu_1 \cdots \nu_m} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n; \mu = 1, 2, \cdots\cdots \infty \\ \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m = 0, 1, 2, \cdots\cdots \infty \end{pmatrix},$$

obtenues en exprimant que le système (2) est vérifié par les séries (3), déterminent successivement et sans ambiguïté les constantes c, et il existe donc un système de séries (3) bien déterminées satisfaisant *formellement* au système proposé.

Pour démontrer la convergence de ces séries, nous allons encore remplacer le système (2) par le suivant:

$$(2)' \quad \frac{dy_i}{dx} = \bar{f}_i(x, y_j, \lambda_l) = \sum_{\varrho, \mu, \nu} \left| A^{(i)}_{\varrho, \mu_1 \cdots \mu_n, \nu_1 \cdots \nu_m} \right| x^\varrho y_1^{\mu_1} \cdots y_n^{\mu_n} \lambda_1^{\nu_1} \cdots \lambda_m^{\nu_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

En raisonnant comme ci-dessus, on trouve que ces équations sont vérifiées *formellement* par les séries

$$(3)' \qquad Y^{(i)} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{\infty} C^{(i)}_{\mu, \nu_1 \cdots \nu_m} x^\mu \lambda_1^{\nu_1} \cdots \lambda_m^{\nu_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

dont les coefficients sont déterminés par les formules de récurrence

$$(4)' \qquad \mu\, C^{(i)}_{\mu, \nu_1 \cdots \nu_m} = \bar{\varphi}^{(i)}_{\mu-1, \nu_1 \cdots \nu_m} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, n; \mu = 1, 2, \cdots\cdots \infty \\ \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m = 0, 1, 2, \cdots \infty \end{pmatrix},$$

les $\bar{\varphi}$ désignant les coefficients successifs des développements

$$\bar{f}_i(x, Y^{(j)}, \lambda_l) = \sum_{\mu, \nu} \bar{\varphi}^{(i)}_{\mu, \nu_1 \cdots \nu_m} x^\mu \lambda_1^{\nu_1} \cdots \lambda_m^{\nu_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Il est d'ailleurs évident que les fonctions $\bar{\varphi}$ sont identiques aux φ à cette différence près que les quantités A et c y sont remplacées par les $|A|$ et les C. En rapprochant les systèmes (4) et (4)', on en conclut que les constantes C, nécessairement positives, sont supérieures ou égales aux modules des constantes

c de mêmes indices, en sorte que les séries (3) seront certainement convergentes dans le même champ que les séries (3)'.

Afin d'établir la convergence de ces dernières séries, il nous sera nécessaire de fixer le champ où convergent les séries figurant aux seconds membres des équations (2)'. Supposons qu'elles soient convergentes pour

(5) $$|x| \leqq \varrho, \quad |y_i| \leqq r_i, \quad |\lambda_k| \leqq \sigma_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, n; k = 1, 2, \cdots, m),$$

en admettant, pour plus de simplicité, que la convergence subsiste encore sur les limites du champ, et soient $M_1, M_2, \cdots, M_n$ des nombres positifs supérieurs respectivement aux modules des fonctions $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_n$ dans les domaines (5). F étant une fonction quelconque développable suivant les puissances entières et positives de $x, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$, et $k, k_1, \cdots, k_m$ des nombres entiers positifs, nous nous servirons encore de la notation $[F]_{k, k_1 \ldots k_m}$ pour désigner le polynôme composé par les termes du développement de F dans lesquels les exposants de $x, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$, sont inférieurs ou égaux aux nombres $k, k_1, \cdots, k_m$ respectivement; en particulier nous poserons

(6) $$Y^{(i)}_{k, k_1 \ldots k_m} = \sum_{\mu=1}^{k} \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \cdots \cdots \sum_{\nu_m=0}^{k_m} C^{(i)}_{\mu, \nu_1 \ldots \nu_m} x^{\mu} \lambda_1^{\nu_1} \ldots \lambda_m^{\nu_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Cela posé, les développements des expressions

$$\frac{dY^{(i)}}{dx} \quad \text{et} \quad \bar{f}_i(x, Y^{(j)}, \lambda_l)$$

étant identiques d'après la manière même dont nous avons formé les séries $Y^{(i)}$, on aura

$$\frac{dY^{(i)}_{k, k_1 \ldots k_m}}{dx} = [\bar{f}_i(x, Y^{(j)}, \lambda_l)]_{k-1, k_1 \ldots k_m} = \sum_{\mu=0}^{k-1} \sum_{\nu_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{k_m} \bar{\varphi}^{(i)}_{\mu, \nu_1 \ldots \nu_m} x^{\mu} \lambda_1^{\nu_1} \ldots \lambda_m^{\nu_m},$$

ou encore, puisque les $\bar{\varphi}$ qui figurent au second membre ne dépendent que de celles des constantes C dont les indices inférieurs ne dépassent pas les nombres $k-1, k_1, \cdots, k_m$,

(7) $$\frac{dY^{(i)}_{k, k_1 \ldots k_m}}{dx} = [\bar{f}_i(x, Y^{(j)}_{k-1, k_1 \ldots k_m}, \lambda_l)]_{k-1, k_1 \ldots k_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

formule de récurrence qui est fondamentale pour notre démonstration.

Dans ce qui suit nous considérons les valeurs *réelles* et *positives* de $x, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$, comprises dans les intervalles

(8) $$0 \leqq x \leqq h; \quad 0 \leqq \lambda_k \leqq \sigma_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, m),$$

h désignant le plus petit des nombres

$$\varrho, \quad \frac{r_1}{M_1}, \quad \frac{r_2}{M_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{r_n}{M_n};$$

nous allons faire voir, en nous fondant sur la formule (7), que *les polynômes* (6), pour ces valeurs des variables, *vérifient les inégalités*

$$(9) \qquad Y^{(i)}_{k, k_1 \ldots k_m} < r_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

et cela *quelque grands que soient les entiers* $k, k_1, \cdots, k_m$.

En effet, pour $k = 1$, la formule (7) nous donne

$$\frac{dY^{(i)}_{1, k_1 \ldots k_m}}{dx} = [\bar{f}_i(x, 0, \lambda_l)]_{0, k_1 \ldots k_m}.$$

Or, comme tous les termes du développement de $\bar{f}_i(x, 0, \lambda_l)$ sont positifs, pour les valeurs positives de $x, \lambda_1, \cdots, \lambda_m$, on aura

$$[\bar{f}_i(x, 0, \lambda_l)]_{0, k_1 \ldots k_m} \leqq \bar{f}_i(x, 0, \lambda_l);$$

mais le second membre est inférieur à M_i, puisque les conditions (5) sont remplies; il vient donc

$$\frac{dY^{(i)}_{1, k_1 \ldots k_m}}{dx} < M_i,$$

et par suite, en intégrant et observant que les polynômes (6) s'annulent pour $x = 0$,

$$Y^{(i)}_{1, k_1 \ldots k_m} < M_i x \leqq M_i h \leqq M_i \cdot \frac{r_i}{M_i} = r_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

La proposition est donc vraie pour $k = 1$. Supposons maintenant qu'on l'eût démontrée pour $k = \mu - 1$; on aurait

$$[\bar{f}_i(x, Y^{(j)}_{\mu-1, k_1 \ldots k_m}, \lambda_l)]_{\mu-1, k_1 \ldots k_m} \leqq \bar{f}_i(x, Y^{(j)}_{\mu-1, k_1 \ldots k_m}, \lambda_l) < M_i,$$

ou bien, d'après la formule (7),

$$\frac{dY^{(i)}_{\mu, k_1 \ldots k_m}}{dx} < M_i,$$

d'où l'on tirerait en intégrant

$$Y^{(i)}_{\mu, k_1 \ldots k_m} < M_i x \leqq M_i \frac{r_i}{M_i} = r_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

La proposition étant donc vraie pour $k = \mu$, si elle l'est pour $k = \mu - 1$, nous devons en conclure qu'elle est vraie pour toute valeur de k et que, par suite, les inégalités (9) subsistent pour toutes les valeurs des indices $k, k_1, \cdots, k_m$, comme nous l'avions avancé. En d'autres termes, les séries (3)' auront une somme finie pour les valeurs des variables comprises dans les intervalles (8), et seront, par suite, certainement convergentes dans les cercles

$$|x| \leq h, \quad |\lambda_1| \leq \sigma_1, \cdots\cdots, |\lambda_m| \leq \sigma_m. \tag{10}$$

D'après ce que nous avons dit plus haut, il en sera de même des séries (3), et nous pouvons donc affirmer, en retournant aux équations (2), qu'elles admettent un système d'intégrales se réduisant à zéro, pour $x = 0$, et qui sont développables en séries suivant les puissances entières et positives de $x, \lambda_1, \cdots \lambda_m$, ces séries étant convergentes dans les domaines (10). Le théorème de la p. 8 est donc démontré.

Nous ferons observer, avant de quitter ce sujet, que le champ (10), où nous avons démontré la convergence des séries (3) et (3)', est identique à celui auquel on est conduit en appliquant aux équations (2)' la méthode des approximations successives [1]).

3. Pour établir l'existence des fonctions implicites, on a généralement recours au théorème que nous venons de démontrer, mais on peut aussi, à l'exemple de M. Picard [2]), y parvenir sans passer par les équations différentielles, notamment en s'appuyant sur le célèbre théorème de MM. Weierstrass et Poincaré relatif à la décomposition en facteurs d'une fonction à plusieurs variables. Nous allons faire voir comment, en supposant connue la théorie des fonctions implicites, on peut démontrer, presque sans calcul, le théorème du numéro précédent. En effet, comparons les équations différentielles (2)' au système des équations finies

$$y_i = x \bar{f}_i(x, y_1, \cdots, y_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_m) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{11}$$

La théorie des fonctions implicites nous apprend que, pour les valeurs des variables de module suffisamment petit, les solutions de ces équations se présentent sous la forme

---

[1]) E. Picard: *Traité d'Analyse*, tome III p. 88. Voir aussi notre mémoire: *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires;* Journal de Mathématiques (4e série), tome X, 1894.

[2]) *Traité d'Analyse*, tome II, Chapitre IX.

$$(12) \qquad y_i = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_m=0}^{\infty} B^{(i)}_{\mu,\nu_1\cdots\nu_m} x^{\mu} \lambda_1^{\nu_1} \cdots \lambda_m^{\nu_m} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

les séries des seconds membres étant convergentes dans certains cercles ayant l'origine pour centre. Or on voit de suite, en conservant les notations du n° 2, que les constantes B, d'ailleurs *positives*, se déterminent par les équations de récurrence

$$B^{(i)}_{\mu,\nu_1\cdots\nu_m} = \bar{\varphi}^{(i)}_{\mu-1,\nu_1\cdots\nu_m} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, n; \mu = 1, 2, \cdots \infty \\ \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m = 0, 1, 2, \cdots \infty \end{pmatrix},$$

les φ désignant les mêmes fonctions que plus haut, à cette différence près que les C y ont été remplacées par les B. On en conclut, en rapprochant les équations précédentes des formules (4)', que les constantes B sont plus grandes que les constantes C de mêmes indices, et nous pouvons donc affirmer que les séries (3)', et par suite aussi les séries (3), convergent dans le même champ que les séries (12).

Il serait d'ailleurs facile d'établir directement la convergence des séries (12) satisfaisant aux équations (11); on y parviendrait en suivant une méthode tout analogue à celle du n° 2, et on serait conduit, pour les séries (12), au même champ de convergence que nous avons trouvé plus haut pour les séries (3) et (3)'. Cependant, comme la réussite de notre méthode tient essentiellement à la forme particulière du système (11), et qu'il nous semble assez difficile d'arriver par des considérations de ce genre à établir, dans le cas général, l'existence des fonctions implicites, nous ne jugeons pas cette question assez intéressante pour y insister davantage.

ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXI. № 8.

SUR LE

RATTACHEMENT DE CLICHÉS ASTROPHOTOGRAPHIQUES.

PAR

ANDERS DONNER.

Dans le Bulletin du Comité de la Carte du Ciel, M. PROSPER HENRY a publié une méthode pour la correction des constantes d'un cliché astrophotographique à l'aide de rattachements aux clichés voisins situés sur le même parallèle [1]. Si élégante que soit cette méthode au point de vue mathématique et si commode qu'elle soit pour le calcul, elle ne suffit néanmoins pas dans tous les cas qui peuvent se présenter dans la pratique. On doit se rappeler que cette méthode se sert exclusivement des étoiles situées aux bords est et ouest du cliché et par préférence des étoiles des coins. C'est précisément dans ces parties du cliché que les images sont le plus déformées et où par suite les mesures deviennent le plus incertaines. En outre les plus faibles étoiles manquent dans les coins du cliché; le nombre des étoiles qu'on peut employer dans la comparaison des deux clichés devient par cette raison souvent si restreint, surtout dans les contrées du ciel où les étoiles sont plus éparses, qu'un rattachement ne donnerait que des résultats illusoires, ou qu'il devient simplement impossible à effectuer. Dans la pratique, nous avons déjà rencontré de tels cas. Afin de pouvoir dans tous les cas utiliser d'une manière convenable la méthode si compendieuse de M. HENRY, il serait à recommander aux observatoires, qui n'auront pas encore terminé leurs travaux photographiques, de diminuer la distance entre les centres des clichés consécutifs en ascension droite et d'augmenter ainsi la largeur de la zone commune à deux clichés. Le travail de mesure et de réduction n'augmentera pas sensiblement par ce changement de disposition, car

---

[1] PROSPER HENRY: Détermination des éléments d'un cliché d'étoiles du Catalogue de la Carte du Ciel à l'Observatoire de Paris. Bulletin du Comité International Permanent pour l'exécution photographique de la Carte du Ciel. T. II p. 359 et suivv.

il deviendra inutile de mesurer les bords extrêmes des clichés. Pour les observatoires où les levés photographiques sont déjà terminés, il devient nécessaire de compléter la méthode de M. HENRY par d'autres procédés.

Il y a encore une raison pour la recherche d'autres méthodes. La méthode de M. HENRY détermine, comme je le montrerai ci-dessous, la correction de l'échelle du cliché en se basant presque exclusivement sur les ascensions droites ou sur les coordonnées x, tandis que la détermination de l'orientation du cliché est fondée principalement sur les déclinaisons ou les coordonnées y. Pourtant les recherches concernant la distorsion du champ de l'objectif de l'astrographe d'Helsingfors [1]) semblent avec une certaine probabilité indiquer, au moins pour cet instrument, l'existence d'échelles différentes en x et en y; et je veux ajouter que des recherches ultérieures ont plutôt confirmé le même résultat. Il devient donc nécessaire d'avoir recours à une méthode qui peut donner non seulement l'échelle des x et l'orientation des y, mais encore l'échelle des y et l'orientation des x.

Dans ce qui suit, je me propose d'exposer deux méthodes pour effectuer la détermination des constantes d'un cliché. L'un de ces procédés est fondé sur les principes de la méthode des moindres carrés, en utilisant les rattachements du cliché à tous les 6 clichés qui le couvrent en partie. Dans l'autre procédé, qui se fonde encore sur les mêmes rattachements, on a à la méthode des moindres carrés substitué un calcul approximatif et plus simple; on obtient ainsi des équations entre les corrections des divers clichés et en éliminant ensuite les corrections de l'échelle et de l'orientation, il en résulte des équations entre les corrections seules des centres des clichés. Celles- là sont alors déterminées par des approximations successives; les corrections auparavant éliminées s'obtiennent ensuite presque immédiatement. Dans cette dernière méthode, qui est celle dont nous nous servons maintenant, la détermination des constantes d'un cliché s'appuie en certains sens sur toutes les étoiles de repère situées dans un endroit du ciel, que l'on peut étendre à volonté.

Pour effectuer le rattachement de deux clichés nous avons, de même que M. HENRY, formé deux étoiles fictives, dont les coordonnées étaient les moyennes des coordonnées rectangulaires de certaines étoiles réelles. Mais au lieu de comparer les coordonnées sphériques déduites des moyennes correspondantes sur les deux clichés et de supposer ainsi que ces moyennes appartiennent à un seul et

---

[1]) Détermination des constantes nécessaires pour la réduction des clichés etc. — Acta Societatis Scientiarum Fennicæ. T. XXI N:o 8. pp. 59 et 66; et Sur les déterminations des constantes de l'appareil de mesure etc. Bulletin du Comité I. P. pour la Carte du Ciel. T. II p. 441—443.

même point du ciel — supposition qui n'est pas exacte à la rigueur — nous avons comparé directement les coordonnées de chacune des étoiles employées. La moyenne des différences devait enfin appartenir à la place de l'étoile fictive.

Il est bien vrai que, par une telle modification du procédé, le travail devient considérablement augmenté. Mais en revanche on obtient un contrôle des opérations de mesure et de calcul presque indispensable, tandis que dans l'autre cas une erreur p. ex. d'une dixième de minute d'arc peut bien échapper à l'attention du calculateur, quand il deduit les coordonnées des étoiles fictives, et ensuite altérer complètement le rattachement. L'augmentation de travail est encore compensé par une plus grande sureté de calcul.

Pour effectuer la comparaison des images d'une même étoile sur deux clichés, il n'est pas nécessaire de calculer auparavant les coordonnées sphériques. Car en connaissant les positions des centres des clichés sur le ciel, on peut, les coordonnées rectangulaires d'un objet sur l'un des clichés étant données, se proposer de déduire les coordonnées rectangulaires correspondantes sur l'autre cliché. Voici la déduction des formules, par lesquelles ce transport de l'un des clichés à l'autre peut être fait.

Comparaison directe des coordonnées rectangulaires d'une étoile sur deux clichés.

Comme point de départ nous avons employé les formules

1) $$\operatorname{tg}(\alpha - \alpha_0) = \frac{x \cdot \sin 1'}{\cos \delta_0 - y \sin 1' \cdot \sin \delta_0}$$

2) $$\operatorname{tg} \delta \sec(\alpha - \alpha_0) = \frac{\sin \delta_0 + y \sin 1' \cdot \cos \delta_0}{\cos \delta_0 - y \sin 1' \cdot \sin \delta_0}$$

liant entre elles les coordonnées rectangulaires x, y, d'une étoile sur une plaque tangente à la sphère céleste au point (α_0, δ_0), et les coordonnées sphériques α, δ de la même étoile. L'axe des y, positif vers le nord, est dirigé suivant la tangente au cercle de déclinaison du centre du cliché. L'axe des x, perpendiculaire à celui des y, est positif dans la direction des α croissants.

Des coordonnées x et y nous voulons directement déduire les coordonnées rectangulaires correspondantes x^1 et y^1 sur un autre cliché ayant son centre aux points α_0^1, δ_0^1.

Des formules 1) et 2) nous tirons pour le second cliché:

3) $$x^1 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} \delta = (\sin \delta_0^1 + y^1 \sin 1' \cdot \cos \delta_0^1) \sin (\alpha - \alpha_0^1)$$

4) $$x^1 \cdot \sin 1' \cdot \cos (\alpha - \alpha_0^1) = (\cos \delta_0^1 - y^1 \sin 1' \cdot \sin \delta_0^1) \cdot \sin (\alpha - \alpha_0^1)$$

En éliminant maintenant y^1 entre les équations 3) et 4), on trouve enfin l'équation:

5) $$x^1 \cdot \sin 1' [\cos \delta_0^1 \cos (\alpha - \alpha_0^1) + \operatorname{tg} \delta \sin \delta_0^1] = \sin (\alpha - \alpha_0^1)$$

Ayant remplacé ici $(\alpha - \alpha_0^1)$ par $(\alpha - \alpha_0) - (\alpha_0^1 - \alpha_0)$ et décomposé le cosinus, on obtient, en employant les formules 1) et 2) et d'après quelques légères transformations, l'expression de x^1 comme fonction de x et de y:

6) $$x^1 \cdot \sin 1' = \frac{- \sin \Delta \alpha_0 \cos \delta_0 + x \sin 1' \cos \Delta \alpha_0 + y \sin 1' \cdot \sin \delta_0 \sin \Delta \alpha_0}{(\sin \delta_0 \sin \delta_0^1 + \cos \delta_0 \cos \delta_0^1 \cos \Delta \alpha_0) + x \sin 1' \cos \delta_0^1 \sin \Delta \alpha_0 + y \sin 1' \cdot (\cos \delta_0 \sin \delta_0^1 - \sin \delta_0 \sin \delta_0^1 \cos \Delta \alpha_0)}$$

où

7) $$\Delta \alpha_0 = \alpha_0^1 - \alpha_0$$

Pour avoir l'expression correspondante de y^1, nous égalons les deux expressions de $\operatorname{tg} \delta$, obtenues des deux clichés selon la formule 2):

8) $$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \delta_0 + y \sin 1' \cdot \cos \delta_0}{\cos \delta_0 - y \sin 1' \cdot \sin \delta_0} \cdot \cos (\alpha - \alpha_0) = \frac{\sin \delta_0^1 + y^1 \sin 1' \cdot \cos \delta_0^1}{\cos \delta_0^1 - y^1 \sin 1' \cdot \sin \delta_0^1} \cdot \cos (\alpha - \alpha_0^1)$$

Si nous opérons avec cette équation d'une manière semblable à celle qui nous a conduit de l'équation 5) à l'équation 6), nous obtenons l'expression de y^1 comme fonction de x et de y:

9) $$x^1 \cdot \sin 1' = \frac{(\sin \delta_0 \cos \delta_0^1 - \cos \delta_0 \sin \delta_0^1 \cos \Delta \alpha_0) - x \sin 1' \cdot \sin \delta_0^1 \sin \Delta \alpha_0 + y \sin 1' (\cos \delta_0 \cos \delta_0^1 + \sin \delta_0 \sin \delta_0^1 \cos \Delta \alpha_0)}{(\sin \delta_0 \sin \delta_0^1 + \cos \delta_0 \cos \delta_0^1 \cos \Delta \alpha_0) + x \sin 1' \cdot \cos \delta_0^1 \sin \Delta \alpha_0 + y \sin 1' \cdot (\cos \delta_0 \sin \delta_0^1 - \sin \delta_0 \cos \delta_0^1 \cos \Delta \alpha_0)}$$

Les expressions 6) et 9) sont du reste capables d'une forme un peu plus élégante, que l'on obtient en introduisant la distance Δ_0 comptée sur la sphère

entre les points centraux (α_0, δ_0) et (α_0^1, δ_0^1), ainsi que les angles p_0 et p_0^1 que fait cette distance avec les cercles de déclinaison à ces points. Le triangle sphérique entre ces points et le pôle nord contient donc les côtés $\varDelta_0$, $90^0-\delta_0$ et $90^0-\delta_0^1$ et les angles $\varDelta\alpha_0$, $180-p_0^1$ et p_0.

En introduisant ces constantes, les équations 6) et 9) deviennent:

10) $$\begin{cases} x^1 \sin 1' = \dfrac{-\sin \varDelta_0 \sin p_0^1 + x \sin 1' \cos \varDelta\alpha_0 + y \sin 1' \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \sin \varDelta_0 \sin p_0^1}{\cos \varDelta_0 + \sin \varDelta_0 \cdot \sin 1' (x \sin p_0 + y \cos p_0)} \\ y^1 \cdot \sin 1' = \dfrac{-\sin \varDelta_0 \cos p_0^1 - x \sin 1' \cdot \operatorname{tg} \delta_0^1 \sin \varDelta_0 \sin p_0 + y \sin 1' (\cos \varDelta_0 \cos \varDelta\alpha_0 + \sin^2 \varDelta_0 \sin p_0 \sin p_0^1)}{\cos \varDelta_0 + \sin \varDelta_0 \cdot \sin 1' (x \sin p_0 + y \cos p_0)} \end{cases}$$

De ces formules on voit aisément que

$$x^1 - x + \frac{\operatorname{tg} \varDelta_0 \sin p_0^1}{\sin 1'}$$

est une quantité, qui, outre un terme proportionnel à y et qui est du second ordre, ne contient que des termes, qui par rapport à x, y, $\varDelta_0$ ou $\varDelta\alpha_0$, sond te troisième ordre ou d'ordres encore plus élevés. Le cas est encore le même avec la quantité

$$y^1 - y + \frac{\operatorname{tg} \varDelta_0 \cos p_0^1}{\sin 1'}$$

avec la seule différence que le terme de second ordre est ici proportionnel à x. Les constantes:

$$\frac{\operatorname{tg} \varDelta_0 \sin p_0^1}{\sin 1'} \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{tg} \varDelta_0 \cos p_0^1}{\sin 1'}$$

sont les valeurs que prennent x^1 et y^1 pour $x = 0$, $y = 0$; elles sont donc aussi à peu près égales à

$$-\varDelta\alpha_0 \cdot \cos \frac{\delta_0 + \delta_0^1}{2} \quad \text{et à} \quad (\delta_0 - \delta_0^1).$$

Les clichés adjacents appartenant au Catalogue du Ciel, qui est maintenant en construction, sont tous distants en déclinaison soit de 0', soit de 60'; en ascension droite ils sont séparés par des espaces, qui pour une même déclinaison

sont constants. Les termes constants sont donc les mêmes dans toutes les comparaisons de deux clichés quelconques dont les déclinaisons des centres ainsi que leur différence en ascension droite ont les mêmes valeurs. Dans toutes ces comparaisons on peut encore employer les mêmes tables auxiliaires.

La construction de ces tables, servant à faciliter le calcul des x^1 et y^1, est basée sur les principes qui dérivent des faits ci-dessus cités. Nous avons ordonné les calculs de manière à réduire encore le plus possible le nombre des tables auxiliaires. Voici le système de formules que nous avons employé:

A) *Comparaison de deux clichés dont les centres se trouvent sur une même parallèle:*

α_0^1 *toujours* plus grand que α_0

$$y^1 = y + I + II$$

$$x^1 = x - K_0 + III + IV$$

Ici K_0 est le nombre entier de minutes le plus proche de $\frac{\mathrm{tg}\,\Delta_0 \sin p^1}{\sin 1'}$; les corrections III et I sont du second ordre, II et IV du troisième ordre. La correction III contient en outre un terme constant.

Pour effectuer le calcul de y^1 et de x^1 il faut employer 4 tableaux donnant chacun une des corrections I, II, III ou IV. Les expressions de ces corrections sont:

$$I = -\frac{\mathrm{tg}\,\Delta_0 \cos p_0^1}{\sin 1'} - x\,\frac{\sin \delta_0 \sin \Delta\alpha_0}{\cos^2 \Delta_0} + x^2 \cdot {}^1/_2 \sin 1' \sin 2\,\delta_0 \sin^2 \Delta\alpha_0 + \cdots$$

$$II = y \cdot \frac{\sin^2 \Delta_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta\alpha_0}{\cos^2 \Delta_0} - y^2 \cdot \sin 1'\, tg\, \Delta_0 \cos p_0 - xy \cdot \sin 1' \cos \delta_0 \sin \Delta\alpha_0 + \cdots$$

$$III = \left(K_0 - \frac{\mathrm{tg}\,\Delta_0 \sin p_0^1}{\sin 1'}\right) + y\,\frac{\sin \delta_0 \sin \Delta\alpha_0}{\cos^2 \Delta_0} + \cdots\cdots$$

$$IV = x \cdot \frac{\sin^2 \Delta_0 - 2 \sin^2 \delta_0 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta\alpha_0}{\cos^2 \Delta_0} - x^2 \cdot \sin 1'\, \mathrm{tg}\,\Delta_0 \sin p_0 - xy \sin 1' \cdot 3 \sin 2\,\delta_0 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta\alpha_0 + \cdots\cdots$$

Les fonctions de Δ_0, p_0 et p_0^1 sont à calculer d'après les formules:

$$\sin \Delta_0 \sin p_0 = \sin \Delta_0 \sin p_0^1 = \cos \delta_0 \sin \Delta \alpha_0$$

$$\sin \Delta_0 \cos p_0 = -\sin \Delta_0 \cos p_0^1 = \sin 2\, \delta_0 \sin^2 \tfrac{1}{2} \Delta \alpha_0$$

$$\cos \Delta_0 = 1 - 2 \cos^2 \delta_0 \sin^2 \tfrac{1}{2} \Delta \alpha_0$$

Cet arrangement des tables a l'avantage que les grands termes I et III n'ont qu'un seul argument. Les termes II & IV sont toujours relativement petits dans la zone d'Helsingfors.

B) *Comparaison de deux clichés, si* $\delta_0' = 60' + \delta_0$ *et* $\alpha_0^1 > \alpha_0$.

$$y^1 = y - 60' \cdot 0000 + I_{(x)} + II_{(x,y)}$$

$$x^1 = x - K_0^1 + III_{(y)} + IV_{(x,y)}$$

K_0^1 est aussi le nombre entier qui s'approche le plus de $\dfrac{\operatorname{tg} \Delta_0 \sin p_0^1}{\sin 1'}$. Les tables donnant les 4 corrections sont construites en employant les formules suivantes:

$$I_{(x)} = -\frac{\operatorname{tg} \Delta_0 \cos p_0^1}{\sin 1'} - x \frac{\sin \delta_0 \sin \Delta \alpha_0}{\cos^2 \Delta_0} + x^2 \cdot \tfrac{1}{2} \sin 1' \sin 2\, \delta_0^1 \cdot \sin^2 \Delta \alpha_0 + \cdots$$

$$II_{(x,y)} = y \frac{\sin^2 \Delta_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \alpha_0}{\cos^2 \Delta_0} - y^2 \cdot \sin 1' \cdot \operatorname{tg} \Delta_0 \cos p_0 - xy \cdot \sin 1' \cos (2\, \delta_0^1 - \delta_0) \sin \Delta \alpha_0 + \cdots$$

$$III_{(y)} = \left(K_0^1 - \frac{\operatorname{tg} \Delta_0 \sin p_0^1}{\sin 1'}\right) + y \frac{\sin \delta_0^1 \sin \Delta \alpha_0}{\cos^2 \Delta_0} - y^2 \sin 1' \cdot \sin \delta_0 \sin (\delta_0^1 - \delta_0) \sin \Delta \alpha_0 + \cdots\cdots$$

$$IV_{(x,y)} = x \frac{\sin^2 \Delta_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} (\delta_0^1 - \delta_0) - 2 \sin \delta_0 \sin \delta_0^1 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta \alpha_0}{\cos^2 \Delta_0}$$

$$- x^2 \sin 1' \cdot \operatorname{tg} \Delta_0 \sin p_0 - x\, y \sin 1' [\sin (\delta_0^1 - \delta_0) + 3 \cos \delta_0^1 \sin \delta_0 \cdot 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} \Delta \alpha_0] + \cdots\cdots$$

Les fonctions de Δ_0, p_0 et p_0^1, qui entrent dans ces expressions, peuvent être calculées ainsi:

$$\sin \Delta_0 \sin p_0^1 = \cos \delta_0 \sin \Delta \alpha_0$$

$$\sin \Delta_0 \cos p_0^1 = -\sin \delta_0 \cos \delta_0^1 + \cos \delta_0 \sin \delta_0^1 \cos \Delta \alpha_0$$

$$\sin \Delta_0 \sin p_0 = \cos \delta_0^1 \sin \Delta \alpha_0$$

$$\sin \Delta_0 \cos p_0 = \sin \delta_0^1 \cos \delta_0 - \cos \delta_0^1 \sin \delta_0 \cos \Delta \alpha_0$$

$$\cos \Delta_0 = \sin \delta_0 \sin \delta_0^1 + \cos \delta_0 \cos \delta_0^1 \cos \Delta \alpha_0$$

Des 4 tables nécessaires, celles qui donnent les grandes corrections $I_{(x)}$ et $III_{(y)}$ n'ont encore ici qu'un seul argument.

C) *Comparaison de deux clichés, si* $\delta_0^1 = 60' + \delta_0$ *et* $\alpha_0^1 < \alpha_0$.

$$y^1 = y - 60' \cdot 0000 + I_{(-x)} + II_{(-x,y)}$$

$$x^1 = x + K_0^1 - III_{(y)} - IV_{(-x,y)}$$

Les tables qu'il faut employer dans ce cas, sont les mêmes que celles du cas précédent (B); seulement, il faut dans l'emploi des tables, changer la coordonnée x de chaque étoile en $-x$.

Si le millimètre sur la plaque n'est pas exactement égal à une minute d'arc, on devra encore introduire des facteurs correspondants dans les différents termes des expressions précédentes.

Pour pouvoir effectuer toutes les comparaisons dont on pourra avoir besoin dans une certaine zone, il faut donc pour chaque δ_0 construire deux séries de tables auxiliaires, chacune se composant de 4 tableaux, l'une de ces séries servant dans les comparaisons de l'espèce A), l'autre dans celles des espèces B) et C). La construction des tables est relativement facile, vu que les coëfficients de x, y, x^2, y^2 et xy ainsi que les termes qui n'en dépendent pas sont fonctions seulement des déclinaisons des centres des clichés ainsi que de leur différence en ascension droite et qu'ils sont par conséquent constants pour toute l'étendue des tables. Aussi n'est- il pas nécessaire d'étendre ces tableaux sur toute l'étendue commune aux deux clichés, mais seulement sur la partie plus éloignée des centres des *deux* clichés, d'où il faut autant que possible chercher les étoiles à employer pour le rattachement.

Le travail pour calculer les x^1 et y^1 d'une étoile est un peu moindre que celui pour trouver les α et δ. Mais il faut se rappeler que si l'on veut com-

parer les α et δ d'une étoile, il faut les déduire des x et y sur les *deux* plaques, tandis qu'ici le calcul des x^1 et y^1 ne doit être fait que pour l'une d'elles. Le travail est donç réduit de plus de la moitié.

Réduction du cliché à la position voulue de son centre.

Pour n'être pas obligé de calculer des tables spéciales pour chaque comparaison de deux clichés, il faut présumer, comme on l'a fait dans le cas précédent, que les centres des clichés ont à la rigueur leurs positions voulues sur le ciel. Comme cela n'est évidemment le cas qu'exceptionellement, il faut réduire les x et y à ce quelles auraient été, si le centre du cliché avait eu sa position voulue.

La réduction se fait d'après les formules:

$$\left\{\begin{aligned} dy &= d\,\delta_0\,(1 + y^2 \sin^2 1' + \cdots) + d\,\alpha_0\,(x \sin 1' \sin \delta_0 + xy \sin^2 1' \cos \delta_0 + \cdots) \\ dx &= xy \cdot \sin^2 1' \cdot d\,\delta_0 + \cdots + d\,\alpha_0\,(\cos \delta_0 - y \sin 1' \sin \delta_0 + x^2 \sin^2 1' \cdot \cos \delta_0 + \cdots) \end{aligned}\right.$$

où dy et dx représentent les corrections à ajouter aux coordonnées mesurées pour avoir celles rapportées au centre voulu, et $d\delta_0$ et $d\alpha_0$ sont les différences entre les coordonnées vraies et voulues du centre.

En général on peut dans cette opération négliger les termes du second ordre et écrire simplement:

$$dy = d\,\delta_0 - d\,r \cdot x$$

$$dx = \cos \delta_0 \cdot d\,\alpha_0 + d\,r \cdot y$$

où

$$d\,r = -\sin 1' \cdot \sin \delta_0 \cdot d\,\alpha_0$$

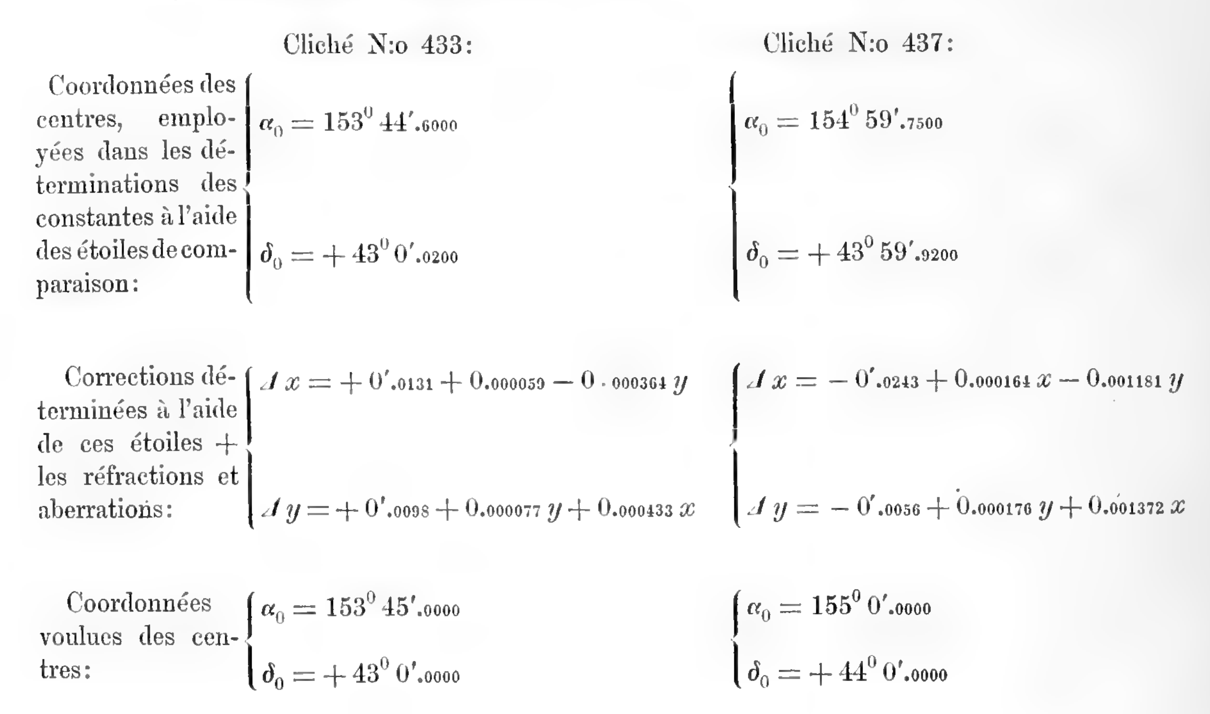
et unir la correction $d\,r$ à la constante de *l'orientation du cliché*, que nous désignons par r.

Cette correction de l'orientation dépend en réalité de la convergence des cercles de déclinaison, tandis que les termes du second ordre naissent de l'inclinaison entre les plans tangents à la sphère en deux points différents.

Nous voulons par un exemple éclaircir les procédés décrits jusqu' ici.

Exemple: Comparaison des coordonnées d'étoiles sur deux clichés:

1:o) Opérations préliminaires:



	Cliché N:o 433:	Cliché N:o 437:
Coordonnées des centres, employées dans les déterminations des constantes à l'aide des étoiles de comparaison:	$\alpha_0 = 153^0\,44'.6000$ $\delta_0 = +\,43^0\,0'.0200$	$\alpha_0 = 154^0\,59'.7500$ $\delta_0 = +\,43^0\,59'.9200$
Corrections déterminées à l'aide de ces étoiles + les réfractions et aberrations:	$\Delta x = +\,0'.0131 + 0.000059 - 0.000364\,y$ $\Delta y = +\,0'.0098 + 0.000077\,y + 0.000433\,x$	$\Delta x = -\,0'.0243 + 0.000164\,x - 0.001181\,y$ $\Delta y = -\,0'.0056 + 0.000176\,y + 0.001372\,x$
Coordonnées voulues des centres:	$\alpha_0 = 153^0\,45'.0000$ $\delta_0 = +\,43^0\,0'.0000$	$\alpha_0 = 155^0\,0'.0000$ $\delta_0 = +\,44^0\,0'.0000$

On trouve donc:

$d\,\alpha_0 = -\,0'.4000 \quad d\,\delta_0 = +\,0'.0200$ $\qquad$ $d\,\alpha_0 = -\,0'.2500 \quad d\,\delta_0 = -\,0'.0800$

et:

$d\,x = -\,0'.2925 + 0.000079 \cdot y$ $\qquad$ $d\,x = -\,0'.1798 + 0.000051\,y$

$d\,y = +\,0'.0200 - 0.000079\,x$ $\qquad$ $d\,y = -\,0'.0800 - 0.000051\,x$

Les x et y à comparer deviennent donc:

$x - 0'.2794 + 0.000059\,x - 0.000285\,y$ $\qquad$ $x - 0'.2041 + 0.000164\,x - 0.001130\,y$

$y + 0'.0298 + 0.000077\,y + 0.000354\,x$ $\qquad$ $y - 0'.0856 + 0.000176\,x + 0.001321\,x$

Ces opérations seront faites pour chaque cliché une fois pour toutes.

2:o) Opérations de la comparaison:

La comparaison appartient au cas B).

Ayant donné aux x et y observées ces corrections, nous obtenons du cliché 433:

Numéros des étoiles:	x	y	$x - 54'$	$III_{(y)} + IV_{(x,y)}$	$y - 60'$	$I_{(x)} + II_{(x,y)}$	x^1	y^1
44	− 3'.6102	+ 42'.6849	− 57.6102	− 0.3239 − 3[1])	− 17.3151	+ 0.4558 + 49[1])	− 57'.9344	− 16.'8544
51	+ 6.3390	+ 54.8631	− 47.6610	− 0.1390 − 1	− 5.1369	+ 0.3079 + 4	− 47.8001	− 4.8286
53	+ 10.7589	+ 58.2651	− 43.2411	− 0.0874 − 6	− 1.7349	+ 0.2422 − 17	− 43.3291	− 1.4944
56	+ 17.3109	+ 45.0918	− 36.6891	− 0.2874 − 4	− 14.9082	+ 0.1450 + 4	− 36.9769	− 14.7628
Moyenne	+ 7.7	+ 50.2						
79	+ 52'.4999	+ 3'.9788	− 1.5001	− 0.9119 + 16	− 56.0212	− 0.3776 + 2	− 2'.4104	− 56'.3986
80	+ 54.1329	+ 1.9930	+ 0.1329	− 0.9420 + 18	− 58.0070	− 0.4019 + 1	− 0.8073	− 58.4088
82	+ 55.1638	+ 3.2965	+ 1.1638	− 0.9223 + 12	− 56.7035	− 0.4172 + 1	+ 0.2427	− 57.1206
78	+ 53.7691	+ 15.4534	− 0.2309	− 0.7375 − 19	− 44.5466	− 0.3965 0	− 0.9703	− 44.9431
81	+ 55.9283	+ 16.9803	+ 1.9283	− 0.7143 − 30	− 43.0197	− 0.4285 − 3	+ 1.2110	− 43.4485
Moyenne	+ 54.3	+ 8.3						

Les coordonnées des mêmes étoiles mesurées sur le cliché 437 corrigées à l'aide des formules qui viennent d'être citées, sont:

Numéros des étoiles:	x	y		$x_{433} - x^1_{437}$	$y_{433} - y^1_{437}$
4	− 57'.9474	− 16'.8606		+ 0'.0131	+ 0'.0062
10	− 47.8168	− 4.8371		+ 0.0167	+ 0.0085
14	− 43.3532	− 1.4936		+ 0.0241	− 0.0008
19	− 37.0003	− 14.7612		+ 0.0234	− 0.0016
Moyenne	− 46.5	− 9.5	Moyenne	+ 0.0193	+ 0.0031
49	− 2.4296	− 56.4034		+ 0'.0192	+ 0'.0048
50	− 0.8215	− 58.4148		+ 0.0142	+ 0.0060
48	+ 0.2309	− 57.1265		+ 0.0118	+ 0.0059
47	− 0.9909	− 44.9413		+ 0.0206	− 0.0018
52	+ 1.2018	− 43.4469		+ 0.0092	− 0.0016
Moyenne	− 0.6	− 52.1	Moyenne	+ 0.0150	+ 0.0027

[1]) Unites de la quatrième décimale de la minute d'arc.

Équations fondamentales pour le rattachement de clichés.

Nommons p_1 et r_1 les corrections supplémentaires de l'échelle et de l'orientation du cliché qu'on cherche à déterminer par le rattachement, ainsi que ${}_0k_1^x$ et ${}_0k_1^y$ les corrections supplémentaires à appliquer au centre. Désignons encore par x_1 et y_1 les coordonnées mesurées d'une étoile, mais corrigées déjà à l'aide des valeurs approchées des mêmes constantes, déduites des étoiles de comparaison, qui se trouvent sur le cliché. Si la position du centre, à laquelle se rapportent ces dernières constantes, n'est pas celle qui est voulue, on suppose encore que x_1 et y_1 ont déjà reçu les corrections pour les ramener à cette position du centre.

Les coordonnées $x^{(1)}$ et $y^{(1)}$ finalement corrigées de l'étoile seront alors:

$$x^{(1)} = x_1 + {}_0k_1^x + p_1 x_1 + r_1 y_1$$

$$x^{(1)} = y_1 + {}_0k_1^y + p_1 y_1 - r_1 x_1$$

Si l'on adopte des désignations correspondantes pour le cliché rattaché à celui-ci, on aura encore

$$x^{(2)} = x_2 + {}_0k_2^x + p_2 x_2 + r_2 y_2$$

$$y^{(2)} = y_2 + {}_0k_2^y + p_2 y_2 - r_2 x_2$$

Les $x^{(1)}$ et $y^{(1)}$ ne sont pas encore comparables aux $x^{(2)}$ et $y^{(2)}$. Pour pouvoir faire une comparaison, il faut encore à l'aide des formules ou tables des pages 8—10 transformer soit $x^{(1)}$ et $y^{(1)}$, soit $x^{(2)}$ et $y^{(2)}$, à ce qu' ils auraient été, si le centre du cliché s'était transporté à la place du centre de l'autre cliché. Vu que les corrections k, p, r ne sont pas connues, cette transformation ne peut pas être faite rigoureusement. Mais, comme ces corrections ne sont que petites, on ne commet d'erreurs que de quelques unités de la quatrième décimale de la minute d'arc, si l'on emploie comme arguments des tableaux les x_1 et y_1. Nommons x'_1 et y'_1 les coordonnées sur le cliché rattaché, qui correspondent ainsi à x_1 et y_1. Les corrections k, p, r des deux clichés devront maintenant être déterminées de manière que les $x^{(1)}$ et $y^{(1)}$ ainsi transformés coïncident avec les $x^{(2)}$ et $y^{(2)}$. On devra donc avoir:

$$x'_1 + {}_0k^x_1 + p_1 x_1 + r_1 y_1 = x_2 + {}_0k^x_2 + p_2 x_2 + r_2 y_2$$

$$y'_1 + {}_0k^y_1 + p_1 y_1 - r_1 x_1 = y_2 + {}_0k^y_2 + p_2 y_2 - r_2 x_2$$

On pourrait employer ces formules comme points de départ pour la détermination des valeurs des inconnues. Nous avons néanmoins préféré d'introduire encore une modification.

Dans son traité intéressant sur le rattachement de clichés [1]), M. Prosper Henry introduit comme *point invariable* d'un cliché le point, dont les coordonnées rectangulaires sont égales à la moyenne de celles des étoiles de comparaison employées pour la première détermination des constantes du cliché. Comme la place de ce point dans cette détermination ne dépend pas des valeurs adoptées de l'échelle et de l'orientation, elle est le point le mieux déterminé sur la plaque. On a donc raison de conclure que probablement les corrections des x et y à ce point seront moindres qu'aux autres points du cliché.

Désignons par X^c et Y^c les coordonnées du point invariable, par k^x et k^y les corrections à ce point, on aura les relations suivantes entre ces corrections et celles au centre du cliché:

$$k^x = {}_0k^x + p\,X^c + r\,Y^c$$

$$k^y = {}_0k^y + p\,Y^c - r\,X^c$$

Substituant ces valeurs de ${}_0k^x$ et ${}_0k^y$ dans les équations précédentes, nous trouvons les équations modifiées:

$$(k^x_1 - k^x_2) + p_1(x_1 - X^c_1) + r_1(y_1 - Y^c_1) - p_2(x_2 - X^c_2) - r_2(y_2 - Y^c_2) = x_2 - x'_1$$

$$(k^y_1 - k^y_2) + p_1(y_1 - Y^c_1) - r_1(x_1 - X^c_1) - p_2(y_2 - Y^c_2) + r_2(x_2 - X^c_2) = y_2 - y'_1$$

Ces équations, étant linéaires en x et y, ne changent nullement de forme, si l'on prend la moyenne de plusieurs équations de la même espèce, c'est à dire si l'on opère avec des étoiles fictives, dont les coordonnées sont les moyennes des coordonnées des étoiles comparées. Seulement il faut remarquer, que les x'_1 et y'_1 doivent auparavant avoir été formées pour chaque étoile séparément.

---

[1]) Détermination des éléments d'un cliché d'étoiles du catalogue de la carte du ciel à l'observatoire de Paris. Bulletin du Comité International Permanent pour l'exécution photographique de la carte du ciel. T. II pp. 359 et suivv.

Ayant donc à l'aide d'étoiles convenablement situées sur les deux clichés formé 2 telles étoiles fictives, que nous voulons désigner comme l'étoile nord et l'étoile sud, chaque rattachement de deux clichés nous fournit 4 équations des dites espèces. En introduisant enfin les abréviations:

pour l'étoile nord:

$$\text{a)}\begin{cases}\xi_1^n = x_1^n - X_1^c; & \xi_2^n = x_2^n - X_2^c; & x_2^n - x'^n_1 = a_n \\ \eta_1^n = y_1^n - Y_1^c; & \eta_2^n = y_2^n - Y_2^c; & y_2^n - y'^n_1 = d_n\end{cases}$$

pour l'étoile sud:

$$\text{b)}\begin{cases}\xi_1^s = x_1^s - X_1^c; & \xi_2^s = x_2^s - X_2^c; & x_2^s - x'^s_1 = a_s \\ \eta_1^s = y_1^s - Y_1^c; & \eta_2^s = y_2^s - Y_2^c; & y_2^s - y'^s_1 = d_s\end{cases}$$

les équations en question s'écrivent:

$$\alpha)\qquad (k_2^x - k_1^x) + p_2\,\xi_2^n - p_1\,\xi_1^n + r_2\,\eta_2^n - r_1\,\eta_1^n + a_n = 0$$

$$\beta)\qquad (k_2^x - k_1^x) + p_2\,\xi_2^s - p_1\,\xi_1^s + r_2\,\eta_2^s - r_1\,\eta_1^s + a_s = 0$$

$$\gamma)\qquad (k_2^y - k_1^y) + p_2\,\eta_2^n - p_1\,\eta_1^n - r_2\,\xi_2^n + r_1\,\xi_1^n + d_n = 0$$

$$\delta)\qquad (k_2^y - k_1^y) + p_2\,\eta_2^s - p_1\,\eta_1^s - r_2\,\xi_2^s + r_1\,\xi_1^s + d_s = 0$$

Il est bien conforme à la nature du problème de faire la distinction entre les échelles et orientations relatives et absolues des deux clichés, comme a procédé aussi M. HENRY en son traité cité. Nous introduisons donc comme inconnues au lieu de p_2 et r_2 les différences $p_2 - p_1$ et $r_2 - r_1$. L'avantage en est, que les échelles et les orientations relatives dependent seulement des différences a et d, mais pas de la situation des points fixes ou des corrections des centres.

Les équations α) ... δ) reçoivent donc les formes:

$$\alpha^*)\qquad (k_2^x - k_1^x) + (p_2 - p_1)\,\xi_2^n + p_1\,(\xi_2^n - \xi_1^n) + (r_2 - r_1)\,\eta_2^n + r_1\,(\eta_2^n - \eta_1^n) + a_n = 0$$

etc.

Comme $\xi_2^n - \xi_1^n = x_2^n - x_1^n$ peut différer de $\xi_2^s - \xi_1^s = x_2^s - x_1^s$ seulement de termes de seconde ordre (Voir p. 7), nous pouvons ici, avec une approximation suffisante pour notre but, remplacer ces différences ainsi que les différences correspondantes des η par les quantités:

$$\text{c)}\quad A = \frac{(\xi_2^n - \xi_1^n) + (\xi_2^s - \xi_1^s)}{2}; \quad D = \frac{(\eta_2^n - \eta_1^n) + (\eta_2^s - \eta_1^s)}{2}$$

Nous obtenons ainsi au lieu des équations α), β), γ), δ) les suivantes:

$$\varepsilon)\qquad (k_2^x - k_1^x) + (p_2 - p_1)\,\xi_2^n + A\,p_1 + (r_2 - r_1)\,\eta_2^n + D\,r_1 + a_n = 0$$

$$\zeta)\qquad (k_2^x - k_1^x) + (p_2 - p_1)\,\xi_2^s + A\,p_1 + (r_2 - r_1)\,\eta_2^s + D\,r_1 + a_s = 0$$

$$\eta)\qquad (k_2^y - k_1^y) + (p_2 - p_1)\,\eta_2^n + D\,p_1 - (r_2 - r_1)\,\xi_2^n - A\,r_1 + d_n = 0$$

$$\vartheta)\qquad (k_2^y - k_1^y) + (p_2 - p_1)\,\eta_2^s + D\,p_1 - (r_2 - r_1)\,\xi_2^s - A\,r_1 + d_s = 0$$

Ces équations nous serviront comme points de départ dans les deux méthodes pour le rattachement de clichés, que nous voulons maitenant exposer.

Première méthode pour le rattachement d'un cliché à tous les clichés qui le couvrent en partie. Le procédé est fondé sur l'emploi de la méthode des moindres carrés.

Si l'on voulait aux équations ε) ... ϑ) appliquer les principes de la méthode des moindres carrés, on obtiendrait seulement des identités. Ceci tient à ce que le parallélisme et la congruence des droites entre les étoiles fictives sur les deux clichés peuvent être rétablis en changeant seulement les échelles et les orientations relatives $(p_2 - p_1)$ et $(r_2 - r_1)$, et que l'on peut enfin les faire coïncider *soit* en changeant seulement les échelles et les orientations absolues, *soit* seulement les positions des centres ou des points invariables. Si l'on veut conserver toutes ces inconnues, il y aura une infinité de solutions aussi probables.

Dans l'évaluation des constantes de l'orientation r et de l'échelle p du cliché, nous négligerons donc, comme l'a fait aussi M. Henry, les corrections des points invariables. Les équations ε), ζ), η) et ϑ) deviennent alors:

$$1)\qquad (p_2-p_1)\,\xi_2^n + A\,p_1 + (r_2-r_1)\,\eta_2^n + D\,r_1 + a_n =$$

$$2)\qquad (p_2-p_1)\,\xi_2^s + A\,p_1 + (r_2-r_1)\,\eta_2^s + D\,r_1 + a_s = 0$$

$$3)\qquad (p_2-p_1)\,\eta_2^n + D\,p_1 - (r_2-r_1)\,\xi_2^n - A\,r_1 + d_n = 0$$

$$4)\qquad (p_2-p_1)\,\eta_2^s + D\,p_1 - (r_2-r_1)\,\xi_2^s - A\,r_1 + d_s = 0$$

Formons les parties des équations normales, qui dérivent de ces équations de condition. Introduisons les grandeurs:

$$\text{A)}\quad \overset{2}{\xi_2^n} + \overset{2}{\eta_2^n} = \overset{2}{\varrho_2^n}\,; \qquad \overset{2}{\xi_2^s} + \overset{2}{\eta_2^s} = \overset{2}{\varrho_2^s}\,; \qquad A^2 + D^2 = R^2$$

dont les significations géométriques sont évidentes; ϱ_2^n et ϱ_2^s sont les distances des deux étoiles fictives du point invariable sur l'autre cliché et R est la distance entre les points invariables des deux clichés.

Posons encore pour un moment:

$$\mu = A\,(\xi_2^n + \xi_2^s) + D\,(\eta_2^n + \eta_2^s)$$

$$\nu = A\,(\eta_2^n + \eta_2^s) - D\,(\xi_2^n + \xi_2^s)$$

$$(1) = a_n\,\xi_2^n + a_s\,\xi_2^s + d_n\,\eta_2^n + d_s\,\eta_2^s$$

$$(2) = A\,(a_n + a_s) + D\,(d_n + d_s)$$

$$(3) = a_n\,\eta_2^n + a_s\,\eta_2^s - d_n\,\xi_2^n - d_s\,\xi_2^s$$

$$(4) = D\,(a_n + a_s) - A\,(d_n + d_s)$$

nous trouvons les dites parties des équations normales:

$$5)\qquad (p_2-p_1)\,(\overset{2}{\varrho_2^n} + \overset{2}{\varrho_2^s}) + p_1\cdot\mu \qquad - r_1\cdot\nu \quad + (1) = 0$$

$$6)\qquad (p_2-p_1)\cdot\mu \quad + 2\,p_1\,R^2 + (r_2-r_1)\cdot\nu \qquad + (2) = 0$$

$$7)\qquad p_1\cdot\nu + (r_2-r_1)\,(\overset{2}{\varrho_2^n} + \overset{2}{\varrho_2^s}) \quad + r_1\cdot\mu \quad + (3) = 0$$

$$8)\qquad -(p_2-p_1)\cdot\nu \quad + (r_2-r_1)\cdot\mu \quad + 2\,r_1\,R^2 + (4) = 0$$

Le rattachement du cliché en question à un troisième etc. cliché ajouterait aux membres gauches de 6) et 8) des termes analogues à ceux qu'elles contiennent déjà, mais contenant $(p_3 - p_1)$, $(r_3 - r_1)$ etc. Au lieu des équations 5) et 7) viennent encore d'autres équations et de mêmes formes. Mais ces équations mêmes ne seront pas changées. Elles sont déjà des équations normales complètes. Les valeurs de $(p_2 - p_1)$ et de $(r_2 - r_1)$ qui en résultent peuvent donc être employées pour éliminer ces inconnues des expressions 6) et 8). On trouve ainsi au lieu d'elles les suivantes:

9) $$p_1 \cdot \left(2 R^2 - \frac{\mu^2 + \nu^2}{{\varrho_2^n}^2 + {\varrho_2^s}^2}\right) + (2) - \frac{\mu\,(1) + \nu\,(3)}{{\varrho_2^n}^2 + {\varrho_2^s}^2} = 0$$

10) $$r_1 \cdot \left(2 R^2 + \frac{\mu^2 + \nu^2}{{\varrho_2^n}^2 + {\varrho_2^s}^2}\right) + (4) + \frac{\nu\,(1) - \mu\,(3)}{{\varrho_2^n}^2 + {\varrho_2^s}^2} = 0$$

Il est à remarquer que les deux inconnues p_1 et r_1 se sont séparées de suite et encore que leurs coëfficients sont les mêmes dans ces deux expressions.

Les expressions mêmes sont capables de plusieurs simplifications. Quant au coëfficient de p_1 et r_1 on a:

$$\mu^2 + \nu^2 = (A^2 + D^2)\left([\xi_2^n + \xi_2^s]^2 + [\eta_2^n + \eta_2^s]^2\right)$$

et

$$2 R^2 - \frac{\mu^2 + \nu^2}{{\varrho_2^n}^2 + {\varrho_2^s}^2} = \frac{R^2}{{\varrho_2^n}^2 + {\varrho_2^s}^2}\left(2\,[{\xi_2^n}^2 + {\eta_2^n}^2] + 2\,[{\xi_2^s}^2 + {\eta_2^s}^2] - [\xi_2^n + \xi_2^s]^2 - [\eta_2^n + \eta_2^s]^2\right) = \frac{R^2 \cdot r^2}{{\varrho_2^n}^2 + {\varrho_2^s}^2}$$

si nous posons:

$$\text{B)}\quad r^2 = (\xi_2^n - \xi_2^s)^2 + (\eta_2^n - \eta_2^s)^2$$

où r est la distance entre les deux étoiles fictives comptée sur le second cliché.

De plus on trouve:

$$\begin{aligned}(2)\,({\varrho_2^n}^2 + {\varrho_2^s}^2) - \mu\,(1) - \nu\,(3) = {} & (A\,a_n + D\,d_n)\,(\xi_2^s\,[\xi_2^s - \xi_2^n] + \eta_2^s\,[\eta_2^s - \eta_2^n]) \\ & + (A\,a + D\,d_s)\,(\xi_2^n\,[\xi_2^n - \xi_2^s] + \eta_2^n\,[\eta_2^n - \eta_2^s]) \\ & + (A\,d_n - D\,a_n)\,(\xi_2^n\,\eta_2^s - \xi_2^s\,\eta_2^n) + (A\,d_s - D\,a_s)\,(\xi_2^s\,\eta_2^n - \eta_2^s\,\xi_2^n)\end{aligned}$$

En introduisant enfin les quantités auxiliaires:

$$\text{C)}\begin{cases} M_n = \xi_2^n(\xi_2^n - \xi_2^s) + \eta_2^n(\eta_2^n - \eta_2^s) \\ M_s = \xi_2^s(\xi_2^n - \xi_2^s) + \eta_2^s(\eta_2^n - \eta_2^s) \\ N = \xi_2^s(\eta_2^n - \eta_2^s) - \eta_2^s(\xi_2^n - \xi_2^s) = \xi_2^s\,\eta_2^n - \eta_2^s\,\xi_2 \end{cases}$$

et

$$\text{D)}\begin{cases} b_n = A\,a_n + D\,d_n \\ b_s = A\,a_s + D\,d_s \\ c_n = A\,d_n - D\,a_n \\ c_s = A\,d_s - D\,a_s \end{cases}$$

on a pour p_1 l'expression provenant de 9):

$$\text{E)}\quad \frac{R^2 r^2}{\varrho_2^{n\,2} + \varrho_2^{s\,2}} \cdot p_1 = \frac{1}{\varrho_2^{n\,2} + \varrho_2^{s\,2}}(M_s\,b_n - M_n\,b_s + N[c_n - c_s])$$

qui représente la portion de l'équation normale pour p_1, qui provient du raccordement des deux clichés en question.

De même on aurait trouvé:

$$(4)\,(\varrho_2^{n\,2} + \varrho_2^{s\,2}) + \nu\,(1) - \mu\,(3) = (A\,a_n + D\,d_n)(\xi_2^n\,\eta_2^s - \eta_2^n\,\xi_2^s) + (A\,a_s + D\,d_s)(\xi_2^s\,\eta_2^n - \eta_2^s\,\xi_2^n)$$

$$+ (A\,d_n - D\,a_n)(\xi_2^s[\xi_2^n - \xi_2^s] + \eta_2^s[\eta_2^n - \eta_2^s]) + (A\,d_s - D\,a_s)(-\xi_2^n[\xi_2^n - \xi_2^s] - \eta_2^n[\eta_2^n - \eta_2^s])$$

En employant donc les symboles introduits par les équations C) et D), on obtient au lieu de 10):

$$\text{F)}\quad \frac{R^2 r^2}{\varrho_2^{n\,2} + \varrho_2^{s\,2}} \cdot r_1 = \frac{1}{\varrho_2^{n\,2} + \varrho_2^{s\,2}}(N[b_n - b_s] - M_s\,c_n + M_n\,c_s)$$

comme partie de l'équation normale pour x_1 résultant du rattachement des deux clichés.

Les opérations de calcul à effectuer sont toutes contenues dans les équations a), b) et c) ainsi que dans celles A), B), C), D), E) et F).

Ayant encore formé les expressions correspondantes provenant des rattachements des autres clichés, qui couvrent la première en parties, et ayant enfin ajouté toutes ces expressions, on trouve les équations normales qui donneront les valeurs probables de p_1 et r_1.

Si l'on préfère la forme trigonométrique, on peut aux formules précédentes A) . . . F) substituer les suivantes:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{D}{A}; \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\eta_2^n - \eta_2^s}{\xi_2^n - \xi_2^s}; \qquad \operatorname{tg}\vartheta_n = \frac{\eta_2^n}{\xi_2^n}; \qquad \operatorname{tg}\vartheta_s = \frac{\eta_2^s}{\xi_2^s};$$

$$R = A \sec\varepsilon; \quad r = (\xi_2^n - \xi_2^s)\sec\gamma; \qquad \varrho_2^n = \xi_2^n \cdot \sec\vartheta_n; \qquad \varrho_2^s = \xi_2^s \cdot \sec\vartheta_s;$$

Comme contrôle on a encore:

$$r^2 = \varrho_2^{n\,2} + \varrho_2^{s\,2} - 2\,\varrho_2^n\,\varrho_2^s \cos(\vartheta_n - \vartheta_s)$$

On calculera de plus

$$\operatorname{tg}\psi_n = \frac{d_n}{a_n}; \qquad \operatorname{tg}\psi_s = \frac{d_s}{a_s};$$

$$\varkappa_n = a_n \sec\psi_n; \qquad \varkappa_s = a_s \cdot \sec\psi_s;$$

$$= d_n \operatorname{cosec}\psi_n; \qquad = d_s \operatorname{cosec}\psi_s:$$

$$\lambda = \frac{R\,r}{\varrho_2^{n\,2} + \varrho_2^{s\,2}}$$

et l'on aura:

$$Rr\lambda \cdot p_1 = \lambda\,(\varrho_2^s\,\varkappa_n \cos[\gamma + \varepsilon - \psi_n - \vartheta_s] - \varrho_2^n\,\varkappa_s \cos[\gamma + \varepsilon - \psi_s - \vartheta_n])$$

$$Rr\lambda \cdot r_1 = \lambda\,(\varrho_2^s\,\varkappa_n \sin[\gamma + \varepsilon - \psi_n - \vartheta_s] - \varrho_2^n\,\varkappa_s \sin[\gamma + \varepsilon - \psi_s - \vartheta_n])$$

Si l'on calcule en même temps les parties des équations normales pour p_2 et r_2, qui proviennent du même raccordement, il est à recommander de se servir des dernières formules, si p_1 et r_1 ont été calculés à l'aide des formules A) . . . F). Car on obtiendra ainsi des contrôles bienvenues, savoir:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{r^2}([a_n - a_s][\xi^n - \xi^s] + [d_n - d_s][\eta - \eta^s])$$

$$r_2 - r_1 = \frac{1}{r^2}([a_n - a_s][\eta^n - \eta^s] - [d_n - d_s][\xi^n - \xi^s])$$

ou p_2, r_2 ainsi que p_1, r_1 sont les valeurs de ces constantes que donnent ces parties des équations normales prises en elles-mêmes; $\xi^n - \xi^s$, $\eta^n - \eta^s$ représent ici les moyennes de $\xi_2^n - \xi_2^s$ et $\xi_1^n - \xi_1^s$ ou de $\eta_2^n - \eta_2^s$ et $\eta_1^n - \eta_1^s$.

Ayant par les procédés décrits trouvé finalement les valeurs les plus probables de p_1 et r_1, on peut calculer les corrections au centre par les équations:

$$_0k^x = -p_1 X_1^c - r_1 Y_1^c$$

$$_0k^y = -p_1 Y_1^c + r_1 X_1^c$$

Dans ces équations on suppose toujours les corrections au point invariable égales à zéro, c'est-à-dire que les étoiles de comparaison situées sur le cliché auront suffi pour donner à la rigueur la position de ce point. Si l'on ne veut pas se contenter de cette supposition, on peut encore améliorer la position du centre après que les coordonnées de toutes les étoiles provenant de ce cliché ainsi que celles provenant des clichés voisins auront été calculées. Ayant alors comparé ces coordonnées et formé les différences, on en prendra les moyennes et l'on ajoutera les moitiés de ces moyennes comme corrections à toutes les coordonnées déduites du cliché en question.

Seconde méthode de raccordement. Séparation des valeurs de l'échelle et de l'orientation en ascension droite et en déclinaison.

Dans la méthode précédente on a supposé que p et r étaient les mêmes pour les x que pour les y. Comme on a raison de soupçonner, au moins dans la zone d'Helsingfors, que cela n'a pas lieu, il devient nécessaire d'avoir une méthode qui ne soit pas sujette à cette objection.

Afin d'établir un tel procédé, nous emploierons comme point de départ les équations ε), ζ), η) et ϑ) de la page 17.

En soustrayant ζ) de ε) et ϑ) de η) on obtient:

$$\iota)\qquad (p_2 - p_1)(\xi_2^n - \xi_2^s) + (r_2 - r_1)(\eta_2^n - \eta_2^s) + a_n - a_s = 0$$

$$\varkappa)\qquad (p_2 - p_1)(\eta_2^n - \eta_2^s) - (r_2 - r_1)(\xi_2^n - \xi_2^s) + d_n - d_s = 0$$

d'où l'on peut déterminer $(p_2 - p_1)$ et $(r_2 - r_1)$.

Mais au lieu de transformer l'équation α) (page 16) en α^*), on aurait encore pu l'écrire:

$$\alpha^{**})\qquad (k_2^x - k_1^x) + p_2(\xi_2^n - \xi_1^n) + (p_2 - p_1)\xi_1^n + r_2(\eta_2^n - \eta_1^n) + (r_2 - r_1)\eta_1^n + a_n = 0$$

et transformer les équations β), γ), δ) d'une manière analogue.

En introduisant alors A et D on aurait trouvé des équations toutes analogues aux équations ε), ζ), η), ϑ) avec les seules différences, que A et D se trouveront maintenant multipliés par p_2 et r_2 au lieu de p_1 et r_1 et que $(p_2 - p_1)$ et $(r_2 - r_1)$ seront multipliés par les ξ_1 et η_1 au lieu des ξ_2 et η_2. Par soustraction on obtient alors deux équations, qui diffèrent de ι) et $\varkappa$) seulement en ce que ξ_1 et η_1 entrent pour ξ_2 et η_2. Les meilleures valeurs des deux inconnues s'obtiennent donc des équations

$$\lambda)\qquad \begin{cases} (p_2 - p_1)\xi + (r_2 - r_1)\eta + a = 0 \\ (p_2 - p_1)\eta - (r_2 - r_1)\xi + d = 0 \end{cases}$$

où

$$\text{d)}\quad \xi = \frac{(\xi_1^n - \xi_1^s) + (\xi_2^n - \xi_2^s)}{2}; \qquad \eta = \frac{(\eta_1^n - \eta_1^s) + (\eta_2^n - \eta_2^s)}{2}$$

$$\text{e)}\quad a = a_n - a_s; \qquad d = d_n - d_s$$

On trouve:

$$\text{f)}\quad \begin{cases} p_1 - p_2 = \dfrac{a\,\xi + d\,\eta}{\xi^2 + \eta^2} \\[2ex] r_1 - r_2 = \dfrac{a\,\eta - d\,\xi}{\xi^2 + \eta^2} \end{cases}$$

Comme ξ et η contiennent seulement les différences des coordonnées des deux étoiles dérivées du même cliché, elles sont indépendantes du point d'où ces coordonnées sont comptées et par conséquence de la position du centre ou du point invariable. Le cas est donc encore le même avec les échelles et les orientations relatives $p_1 - p_2$ et $r_1 - r_2$.

Dans une recherche précédente [1]) j'avais trouvé, qu'il faudrait soupçonner qu'il existe dans les clichés pris à Helsingfors une échelle différente en y et en x. Ce fait, quoique non encore décidé, est plutôt confirmé par des expériences ultérieures. Il y a donc lieu de séparer les corrections de l'échelle et de l'orientation des x et des y. Mais en revanche il me semble qu'il sera beaucoup moins motivé de séparer les échelles ou orientations *relatives* qui se rapportent aux x de celles appartenant aux y. En réalité, si deux plaques sont prises, l'une après l'autre, sous les mêmes conditions et dans le même angle horaire, il est bien difficile de comprendre comment les échelles relatives auraient pu changer. Et si $p^y - p^x$ variait avec l'angle horaire, ces variations ne pourraient être constatées qu' à la suite d'une longue expérience ou de recherches spéciales. Si l'on avait trouvé la loi que suivent ces variations, il serait aisé d'introduire les modifications de procédé qui en résulteraient.

Les développements précédents supposent seulement que $p_1 - p_2$ et $r_1 - r_2$ sont les mêmes pour les x que pour les y. Nous avons donc tous les droits d'introduire dans les équations p^y et p^x, r^y et r^x au lieu de p et r. Des équations ε) . . . ϑ) nous obtenons ainsi les équations qui contiennent la contribution que ce rattachement de deux clichés peut nous fournir pour la recherche des constantes du cliché en question:

$$\text{g)} \quad \begin{cases} A\,p_1^x + D\,r_1^x + a_1 = k_1^x - k_2^x \\ D\,p_1^y - A\,r_1^y + d_1 = k_1^y - k_2^y \end{cases}$$

où

$$\text{h)} \quad \begin{cases} a_1 = a_n - (p_1 - p_2)\,\xi_2^n - (r_1 - r_2)\,\eta_2^n = a_s - (p_1 - p_2)\,\xi_2^s - (r_1 - r_2)\,\eta_2^s \\ d_1 = d_n - (p_1 - p_2)\,\eta_2^n + (r_1 - r_2)\,\xi_2^n = d_s - (p_1 - p_2)\,\eta_2^s + (r_1 - r_2)\,\xi_2^s \end{cases}$$

---

[1]) Détermination des constantes nécessaires pour la réduction des clichés pris à Helsingfors pour la construction du catalogue photographique des étoiles jusqu' à la onzième grandeur. Acta Societatis Scientiarum Fennicæ. T. XXI N:o 8 p. 59 & 66; aussi dans le Bulletin du Com. Int. Perm. de la carte du Ciel. T. II p. 441 & 442.

Les doubles valeurs de a_1 et de d_1 donnent un contrôle très effectif des calculs. Toutes les opérations à effectuer pour la formation des deux équations g) sont contenues dans les équations a), b), c), d), e), f) et h). Comme la plupart de ces opérations consistent dans de simples soustractions ou des formations de moyennes de deux nombres, les calculs sont faits en quelques minutes. Le travail du rattachement de deux clichés consiste donc principalement dans la comparaison des coordonnées rectangulaires d'un certain nombre d'étoiles communes aux deux clichés.

Les deux équations qui pour le second cliché correspondent aux équations g) du premier s'obtiennent des équations qui dérivent des α^{**}) de la même manière que ε), ζ), η), ϑ) des α^{*}). Elles sont:

$$\text{i)}\quad \begin{cases} -A\,p_2^x - D\,r_2^x - a_2 = k_2^x - k_1^x \\ -D\,p_2^y + A\,r_2^y - d_2 = k_2^y - k_1^y \end{cases}$$

$$\text{k)}\quad \begin{cases} a_2 = a_n - (p_1 - p_2)\,\xi_1^n - (r_1 - r_2)\,\eta_1^n = a_s - (p_1 - p_2)\,\xi_1^s - (r_1 - r_2)\,\eta_1^s \\ d_2 = d_n - (p_1 - p_2)\,\eta_1^n + (r_1 - r_2)\,\xi_1^n = d_s - (p_1 - p_2)\,\eta_1^s + (r_1 - r_2)\,\xi_1^s \end{cases}$$

Exemple de l'emploi de la méthode de rattachement:

Rattachement des clichés 433 et 437:

Données: (voir page 13):

Cliché 437:		Cliché 433:	
$x_1^n = -46'.5$	$y_1^n = -\ 9'.5$	$x_2^n = +\ 7'.7$	$y_2^n = +50'.2$
$x_1^s = -\ 0'.6$	$y_1^s = -\ 52.1$	$x_2^s = +54'.3$	$y_2^s = +\ 8'.3$
$X_1^c = -\ 0.3$	$Y_1^c = +\ 4.9$	$X_2^c = -10'.9$	$Y_2^c = -\ 11.8$
	$a_n = +0'.0193$	$d_n = +0'.0031$	
	$a_s = +0'.0150$	$d_s = +0'.0027$	

Calculs:

$\xi_1^n = -46'.2$	$\xi_1^s = -\ 0'.3$	$\eta_1^n = -14'.4$	$\eta_1^s = -57'.0$
$\xi_2^n = +\ 18.6$	$\xi_2^s = +\ 65.2$	$\eta_2^n = +\ 62.0$	$\eta_2^s = +\ 20.1$
$\xi_2^n - \xi_1^n = +\ 64.8$	$\xi_1^n - \xi_1^s = -\ 45.9$	$\eta_2^n - \eta_1^n = +\ 76.4$	$\eta_1^n - \eta_1^s = +\ 42.6$
$\xi_2^s - \xi_1^s = +\ 65.5$	$\xi_2^n - \xi_2^s = -\ 46.6$	$\eta_2^s - \eta_1^s = +\ 77.1$	$\eta_2^n - \eta_2^s = +\ 41.9$
$A = +\ 65.1$	$\xi = -\ 46.2$	$D = +\ 76.8$	$\eta = +\ 42.2$

$a = +0'.0043$	$\log a$ 7.63	$\log \xi^2$ 3.330	$\log a\,\xi$ 9.29_n	$\log a\,\eta$ 9.26
$d = +0.0004$	$\log d$ 6.6	$\log \eta^2$ 3.252	$\log d\,\eta$ 8.2	$\log(-d\,\xi)$ 8.3
	$\log \xi$ 1.665_n	l. add. 264	l. soustr. -4	l. add. $+5$
	$\log \eta$ 1.626	$\log(\xi^2+\eta^2)$ 3.594	9.25_n	9.31

$\log(p_1-p_2)$ 5.66_n	$\log(r_1-r_2)$ 5.72	$a_n = +0'.0193$	$a_s = +0'.0150$	$d_n = +0'.0031$	$d_s = +0'.0027$
$\log(-\xi_2^n)$ 1.27_n	$\log(-\eta_2^n)$ 1.79_n	$+9$	$+30$	$+28$	$+9$
$\log(-\xi_2^s)$ 1.81_n	$\log(-\eta_2^s)$ 1.30_n	-32	-10	$+10$	$+34$
		$a_1 = +0'.0170$	$a_1 = +0'.0170$	$d_1 = +0'.0069$	$d_1 = +0'.0070$
$\log(-\xi_1^n)$ 1.66	$\log(-\eta_1^n)$ 1.16	-21	0	-7	-26
$\log(-\xi_1^s)$ 9.5	$\log(-\eta_1^s)$ 1.76	$+8$	$+30$	-24	0
		$a_2 = +0'.0180$	$a_2 = +0'.0180$	$d_2 = +0'.0000$	$d_2 = +0'.0001$

Équations résultant de ce rattachement:

$$\text{pour } 437: \begin{cases} +65.1\,p_1^x + 76.8\,r_1^x + 0'.0170 = k_{437}^x - k_{433}^x \\ +76.8\,p_1^y - 65.1\,r_1^y + 0'.0069 = k_{437}^y - k_{433}^y \end{cases}$$

$$\text{pour } 433: \begin{cases} -65.1\,p_2^x - 76.8\,r_2^x - 0'.0180 = k_{433}^x - k_{437}^x \\ -76.8\,p_2^y + 65.1\,r_2^y - 0.0001 = k_{433}^y - k_{437}^y \end{cases}$$

Si l'on avait supposé que les corrections à appliquer aux coordonnées d'une étoile qui se trouve au point invariable, sont suffisamment bien déterminées déjà par les étoiles de comparaison, on pourrait dans les équations g) et i) faire les différentes k toutes égales à zéro. Sous cette supposition, les valeurs de l'échelle et de l'orientation d'un cliché peuvent être déterminées par son rattachement à deux clichés voisins. Il faut seulement que leurs centres ne se trouvent pas sur une même droite passant par le centre du cliché dont on cherche les constantes; car dans ce cas les A et D changeraient en même temps de signes, sans changer sensiblement de valeurs, et la séparation de p^x et r^x ou de p^y et r^y ne se fait que difficilement. Si les centres ne sont pas situées ainsi, on trouve, A', D', a'_1, d'_1, appartenant à l'un, A'', D'', a''_1, d''_1 à l'autre rattachement:

$$p_1^x = -\frac{a'_1 D'' - a''_1 D'}{A' D'' - A'' D'}; \qquad r_1^x = \frac{a'_1 A'' - a''_1 A'}{A' D'' - A'' D'}$$

$$p_1^y = \frac{d'_1 A'' - d''_1 A'}{A' D'' - A'' D'}; \qquad r_1^y = \frac{d'_1 D'' - d''_1 D'}{A' D'' - A'' D'}.$$

Veut on encore laisser à côté la distinction entre les p^y et p^x, r^y et r^x, les équations g) sans seconds membres nous donneront immédiatement *la solution du problème général de déduire les constantes d'un cliché par suite de son rattachement à un autre cliché.* On trouve

$$p_1 = -\frac{a_1 A + d_1 D}{A^2 + D^2}; \quad r_1 = -\frac{a_1 D - d_1 A}{A^2 + D^2}.$$

Pour le second cliché l'on aura également:

$$p_2 = -\frac{a_2 A + d_2 D}{A^2 + D^2}; \quad r_2 = -\frac{a_2 D - d_2 A}{A^2 + D^2}.$$

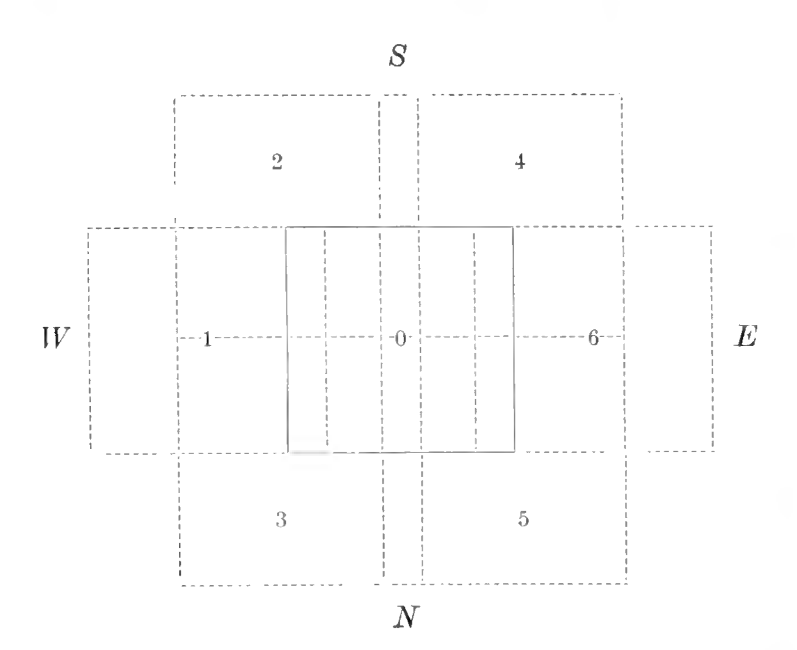
Si D est petite, on retrouve les formules du cas spécial traité par M. Henry. Des équations g) il devient au premier coup d'oeil évident, que dans cette méthode de connection l'échelle est déterminée presque exclusivement par les ascensions droites, l'orientation au contraire seulement par les déclinaisons, ce qui serait à la rigueur le cas, si les points invariables coïncidaient avec les centres des clichés.

Détermination des constantes des clichés à l'aide des rattachements dans la seconde méthode.

Chaque cliché du Catalogue est ainsi rattaché à tous les 6 clichés qui le couvrent en partie. Seulement pour les clichés qui se trouvent aux deux bords de la zone attribuée à chaque observatoire, ce nombre s'abaisse à 4, si l'on s'en tient aux clichés photographiés à ce même observatoire. Pour gagner une symétrie parfaite dans les opérations, il serait bien désirable de pouvoir rattacher ces derniers clichés encore aux deux plaques adjacentes qui seront

prises à d'autres observatoires. Mais comme cela exigerait une vaste collaboration entre les diverses institutions même avant qu'elles eussent publié leurs résultats, il faut pour des raisons pratiques laisser ces rattachements et se contenter d'utiliser seulement les matériaux recueillis par un seul observatoire. La circonstance signalée doit cependant faire que les positions des étoiles aux bords de la zone n'auront pas toute la précision de celles des parties centrales et que l'on ne doit pas de l'exactitude des positions des étoiles des bords de la zone juger de celle des étoiles de l'intérieur, qui sera toujours plus grande.

Pour déterminer les constantes des clichés, nous avons donc 6 (respectivement 4) équations de l'espèce g) ou i) provenant des x, et autant déduites des y. Les clichés rattachés sont situés comme l'indique le diagramme ci-joint:



Nous avons alors en donnant aux coëfficients des équations les mêmes indices que ceux des clichés, les deux équations suivantes pour en déterminer les constantes du cliché 0:

1) $A_1 p^x + D_1 r^x + a_1 = k_0^x - k_1^x; \qquad D_1 p^y - A_1 r^y + d_1 = k_0^y - k_1^y$

2) $A_2 p^x + D_2 r^x + a_2 = k_0^x - k_2^x; \qquad D_2 p^y - A_2 r^y + d_2 = k_0^y - k_2^y$

3) $A_3 p^x + D_3 r^x + a_3 = k_0^x - k_3^x; \qquad D_3 p^y - A_3 r^y + d_3 = k_0^y - k_3^y$

4) $A_4 p^x + D_4 r^x + a_4 = k_0^x - k_4^x; \qquad D_4 p^y - A_4 r^y + d_4 = k_0^y - k_4^y$

5) $A_5 p^x + D_5 r^x + a_5 = k_0^x - k_5^x; \qquad D_5 p^y - A_5 r^y + d_5 = k_0^y - k_5^y$

6) $A_6 p^x + D_6 r^x + a_6 = k_0^x - k_6^x; \qquad D_6 p^y - A_6 r^y + d_6 = k_0^y - k_6^y$

Si les points invariables coïncidaient avec les centres des clichés, on aurait encore toujours dans les zones d'Helsingfors:

$$A_6 = -A_1; \qquad D_6 = D_1 \doteq 0;$$

$$A_4 = -A_2; \qquad D_4 = D_2;$$

$$A_5 = -A_3; \qquad D_5 = D_3.$$

En outre on a approximativement:

$$A_2 = A_3 = \tfrac{1}{2} A_1;$$

$$D_3 = -D_2$$

et ces équations seront d'autant plus approchées que les clichés seront plus proches de l'équateur. Supposons qu'elles existent à la rigueur. Alors les équations 1) . . . 6) deviendront:

7) $2 A_2 p^x \qquad + a_1 = k_0^x - k_1^x; \qquad -2 A_2 r^y + d_1 = k_0^y - k_1^y$

8) $A_2 p^x + D_2 r^x + a_2 = k_0^x - k_2^x; \qquad D_2 p^y - A_2 r^y + d_2 = k_0^y - k_2^y$

9) $A_2 p^x - D_2 r^x + a_3 = k_0^x - k_3^x; \qquad -D_2 p^y - A_2 r^y + d_3 = k_0^y - k_3^y$

10) $-A_2 p^x + D_2 r^x + a_4 = k_0^x - k_4^x; \qquad D_2 p^y + A_2 r^y + d_4 = k_0^y - k_4^y$

11) $-A_2 p^x - D_2 r^x + a_5 = k_0^x - k_5^x; \qquad -D_2 p^y + A_2 r^y + d_5 = k_0^y - k_5^y$

12) $-2 A_2 p^x \qquad + a_6 = k_0^x - k_6^x; \qquad +2 A_2 r^y + d_6 = k_0^y - k_6^y$

Si alors les équations 7) et 12) sont combinées par addition et par soustraction et de même les équations 8) et 11) ainsi que celles 9) et 10), on obtient les équations suivantes:

13) $a_1 + a_6 = 2\,k_0^x - (k_1^x + k_6^x)\,;$ $\qquad d_1 + d_6 = 2\,k_0^y - (k_1^y + k_6^y)$

14) $a_2 + a_5 = 2\,k_0^x - (k_2^x + k_5^x)\,;$ $\qquad d_2 + d_5 = 2\,k_0^y - (k_2^y + k_5^y)$

15) $a_3 + a_4 = 2\,k_0^x - (k_3^x + k_4^x)\,;$ $\qquad d_3 + d_4 = 2\,k_0^y - (k_3^y + k_4^y)$

---

16) $4\,A_2\,p^x + a_1 - a_6 = k_6^x - k_1^x\,;$ $\qquad -4\,A_2\,r^y + d_1 - d_6 = k_6^y - k_1^y$

17) $2\,A_2\,p^x + 2\,D_2\,r^x + a_2 - a_5 = k_5^x - k_2^x\,;$ $\qquad 2\,D_2\,p^y - 2\,A_2\,r^y + d_2 - d_5 = k_5^y - k_2^y$

18) $2\,A_2\,p^x - 2\,D_2\,r^x + a_3 - a_4 = k_4^x - k_3^x\,;$ $\qquad -2\,D_2\,p^y - 2\,A_2\,r^y + d_3 - d_4 = k_4^y - k_3^y$

En combinant enfin par addition les trois équations 13), 14) et 15) ou 16), 17), 18) ainsi que par soustraction les équations 17) et 18), on trouve les équations qui déterminent les constantes du cliché examiné:

19) $k_0^x = \frac{1}{6}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + \frac{1}{6}(k_1^x + k_2^x + k_3^x + k_4^x + k_5^x + k_6^x)$

20) $k_0^y = \frac{1}{6}(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6) + \frac{1}{6}(k_1^y + k_2^y + k_3^y + k_4^y + k_5^y + k_6^y)$

21) $p^x = \frac{1}{8\,A_2}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + \frac{1}{8\,A_2}(-k_1^x - k_2^x - k_3^x + k_4^x + k_5^x + k_6^x)$

22) $r^x = \frac{1}{4\,D_2}(-a_2 + a_3 - a_4 + a_5) + \frac{1}{4\,D_2}(-k_2^x + k_3^x - k_4^x + k_5^x)$

23) $p^y = \frac{1}{4\,D_2}(-d_2 + d_3 - d_4 + d_5) + \frac{1}{4\,D_2}(-k_2^y + k_3^y - k_4^y + k_5^y)$

24) $r^y = \frac{1}{8\,A_2}(d_1 + d_2 + d_3 - d_4 - d_5 - d_6) + \frac{1}{8\,A_2}(k_1^y + k_2^y + k_3^y - k_4^y - k_5^y - k_6^y)$

Si maintenant, par l'un ou l'autre procédé, on avait réussi à déterminer les valeurs, soit absolues, soit relatives, des différents k^x et k^y, on trouverait tout de suite les valeurs de p^x et r^x, de p^y et r^y à l'aide des équations 21), 22), 23) et 24). Toute l'incertitude dans l'évaluation des constantes du cliché est ainsi jetée aux éléments les mieux déterminés à l'aide des étoiles de comparaison, c'est à dire les corrections aux „points invariables".

Les relations employées ici entre les coëfficients A et D n'ont pas lieu à la rigueur. On n'obtient donc pas aussi des équations qui ont les formes 13) . . . 18), mais qui en diffèrent un peu, et les équations correspondant à 19) . . . 24) reçoivent les formes:

25)
$$\begin{cases} \alpha p^x + \beta r^x + \Sigma a = 6 k_0^x - \Sigma k^x \\ \alpha_1 p^x + \beta_1 r^x - \Sigma' a - \Sigma' k^x = 0 \\ \alpha_2 p^x + \beta_2 r^x - \Sigma'' a - \Sigma'' k^x = 0 \end{cases}$$

où les Σa et Σk^x sont les mêmes sommes des quantités a et k^x qui entrent dans les équations 19) . . . 24). Les quantités α et α_2 sont alors beaucoup plus petites que α_1 et β et β_1 de même beaucoup plus petites que β_2, de manière que p^x est presque entièrement déterminé par la seconde, r^x par la troisième équation. Quant à l'équation qui contient k_0^x, elle obtient après l'élimination de p^x et de r^x la forme:

26)
$$k_0^x = \frac{1}{6} a + \frac{1}{6} (k_1^x + k_2^x + k_3^x + k_4^x + k_5^x + k_6^x) + \frac{1}{6} b (k_1^x + k_2^x + k_3^x - k_4^x - k_5^x - k_6^x) + \frac{1}{6} c (k_2^x - k_3^x + k_4^x - k_5^x)$$

où a, b, c sont de constantes; les coëfficients $\frac{1}{6} b$ et $\frac{1}{6} c$ ne s'élèvent qu'à quelques centièmes dans le cas où l'on a rattaché toutes les 6 plaques adjacentes au cliché en question.

Pour les k^y, p^y et r^y on obtient des équations de même forme que les équations 25) et 26), où en outre les coëfficients b et c sont les mêmes que dans l'équation pour k^x.

Procédons maintenant à la détermination des k^x et k^y à l'aide de ces dernières équations.

Comme les k^x et k^y sont les corrections à appliquer aux coordonnées des points les mieux déterminés par les étoiles de comparaison, c'est-à-dire aux „points invariables", et que par suite ils sont en général bien petits, on pourrait comme première approximation supposer ces corrections égales à zéro. C'est ce qu'a fait aussi M. HENRY dans son traité cité. Ici il n'est même pas nécessaire de supposer que chacun d'eux pour soi soit égal à zéro, mais seulement que la somme d'un certain nombre de telles corrections ait une valeur négligeable; et une telle approximation est d'autant plus permise, que des valeurs égales et de signes contraires de k^x ou k^y ont la même probabilité. Pour augmenter encore l'approximation, nous ajouterons aux deux membres de l'équation 26) un terme $\frac{1}{7} k^x$ de manière que nous ayons, au lieu de 26), l'équation:

27)
$$k_0^x = \tfrac{1}{7} a^{(0)} + \tfrac{1}{7} (k_0^x + k_1^x + k_2^x + k_3^x + k_4^x + k_5^x + k_6^x)$$
$$+ \tfrac{1}{7} b (k_1^x + k_2^x + k_3^x - k_4^x - k_5^x - k_6^x) + \tfrac{1}{7} c (k_2^x - k_3^x + k_4^x - k_5^x)$$

En même temps nous pouvons négliger les petits termes contenant b et c. Nous aurons donc comme *première approximation*

$$k_0^x = \tfrac{1}{7} a^{(0)}$$

De même nous trouverons par les équations correspondantes pour k_1^x, $k_2^x \ldots k_6^x$:

$$k_1^x = \tfrac{1}{7} a^{(1)};\ k_2^x = \tfrac{1}{7} a^{(2)} \cdots\cdots\cdots\cdots\ k_6^x = \tfrac{1}{7} a^{(6)}$$

Pour avoir la *seconde approximation*, nous substituerons dans les équations 27) les valeurs des différents k^x obtenues dans la première approximation.

On aura donc comme *seconde approximation:*

$$k^x = \tfrac{1}{7} a^{(0)} + \tfrac{1}{49} (a^{(0)} + a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} + a^{(4)} + a^{(5)} + a^{(6)})$$
$$+ \tfrac{1}{49} b (a^{(1)} + a^{(2)} + a^{(3)} - a^{(4)} - a^{(5)} - a^{(6)}) + \tfrac{1}{49} c (a^{(2)} - a^{(3)} + a^{(4)} - a^{(5)})$$

En continuant ainsi l'on aura une *troisième*, une *quatrième* etc. *approximation.* Pour notre part nous nous sommes arrêté à la troisième approximation.

Toutes ces opérations ont l'avantage, qu'elles ne doivent pas être faites de nouveau quand on cherche les constantes d'une certaine plaque, mais qu'elles peuvent être exécutées une fois pour toutes.

Cependant il y a encore une circonstance, sur laquelle nous devons attirer l'attention et dont l'origine est à chercher en ce que les équations de départ 27) ne peuvent donner que les *différences* des corrections k^x. Supposons, pour fixer les idées, que tous les a soient $= 0$, sauf l'un d'eux p. ex. $\frac{1}{7} a^{(1)} = + 0'.0200$. Nous aurons comme seconde approximation:

$$k_0^x = + 0'.0029\,; \quad k_2^x = + 0'.0029\,; \quad k_3^x = + 0'.0029\,; \quad k_4^x = + 0.0000 \text{ etc.;}$$

comme troisième approximation, si encore $b = 0$, $c = 0$:

$$k_0^x = + 0'.0040\,; \quad k_2^x = + 0'.0040 \text{ etc.; et encore } k_1^x = + 0'.0225$$

de manière que toutes les corrections deviendront de plus en plus grandes et positives; et en dernière conséquence que les positions des étoiles qui seront calculées à l'aide de ces valeurs de k^x et de k^y auront des déviations systématiques du catalogue des étoiles de comparaison.

Pour remédier à cet inconvénient, il faut, après la dernière approximation, introduire la condition que la somme de tous les k^x ou k^y dans une certaine étendue du ciel soit égale à zéro. Ainsi la concordance avec le système des étoiles de comparaison est rétablie. Il est à recommander de changer les limites de cette contrée, toujours après avoir déterminé ainsi les k^x et k^y de quelques clichés seulement.

Pour les clichés situés aux bords de la zone attribuée à un certain observatoire, la méthode décrite subit une modification, qui dépend du manque de symétrie des rattachements à ce cliché. Au bord nord les rattachements aux clichés 3 et 5 manquent, au bord sud ceux aux clichés 2 et 4. Dans le premier cas nous n'aurons plus les équations 3) et 5) ni les équations 9) et 11); dans le second, les équations 2) et 4) ainsi que 8) et 10) manquent. Les équations 13) et 16) restent, mais au lieu de 14) et 15), 17) et 18) on aura

au bord nord:

14') $$2\,D_2\,r^x + a_2 + a_4 = 2\,k_0^x - (k_2^x + k_4^x)\,; \quad 2\,D_2\,p^y + d_2 + d_4 = 2\,k_0^y - (k_2^y + k_4^y)$$

17') $$2\,A_2\,p^x + a_2 - a_4 = k_4^x - k_2^x\,; \quad -2\,A_2\,r^y + d_2 - d_4 = k_4^y - k_2^y$$

au bord sud:

$$14^{**})\qquad -2\,D_2\,r^x + a_3 + a_5 = 2\,k_0^x - (k_3^x + k_5^x)\,;\quad -D_2\,p^y \qquad + d_3 + d_5 = 2\,k_0^y - (k_3^x + k_5^x)$$

$$17^{(*)})\quad 2\,A_2\,p^x \qquad + a_3 - a_5 = \qquad k_5^x - k_3^x \quad ; \qquad -2\,A_2\,r^y + d_3 - d_5 = \qquad k_5^y - k_3^y$$

Au lieu des équations 19) . . . 24) nous aurons dans ces cas au bord nord:

$$19^{*})\qquad k_0^x = \frac{1}{2}(a_1 + a_6) + \frac{1}{2}(k_1^x + k_6^x)\,;$$

$$20^{*})\qquad k_0^y = \frac{1}{2}(d_1 + d_6) + \frac{1}{2}(k_1^y + k_6^y)\,;$$

$$21^{*})\qquad p^x = \frac{1}{6\,A_2}(-a_1 - a_2 + a_4 + a_6) + \frac{1}{6\,A_2}(-k_1^x - k_2^x + k_4^x + k_6^x)\,;$$

$$23^{*})\qquad p^y = \frac{1}{2\,D_2}(d_1 - d_2 - d_4 + d_6) + \frac{1}{2\,D_2}(k_1^y - k_2^y - k_4^y + k_6^y)\,;$$

$$22^{*})\qquad r^x = \frac{1}{2\,D_2}(a_1 - a_2 - a_4 + a_6) + \frac{1}{2\,D_2}(k_1^x - k_2^x - k_4^x + k_6^x)\,;$$

$$24^{*})\qquad r^y = \frac{1}{6\,A_2}(d_1 + d_2 - d_4 - d_6) + \frac{1}{6\,A_2}(k_1^y + k_2^y - k_4^y - k_6^y)$$

tandis que les équations pour le bord sud s'obtiennent de celles-ci en remplaçant les indices 2 et 4 par 3 et 5 et en écrivant $-D_2$ au lieu de D_2.

Ces équations aussi peu que les équations 19) . . . 24) n'auront pas lieu, à la rigueur, dans la pratique. Elles sont remplacées par des équations telles que 25) et 26). Mais toujours k_0^x et k_0^y sont déterminés seulement par les rattachements aux clichés 1 et 6, c'est-à-dire seulement par des rattachements de même espèce que ceux qu'a employés M. HENRY. Les rattachements aux deux autres clichés ont servi seulement pour la détermination des constantes de l'échelle et de l'orientation.

L'état des choses deviendrait pourtant tout autre, si l'on pouvait faire $r^x = r^y$ et $p^y = p^x$, ou si l'on savait les relations entre ces deux paires de constantes. Car la détermination de p^x et de r^y à l'aide des équations 17^{*}) ou 17^{**}) n'offre aucune difficulté. Mais comme ces relations ne seront connues qu' après l'examen d'un très grand nombre de clichés, il faut pour le moment abandonner cette voie simple.

On pourrait encore se servir de la circonstance que 1:o) les différences entre les r^x et p^y du cliché en question et des clichés 2 et 4 ou 3 et 5 sont connues par leur rattachements, et 2:o) que les constantes correspondantes de ces derniers clichés sont connues par leurs rattachements à tous les clichés adjacents; par ce détour on pourrait avoir aussi les valeurs des r^x et p^y du cliché en question. Mais le coëfficient $2\,D$ étant grand, on ne tirerait ainsi des équations 14*) ou 14**) que des valeurs bien incertaines de $2\,k_0^x$ ou $2\,k_0^y$.

Nous nous sommes donc restreint à des équations telles que 19*) et 20*), en ajoutant seulement aux deux membres $\frac{1}{2}\,k_0^x$ ou $\frac{1}{2}\,k_0^y$, d'où elles prennent la forme:

$$28)\quad k_0^x = \tfrac{1}{3}\,a + \tfrac{1}{3}\,(k_0^x + k_1^x + k_6^x) + \tfrac{1}{3}\,b\,(k_1^x + k_2^x - k_4^x - k_6^x) + \tfrac{1}{3}\,c\,(k_1^x - k_2^x - k_4^x + k_6^x)$$

et nous avons alors opéré avec ces équations de même qu'avec celles de la forme 27).

Les corrections k_0^x et k_0^y d'un cliché sur le bord dépendent donc presque exclusivement des autres clichés sur le même bord, tandis que les clichés hors du bord, sont bien dépendants de ceux-ci. Par cette raison nous avons, après avoir formé les équations 27) et 28) procédé ainsi:

1:o) formé les secondes et troisièmes approximations pour les k^x et k^y des clichés au bord nord ainsi qu'au bord sud;

2:o) rétabli la concordance avec le système des étoiles de comparaison en faisant la somme d'un certain nombre de ces constantes égale à zéro;

3:o) formé, pour les plaques non situées aux bords, les secondes et troisièmes approximations; et

4:o) rétabli pour tous les clichés dans une certaine étendue du ciel la concordance avec le système.

En pratique toutes les opérations à effectuer après que les rattachements ont été faits, sont fort simples, consistant principalement en additions ou en multiplications avec de facteurs simples ou petits. Pour les éclaircir, je donnerai ici deux exemples de la

Formation des équations entre les corrections aux points invariables.

Exemple 1:

Cliché 437, situé dans le milieu de la zone:

Par le rattachement de ce cliché au cliché 433 nous avons trouvé (page 26):

Cliché:

433) $+65.1\,p^x + 76.8\,r^x + 0'.0170 = k^x_{437} - k^x_{433}$; $+76.8\,p^y - 65.1\,r^y + 0'.0069 = k^y_{437} - k^y_{433}$

Nous trouvons de même par les rattachements aux clichés:

430) $+90.2\,p^x - 4.7\,r^x + 0.0068 = k^x_{437} - k^x_{430}$; $-4.7\,p^y - 90.2\,r^y + 0.0069 = k^y_{437} - k^y_{430}$

444) $-81.9\,p^x - 19.7\,r^x + 0.0112 = k^x_{437} - k^x_{444}$; $-19.7\,p^y + 81.9\,r^y - 0.0008 = k^y_{437} - k^y_{444}$

440) $-55.3\,p^x + 68.5\,r^x + 0.0051 = k^x_{437} - k^x_{440}$; $+68.5\,p^y + 55.3\,r^y + 0.0040 = k^y_{437} - k^y_{440}$

434) $+63.2\,p^x - 52.7\,r^x + 0.0145 = k^x_{437} - k^x_{434}$; $-52.7\,p^y - 63.2\,r^y + 0.0063 = k^y_{437} - k^y_{434}$

441) $-59.8\,p^x - 50.9\,r^x + 0.0629 = k^x_{437} - k^x_{441}$; $-50.9\,p^y + 59.8\,r^y - 0.0165 = k^y_{437} - k^y_{441}$

Par addition ou par soustraction on obtient:

430 + 444) $+8.3\,p^x - 24.4\,r^x + 0'.0180 = 2\,k^x_{437} - (k^x_{430} + k^x_{444})$; $-24.4\,p^y - 8.3\,r^y + 0'.0061 = 2\,k^y_{437} - (k^y_{430} + k^y_{444})$

433 + 441) $+5.3\,p^x + 25.9\,r^x + 0.0199 = 2\,k^x_{437} - (k^x_{433} + k^x_{441})$; $+25.9\,p^y - 5.3\,r^y - 0.0096 = 2\,k^y_{437} - (k^y_{433} + k^y_{441})$

434 + 440) $+7.9\,p^x + 15.8\,r^x + 0.0196 = 2\,k^x_{437} - (k^x_{434} + k^x_{440})$; $+15.8\,p^y - 7.9\,r^y + 0.0103 = 2\,k^y_{437} - (k^y_{434} + k^y_{440})$

430 − 444) $+172.1\,p^x + 15.0\,r^x - 0'.0044 = k^x_{444} - k^x_{430}$; $+15.0\,p^y - 172.1\,r^y + 0'.0077 = k^y_{444} - k^y_{430}$

433 − 441) $+124.9\,p^x + 127.7\,r^x + 0.0141 = k^x_{441} - k^x_{433}$; $+127.7\,p^y - 124.9\,r^y + 0.0234 = k^y_{441} - k^y_{433}$

434 − 440) $+118.5\,p^x - 121.2\,r^x + 0.0094 = k^x_{440} - k^x_{434}$; $-121.2\,p^y - 118.5\,r^y + 0.0023 = k^y_{440} - k^y_{434}$

De ces équations, les trois premières déterminent k^x_{437} ou k^y_{437}. On trouve par leur addition:

$$+21.5\,p^x + 17.3\,r^x + 0'.0575 = 6\,k^x_{437} - k^x\,(430 + 433 + 434 + 440 + 441 + 444)$$

$$+17.3\,p^y - 21.5\,r^y + 0.0068 = 6\,k^y_{437} - k^y\,(430 + 433 + 434 + 440 + 441 + 444)$$

où les symboles dans les membres droits sont choisis pour ne pas répéter k^x ou k^y.



La détermination de p^x et de r^y se fait par l'addition des trois dernières équations:

$$+415._5\,p^x + 21._5\,r^x + 0'._{0191} = k^x\,(-430-433-434+440+441+444)$$

$$+21._5\,p^y - 415._5\,r^y + 0._{0334} = k^y\,(-430-433-434+440+441+444)$$

Enfin on trouve r^x et p^y en conbinant les deux dernières équations par soustraction:

$$+6._4\,p^x + 248._9\,r^x + 0'._{0047} = k^x\,(-433+434-440+441)$$

$$+248._9\,p^y - 6._4\,r^y + 0._{0211} = k^y\,(-433+434-440+441)$$

Entre ces équations on peut finalement éliminer p^x, r^x, p^y et r^y et l'on aura ainsi les équations entre les corrections seules des points invariables.

$$6\,k^x_{437} = +0'._{0562} + k^x\,(430+433+434+440+441+444) - 0._{0507}\,k^x\,(430+433+434-440-441-444)$$
$$- 0._{0647}\,k^x\,(433-434+440-441)$$

$$6\,k^y_{437} = +0'._{0035} + k^y\,(430+433+434+440+441+444) - 0._{0507}\,k^x\,(430+433+434-440-441-414)$$
$$- 0._{0647}\,k^y\,(433-434+440-441)$$

ou si l'on ajoute aux deux membres k^x_{437} ou k^y_{437} et que l'on divise par 7:

$$k^x_{437} = +0'._{0080} + \tfrac{1}{7}\,k^x\,(430+433+434+437+440+441+444)$$
$$-0._{0072}\,k^x\,(430+433+434-440-441-444) - 0._{0092}\,k^x\,(433-434+440-441)$$

$$k^y_{437} = +0'._{0005} + \tfrac{1}{7}\,k^y\,(430+433+434+437+440+441+444)$$
$$-0._{0072}\,k^y\,(430+433+434-440-441-444) - 0._{0092}\,k^y\,(433-434+440-441)$$

Exemple II:

Cliché 417, situé au bord nord de la zone:

Par les rattachements de ce cliché aux clichés adjacents on avait trouvé:

Ratt. au cliché:

$$410)\quad +\ 97.8\,p^x + 1.6\,r^x + 0'.0135 = k^x_{417} - k^x_{410}\,;\quad +\ 1.6\,p^y - 97.8\,r^y + 0'.0040 = k^y_{417} - k^y_{410}$$

$$424)\quad -109.0\,p^x - 9.6\,r^x - 0.0076 = k^x_{417} - k^x_{424}\,;\quad -\ 9.6\,p^y + 109.0\,r^y - 0.0225 = k^y_{417} - k^y_{424}$$

$$413)\quad +\ 44.5\,p^x + 63.2\,r^x + 0.0039 = k^x_{417} - k^x_{413}\,;\quad +63.2\,p^y - 44.5\,r^y - 0.0042 = k^y_{417} - k^y_{413}$$

$$420)\quad -\ 52.5\,p^x + 60.0\,r^x - 0.0083 = k^x_{417} - k^x_{420}\,;\quad +58.5\,p^y + 61.4\,r^y - 0.0004 = k^y_{417} - k^y_{420}$$

(Les coëfficients A et D dans les deux équations provenant du rattachement des clichés 417 et 420 ne sont pas identiques, comme on le voit. Cela tient à ce que, dans la détermination des constantes du cliché 420 à l'aide des étoiles de comparaison, ont avait dû exclure comme trop incertaines les x de deux étoiles et les y de deux autres et que par suite le „point invariable“ du cliché 420 n'a pas la même position dans la détermination des x que dans celle des y. Dans les calculs ceci ne change que le calcul de a_2 et d_2 dans les équations k) page 25).

On trouve maintenant:

$$410+424)\quad -11.2\,p^x - 8.0\,r^x + 0'.0059 = 2\,k^x_{417} - (k^x_{410} + k^x_{424});\quad -\ 8.0\,p^y + 11.2\,r^y - 0'.0185 = 2\,k^y_{417} - (k^y_{410} + k^y_{424})$$

$$413+420)\quad -\ 8.0\,p^x + 123.2\,r^x - 0.0044 = 2\,k^x_{417} - (k^x_{413} + k^x_{420});\quad +121.7\,p^y + 16.9\,r^y - 0.0046 = 2\,k^y_{417} - (k^y_{413} + k^y_{420})$$

$$410-424)\quad +206.8\,p^x + 11.2\,r^x + 0'.0211 = k^x_{424} - k^x_{410}\,;\quad +11.2\,p^y - 206.8\,r^y + 0'.0265 = k^y_{424} - k^y_{410}$$

$$413-420)\quad +\ 97.0\,p^x + 3.2\,r^x + 0.0122 = k^x_{420} - k^x_{413}\,;\quad +\ 4.7\,p^y - 105.9\,r^y - 0.0038 = k^y_{420} - k^y_{413}$$

L'addition des deux dernières équations donne encore:

$$+303.8\,p^x + 14.4\,r^x + 0'.0333 = -k^x_{410} - k^x_{413} + k^x_{420} + k^x_{424}\,;$$

$$+\ 15.9\,p^y - 312.7\,r^y + 0'.0227 = -k^y_{410} - k^y_{413} + k^y_{420} + k^y_{424}$$

En éliminant alors p^x, r^x, p^y et r^y entre ces équations et celles qui contiennent k^x_{417} et k^y_{417} on aura:

$$\begin{cases} 2\,k^x_{417} = +\,0'.0069 + k^x\,(410 + 424) + 0.0604\,k^x\,(413 - 417 + 420 - 417) + 0.0385\,k^x\,(410 + 413 - 420 - 424) \\ 2\,k^y_{417} = -\,0'.0179 + k^y\,(410 + 424) + 0.0606\,k^y\,(413 - 417 + 420 - 417) + 0.0390\,k^y\,(410 + 413 - 420 - 424) \end{cases}$$

ou, si l'on ajoute k^x_{417} resp. k^y_{417} aux deux membres et que l'on divise par 3:

$$\begin{cases} k^x_{417} = +\,0'.0023 + \tfrac{1}{3}\,k^x\,(410 + 417 + 424) + 0.0201\,k^x\,(413 - 417 + 420 - 417) + 0.0128\,k^x\,(410 + 413 - 420 - 424) \\ k^y_{417} = -\,0'.0060 + \tfrac{1}{3}\,k^y\,(410 + 417 + 424) + 0.0202\,k^x\,(413 - 417 + 420 - 417) + 0.0130\,k^x\,(410 + 413 - 420 - 424) \end{cases}$$

Je donne ici un schèma pour la situation des divers clichés:

			397		404		411		418		425		432				$\delta_0 = 41^0$
		394		401		408		415		422		429		436			$\delta_0 = 42^0$
	391		398		405		412		419		426		433		440		$\delta_0 = 43^0$
388		395		402		409		416		423		430		437		444	$\delta_0 = 44^0$
	392		399		406		413		420		427		434		441		$\delta_0 = 45^0$
389		396		403		410		417		424		431		438			$\delta_0 = 46^0$
$9^h\,10^m$		$9^h\,20^m$		$9^h\,30^m$		$9^h\,40^m$		$9^h\,50^m$		$10^h\,0^m$		$10^h\,10^m$		$10^h\,20^m$		$10^h\,30^m$	

Les numéros 393, 400, 407, 414, 421, 428, 435 manquent. Ces clichés sont situés sur $\delta_0 = 40^0$ et ne peuvent pas être traités, avant que le catalogue des zones de Lund ait paru.

De la même manière nous avons formé un nombre de telles

Equations entre les corrections aux points invariables.

Remarque: Dans l'expression de k^y j'ai écrit au lieu des sommes des k^y simplement *I*, *II* et *III* pour gagner de la place, les indices étant déjà suffisamment marqués dans l'expression de k^x. Si en outre les coëfficients sont tous les mêmes que ceux de l'expression de k^x, j'écris seulement „+ etc.".

Expressions des k^x: — *des k^y:*

$$k^x_{388} = -0'.0047 + \tfrac{1}{7} k^x_{(381+384+385+388+391+392+395)} + 0.0393\, k^x_{(381+384+385-391-392-395)} + 0.0088\, k^x_{(384-385+391-392)}$$

$$k^y_{388} = +0'.0053 + \text{etc.}$$

$$k^x_{389} = -0.0050 + \tfrac{1}{3} k^x_{(382+389+396)} - 0.0832\, k^x_{(389-385+389-392)} - 0.0131\, k^x_{(382+385-392-396)}$$

$$k^y_{389} = -0.0036 + \text{etc.}$$

$$k^x_{391} = +0.0062 + \tfrac{1}{7} k^x_{(384+387+388+391+394+395+398)} + 0.0231\, k^x_{(384+387+388-394-395-398)} - 0.0072\, k^x_{(387-388+394-395)}$$

$$k^y_{391} = +0.0054 + \tfrac{1}{7} I + 0.0237\, II - 0.0084\, III$$

$$k^x_{392} = +0.0002 + \tfrac{1}{7} k^x_{(385+388+389+392+395+396+399)} - 0.0128\, k^x_{(385+388+389-395-396-399)} - 0.0140\, k^x_{(388-389+395-396)}$$

$$k^y_{392} = -0.0014 + \text{etc.}$$

[1]) $$k^x_{394} = -0.0018 + \tfrac{1}{5} k^x_{(390+391+394+397+398)} - 0.0323\, k^x_{(387+390+391-394-397-398)} + 0.0408\, k^x_{(390-391+397-398)}$$

$$k^y_{394} = -0.0079 + \tfrac{1}{5} I - 0.0383\, II + 0.0490\, III$$

$$k^x_{395} = -0.0030 + \tfrac{1}{7} k^x_{(388+391+392+395+398+399+402)} - 0.0161\, k^x_{(388+391+392-398-399-402)} + 0.0167\, k^x_{(391-392+398-399)}$$

$$k^y_{395} = -0.0087 + \text{etc.}$$

$$k^x_{396} = -0'.0026 + \tfrac{1}{3} k^x (389 + 396 + 403) - 0.0083\, k^x (396 - 392 + 396 - 399) - 0.0013\, k^x (389 + 392 - 399 - 403)$$

$$k^y_{396} = -0.0010 + \text{etc.}$$

$$k^x_{397} = -0.0161 + \tfrac{1}{3} k^x (390 + 397 + 404) - 0.0725\, k^x (397 - 394 + 397 - 401) + 0.0380\, k^x (390 + 394 - 401 - 404)$$

$$k^y_{397} = -0.0028 + \tfrac{1}{3} I - 0.0757\, II + 0.0387\, III$$

$$k^x_{398} = +0.0007 + \tfrac{1}{7} k^x (391 + 394 + 395 + 398 + 401 + 402 + 405) + 0.0084\, k^x (391 + 394 + 395 - 401 - 402 - 405) - 0.0334\, k^x (394 - 395 + 401 - 402)$$

$$k^y_{398} = -0.0021 + \text{etc.}$$

$$k^x_{399} = -0.0004 + \tfrac{1}{7} k^x (392 + 395 + 396 + 399 + 402 + 403 + 406) + 0.0206\, k^x (392 + 395 + 396 - 402 - 403 - 406) + 0.0325\, k^x (395 - 396 + 402 - 403)$$

$$k^y_{399} = -0.0008 + \text{etc.}$$

[1] $$k^x_{401} = -0.0039 + \tfrac{1}{5} k^x (397 + 398 + 401 + 404 + 405) - 0.0164\, k^x (397 + 398 + 401 - 404 - 405 - 408) + 0.0031\, k^x (397 - 398 + 404 - 405)$$

$$k^y_{401} = +0.0011 + \text{etc.}$$

$$k^x_{402} = +0.0065 + \tfrac{1}{7} k^x (395 + 398 + 399 + 402 + 405 + 406 + 408) - 0.0342\, k^x (395 + 398 + 399 - 405 - 406 - 409)$$

$$k^y_{402} = -0.0030 + \text{etc.}$$

$$k^x_{403} = -0.0040 + \tfrac{1}{3} k^x (396 + 403 + 410) + 0.0431\, k^x (403 - 399 + 403 - 406) + 0.0145\, k^x (396 + 399 - 406 - 410)$$

$$k^y_{403} = -0.0010 + \text{etc.}$$

$$k^x_{404} = +0.0085 + \tfrac{1}{3} k^x (397 + 404 + 411) + 0.0200\, k^x (404 - 401 + 404 - 408) - 0.0524\, k^x (397 + 401 - 408 - 411)$$

$$k^y_{404} = -0'.0097 + \text{etc.}$$

$$k^x_{405} = +0.0026 + \tfrac{1}{7} k^x (398 + 401 + 402 + 405 + 408 + 409 + 412) + 0.0074\, k^x (398 + 401 + 402 - 408 - 409 - 412) - 0.0051\, k^x (401 - 402 + 408 - 409)$$

$$k^y_{405} = +0.0025 + \tfrac{1}{7} I + 0.0067\, II - 0.0026\, III$$

[1]) A cause du manque d'étoiles on n'a pas pu effectuer le rattachement des clichés 394 et 401.

$$k^x_{406} = +\ 0.0003 + \tfrac{1}{7}\, k^x\,(399 + 402 + 403 + 406 + 409 + 410 + 413) - 0.0045\, k^x\,(399 + 402 + 403 - 409 - 410 - 413) + 0.0127\, k^x\,(402 - 403 + 409 - 410)$$
$$k^y_{406} = -\ 0.0056 + \text{etc.}$$

$$k^x_{408} = -\ 0.0043 + \tfrac{1}{7}\, k^x\,(401 + 404 + 405 + 408 + 411 + 412 + 415) + 0.0060\, k^x\,(401 + 404 + 405 - 411 - 412 - 415) + 0.0113\, k^x\,(404 - 405 + 411 - 412)$$
$$k^y_{408} = -\ 0.0042 + \tfrac{1}{7}\, I + 0.0083\, II + 0.0133\, III$$

$$k^x_{409} = -\ 0.0052 + \tfrac{1}{7}\, k^x\,(402 + 405 + 406 + 409 + 412 + 413 + 416) + 0.0293\, k^x\,(402 + 405 + 406 - 412 - 413 - 416) - 0.0242\, k^x\,(405 - 406 + 412 - 413)$$
$$k^y_{409} = +\ 0.0077 + \tfrac{1}{7}\, I + 0.0290\, II - 0.0229\, III$$

$$k^x_{410} = -\ 0.0047 + \tfrac{1}{3}\, k^x\,(403 + 410 + 417) - 0.0125\, k^x\,(410 - 406 + 410 - 413) - 0.0138\, k^x\,(403 + 406 - 413 - 417)$$
$$k^y_{410} = +\ 0.0053 + \text{etc.}$$

$$k^x_{411} = -\ 0.0118 + \tfrac{1}{5}\, k^x\,(404 + 411 + 418) + 0.0164\, k^x\,(411 - 408 + 411 - 415) + 0.0556\, k^x\,(404 + 408 - 415 - 418)$$
$$k^y_{411} = -\ 0.0101 + \tfrac{1}{3}\, I + 0.0210\, II + 0.0516\, III$$

$$k^x_{412} = +\ 0.0034 + \tfrac{1}{7}\, k^x\,(405 + 408 + 409 + 412 + 415 + 416 + 419) + 0.0095\, k^x\,(405 + 408 + 409 - 415 - 416 - 419) - 0.0033\, k^x\,(408 - 409 + 415 - 416)$$
$$k^y_{412} = -\ 0.0065 + \tfrac{1}{7}\, I + 0.0059\, II - 0.0169\, III$$

$$k^x_{413} = -\ 0.0047 + \tfrac{1}{7}\, k^x\,(406 + 409 + 410 + 413 + 416 + 417 + 420) - 0.0108\, k^x\,(406 + 409 + 410 - 416 - 417 - 420)$$
$$k^y_{413} = +\ 0.0006 + \tfrac{1}{7}\, I - 0.0084\, II + 0.0276\, III$$

$$k^x_{415} = -\ 0.0005 + \tfrac{1}{7}\, k^x\,(408 + 411 + 412 + 415 + 418 + 419 + 422) - 0.0038\, k^x\,(408 + 411 + 412 - 418 - 419 - 422) - 0.0080\, k^x\,(411 - 412 + 418 - 419)$$
$$k^y_{415} = -\ 0.0018 + \tfrac{1}{7}\, I - 0.0055\, II - 0.0036\, III$$

$$k^x_{416} = +\ 0.0026 + \tfrac{1}{7}\, k^x\,(409 + 412 + 413 + 416 + 419 + 420 + 423) - 0.0194\, k^x\,(409 + 412 + 413 - 419 - 420 - 423)$$
$$k^y_{416} = +\ 0.0004 + \tfrac{1}{7}\, I - 0.0128\, II - 0.0243\, III$$

$$k^x_{417} = +0'.0023 + \tfrac{1}{3}k^x(410+417+424) - 0.0201\,k^x(417-413+417-420) + 0.0128\,k^x(410+413-420-424)$$

$$k^y_{417} = -0'.0060 + \tfrac{1}{3}I - 0.0202\,II + 0.0130\,III$$

$$k^x_{418} = +0.0064 + \tfrac{1}{3}k^x(411+418+425) - 0.1202\,k^x(418-415+418-422) - 0.0769\,k^x(411+415-422-425)$$

$$k^y_{418} = +0.0006 + \tfrac{1}{3}I - 0.1343\,II - 0.0662\,III$$

$$k^x_{419} = +0.0012 + \tfrac{1}{7}k^x(412+415+416+419+422+423+426) - 0.0210\,k^x(412+415+416-422-423-426) + 0.0198\,k^x(415-416+422-223)$$

$$k^y_{419} = -0.0064 + \tfrac{1}{7}I - 0.0154\,II + 0.0117\,III$$

$$k^x_{420} = -0.0001 + \tfrac{1}{7}k^x(413+416+417+420+423+424+427) + 0.0141\,k^x(413+416+417-423-424-427) + 0.0107\,k^x(416-417+423-424)$$

$$k^y_{420} = +0.0047 + \tfrac{1}{7}I + 0.0073\,II + 0.0085\,III$$

$$k^x_{422} = -0.0037 + \tfrac{1}{7}k^x(415+418+419+422+425+426+429) + 0.0189\,k^x(415+418+419-425-426-429) + 0.0264\,k^x(418-419+425-426)$$

$$k^y_{422} = -0.0009 + \tfrac{1}{7}I + 0.0158\,II + 0.0299\,III$$

$$k^x_{423} = +0.0015 + \tfrac{1}{7}k^x(416+419+420+423+426+427+430) + 0.0308\,k^x(416+419+420-426-427-430) - 0.0125\,k^x(419-420+426-427)$$

$$k^y_{423} = -0.0022 + \tfrac{1}{7}I + 0.0330\,II - 0.0160\,III$$

$$k^x_{424} = -0'.0169 + \tfrac{1}{3}k^x(417+424+431) + 0.0169\,k^x(424-420+424-427) + 0.0066\,k^x(417+420-427-431)$$

$$k^y_{424} = -0'.0029 + \tfrac{1}{3}I + 0.0160\,II + 0.0066\,III$$

$$k^x_{425} = -0.0006 + \tfrac{1}{3}k^x(418+425+432) + 0.0935\,k^x(425-422+425-429) + 0.0407\,k^x(418-422-429+432)$$

$$k^y_{425} = -0.0033 + \tfrac{1}{3}I + 0.1012\,II + 0.0354\,III$$

$$k^x_{426} = -0.0109 + \tfrac{1}{7}k^x(419+422+423+426+429+430+433) + 0.0050\,k^x(419+422+423-429-430-433) + 0.0104\,k^x(422-423+429-430)$$

$$k^y_{426} = -0.0002 + \tfrac{1}{7}I + 0.0024\,II + 0.0136\,III$$

$$k^x_{427} = +\ 0.0008 + \tfrac{1}{7}\,k^x\,(420 + 423 + 424 + 427 + 430 + 431 + 434) - 0.0237\,k^x\,(420 + 423 + 424 - 430 - 431 - 434) + 0.0041\,k^x\,(423 - 424 + 430 - 431)$$

$$k^y_{427} = -\ 0.0047 + \tfrac{1}{7}\,I - 0.0169\,II + 0.0229\,III$$

$$k^x_{429} = -\ 0.0009 + \tfrac{1}{7}\,k^x\,(422 + 425 + 426 + 429 + 432 + 433 + 436) - 0.0251\,k^x\,(422 + 425 + 426 - 432 - 433 - 436) - 0.0336\,k^x\,(425 - 426 + 432 - 433)$$

$$k^y_{429} = +\ 0.0015 + \text{etc.}$$

$$k^x_{430} = -\ 0.0020 + \tfrac{1}{7}\,k^x\,(423 + 426 + 427 + 430 + 433 + 434 + 437) - 0.0437\,k^x\,(423 + 426 + 427 - 433 - 434 - 437) - 0.0206\,k^x\,(426 - 427 + 433 - 434)$$

$$k^y_{430} = +\ 0.0003 + \tfrac{1}{7}\,I - 0.0438\,II - 0.0372\,III$$

$$k^x_{431} = +\ 0.0026 + \tfrac{1}{3}\,k^x\,(424 + 431 + 438) - 0.0149\,k^x\,(431 - 427 + 431 - 434) - 0.0469\,k^x\,(424 + 427 - 434 - 438)$$

$$k^y_{431} = -\ 0.0008 + \tfrac{1}{3}\,I - 0.0161\,II - 0.0467\,III$$

1) $$k^x_{432} = -\ 0.0059 + \tfrac{1}{5}\,k^x\,(425 + 429 + 432 + 436 + 439) - 0.0358\,k^x\,(425 + 429 - 436 - 439) + 0.0445\,k^x\,(425 - 429 - 436 + 439)$$

$$k^y_{432} = -\ 0.0012 + \text{etc.}$$

$$k^x_{433} = -\ 0.0105 + \tfrac{1}{7}\,k^x\,(426 + 429 + 430 + 433 + 436 + 437 + 440) + 0.0249\,k^x\,(426 + 429 + 430 - 436 - 437 - 440) + 0.0335\,k^x\,(429 - 430 + 436 - 437)$$

$$k^y_{433} = -\ 0.0089 + \text{etc.}$$

$$k^x_{434} = -\ 0.0035 + \tfrac{1}{7}\,k^x\,(427 + 430 + 431 + 434 + 437 + 438 + 441) + 0.0365\,k^x\,(427 + 430 + 431 - 437 - 438 - 441) + 0.0356\,k^x\,(430 - 431 + 437 - 438)$$

$$k^y_{434} = -\ 0.0022 + \tfrac{1}{7}\,I + 0.0350\,II + 0.0316\,III$$

2) $$k^x_{436} = +\ 0.0007 + \tfrac{1}{6}\,k^x\,(429 + 432 + 433 + 436 + 439 + 440) - 0.0308\,k^x\,(432 + 433 - 439 - 440) + 0.0821\,k^x\,(432 - 433 + 439 - 440)$$

$$k^y_{436} = +\ 0.0043 + \text{etc.}$$

$$k^x_{437} = +\ 0.0080 + \tfrac{1}{7}\,k^x\,(430 + 433 + 434 + 437 + 440 + 441 + 444) - 0.0072\,k^x\,(430 + 433 + 434 - 440 - 441 - 444) - 0.0092\,k^x\,(433 - 434 + 440 - 441)$$

$$k^y_{437} = +\ 0.0005 + \text{etc.}$$

$$k^x_{438} = +\ 0.0017 + \tfrac{1}{3}\, k^x{}_{(431 + 438 + 444)} + 0.0500\, k^x{}_{(438 - 431 + 438 - 441)} + 0.0378\, k^x{}_{(431 + 434 - 441 - 445)} \qquad k^y_{438} = +\ 0.0020 + \text{etc.}$$

[3]) $$k^x_{440} = -\ 0.0016 + \tfrac{1}{5}\, k^x{}_{(436 + 437 + 440 + 443 + 444)} - 0.0231\, k^x{}_{(433 + 436 + 437 - 440 - 443 - 444)} + 0.0193\, k^x{}_{(436 - 437 + 443 - 444)} \qquad k^y_{440} = +\ 0.0018 + \text{etc.}$$

$$k^x_{441} = +\ 0.0116 + \tfrac{1}{7}\, k^x{}_{(434 + 437 + 438 + 441 + 444 + 445 + 448)} - 0.0353\, k^x{}_{(431 + 437 + 438 - 444 - 445 - 448)} + 0.0662\, k^x{}_{(437 - 438 + 444 - 445)} \qquad k^y_{441} = +\ 0.0017 + \text{etc.}$$

[4]) $$k^x_{444} = -\ 0.0053 + \tfrac{1}{6}\, k^x{}_{(437 + 440 + 441 + 444 + 447 + 448)} + 0.0174\, k^x{}_{(440 + 441 - 447 - 448)} - 0.0735\, k^x{}_{(440 - 441 + 447 - 448)} \qquad k^y_{444} = -\ 0.0045 + \text{etc.}$$

---

[1]) Ici l'emploi des formules ordinaires pour des clichés du bord de la zone aurait donné aux coëfficients du 3:ème et du 4:ème terme de très grandes valeurs à cause des positions excentriques des points invariables.

[2]) Le rattachement des clichés 436 et 443 n'a pas pu être fait par suite du manque d'étoiles.

[3]) Le rattachement de 440 et 447 était impossible.

[4]) Le rattachement de 444 et 451 était impossible.

Evaluation des corrections aux points invariables.

Procédons maintenant à l'évaluation des corrections mêmes. Utilisant comme première approximation les termes constants, nous déduisons, pour les clichés des bords de la zone, comme seconde approximation:

Bord nord:

Numéros des clichés:	k^x	k^y
396	− 0'.0064	− 0'.0029
403	− 0.0081	+ 0.0003
410	− 0.0067	+ 0.0045
417	− 0.0042	− 0.0068
424	− 0.0215	− 0.0062
431	− 0.0010	− 0.0012
Moyennes:	− 0.0080	− 0.0020

Bord sud:

Numéros des clichés:	k^x	k^y
404	+ 0'.0031	− 0'.0184
411	− 0.0112	− 0.0174
418	+ 0.0030	− 0.0037
425	+ 0.0035	− 0.0053
Moyennes:	− 0.0004	− 0.0112

La concordance avec le système des étoiles de repère est rétabli en ajoutant aux corrections précédentes ces moyennes prises avec des signes contraires. Nous trouvons ainsi:

Numéros:	k^x	k^y
396	+ 0'.0016	− 0'.0009
403	− 0.0001	+ 0.0023
410	+ 0.0013	+ 0.0065
417	+ 0.0038	− 0.0048
424	− 0.0135	− 0.0042
431	+ 0.0070	+ 0.0008

Numéros:	k^x	k^y
404	+ 0'.0035	− 0'.0072
411	− 0.0108	− 0.0062
418	+ 0.0034	+ 0.0075
425	+ 0.0039	+ 0.0059

Comme les clichés 397 et 432 du bord sud ainsi que le cliché 438 du bord nord entrent, même avec des coëfficients faibles, dans les expressions de quelques-uns des k^x et k^y dont nous aurons besoin, nous employons pour les corrections de ces clichés leurs premières approximations corrigées à l'aide de ces mêmes moyennes:

438	+ 0'.0097	+ 0'.0040

397	− 0'.0157	+ 0'.0084
432	− 0.0055	+ 0.0100

La formation des secondes approximations des k^x et k^y des clichés non situés à l'un des bords de la zone fut alors effectuée à l'aide de ces valeurs des k^x et k^y des clichés des bords ainsi que des termes constants des équations du schème, employés comme premières approximations. Enfin nous avons formé les troisièmes approximations à l'aide des secondes et des k^x et k^y des bords.

Voici les résultats:

Numéros des clichés.	Seconde approximation:		Troisième approximation:		Valeurs définitives:	
	k^x:	k^y:	k^x:	k^y:	k^x:	k^y:
395	− 0'.0022	− 0'.0095				
398	+ 0.0017	− 0.0039				
399	+ 0.0003	− 0.0034				
401	− 0.0065	+ 0.0016				
402	+ 0.0067	− 0.0044	+ 0'.0072	− 0'.0045	+ 0'.0094	− 0'.0015
405	+ 0.0026	+ 0.0019	+ 0.0025	+ 0.0008	+ 0.0047	+ 0.0038
406	− 0.0000	− 0.0045	+ 0.0000	− 0.0048	+ 0.0022	− 0.0018
408	− 0.0057	− 0.0074	− 0.0066	− 0.0084	− 0.0044	− 0.0054
409	− 0.0044	+ 0.0072	− 0.0044	+ 0.0070	− 0.0022	+ 0.0100
412	+ 0.0034	− 0.0077	+ 0.0028	− 0.0088	+ 0.0050	− 0.0058
413	− 0.0050	+ 0.0020	− 0.0053	+ 0.0021	− 0.0031	+ 0.0051
415	− 0.0021	− 0.0044	− 0.0027	− 0.0056	− 0.0005	− 0.0026
416	+ 0.0024	+ 0.0002	+ 0.0018	− 0.0001	+ 0.0040	+ 0.0029
419	+ 0.0003	− 0.0089	− 0.0016	− 0.0102	+ 0.0006	− 0.0072
420	− 0.0016	+ 0.0032	− 0.0018	+ 0.0031	+ 0.0004	+ 0.0061
422	− 0.0048	− 0.0001	− 0.0054	− 0.0002	− 0.0032	+ 0.0028
423	+ 0.0005	− 0.0034	− 0.0001	− 0.0047	+ 0.0021	− 0.0017
426	− 0.0145	− 0.0026	− 0.0167	− 0.0034	− 0.0145	− 0.0004
427	− 0.0006	− 0.0058	− 0.0006	− 0.0067	+ 0.0016	− 0.0037
429	− 0.0047	+ 0.0032				
430	− 0.0046	− 0.0022	− 0.0046	− 0.0034	− 0.0024	− 0.0004
433	− 0.0130	− 0.0090				
434	− 0.0001	− 0.0024				
437	+ 0.0075	− 0.0011				
		Moyennes:	− 0.0022	− 0.0030		

Ayant formé les moyennes des valeurs dans la troisièmes approximation, je les ai ajoutées avec des signes contraires à ces valeurs mêmes et ramené ainsi les clichés au système des étoiles de repère. J'ai obtenu ainsi les valeurs, qui pour les clichés du milieu de l'endroit traité du ciel seront à considérer comme définitives et qui sont contenues dans les deux dernières colonnes du tableau précédent.

Évaluation des corrections de l'échelle, de l'orientation ainsi que des coordonnées au centre du cliché.

Cliché 417:

Reprenons les équations page 38:

$$+303._8\,p^x + 14._4\,r^x + 0'.0333 + k^x_{410} + k^x_{413} - k^x_{420} - k^x_{424} = 0;$$

$$+15._9\,p^y - 312._7\,r^y + 0'.0227 + k^y_{410} + k^y_{413} - k^y_{420} - k^y_{424} = 0.$$

Des équations obtenues par les additions: $410 + 424$ et $413 + 420$ nous trouvons par soustraction:

$$(410+424)-(413+420): \quad \begin{aligned} -3._2\,p^x - 131._2\,r^x + 0'.0103 + k^x_{410} - k^x_{413} - k^x_{420} + k^x_{424} &= 0; \\ -129._7\,p^y - 5._7\,r^y - 0'.0139 + k^y_{410} - k^y_{413} - k^y_{420} + k^y_{424} &= 0. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que dans ces équations n'entrent que les différences entre les corrections k^x et k^y des divers clichés. Ces combinaisons ainsi que les valeurs des p et r sont par suite dans la plupart des cas indépendantes des opérations ayant pour but de ramener les clichés au système des étoiles de repère.

En substituant maintenant dans les équations ci-dessus les valeurs trouvées des différents k^x et k^y nous aurons:

$$+303._8\,p^x + 14._4\,r^x + 0'.0333 + 0'.0013 - 0'.0031 - (+0'.0004 - 0'.0135) = 0;$$

$$+15._9\,p^y - 312._7\,r^y + 0'.0227 + 0'.0065 + 0'.0051 - (+0'.0061 - 0'.0042) = 0.$$

$$-3._2\,p^x - 131._2\,r^x + 0'.0103 + 0'.0013 + 0'.003_1 - 0'.0004 - 0'.0135 = 0;$$

$$-129._7\,p^y - 5._7\,r^y - 0'.0139 + 0'.0065 - 0'.0051 - 0'.0061 - 0'.0042 = 0.$$

ou

$$+303._8\,p^x + 14._4\,r + 0'.0446 = 0; \qquad +15._9\,p^y - 312._7\,r^y + 0'.0324 = 0.$$

$$-3._2\,p^x - 131._2\,r^x + 0'.0008 = 0; \qquad -129._7\,p^y - 5._7\,r^y - 0'.0228 = 0.$$

qui donnent:

$$\begin{cases} p^x = -0.000147 \\ r^x = +0.000010 \end{cases} \qquad \begin{cases} p^y = -0.000180 \\ r^y = +0.000094 \end{cases}$$

On a encore (voir page 15) pour les corrections au centre du cliché:

$$_0k^x = k^x - p^x X^c - r^x Y^c$$

$$_0k^y = k^y - p^y Y^c + r^y X^c$$

et comme on a pour le cliché 417:

$$X^c = -7'.4 \qquad Y^c = -0'.7$$

on trouve:

$$_0k^x = +0'.0027; \quad _0k^y = -0'.0056.$$

Comparaison des positions d'étoiles provenant de divers clichés.

Afin de donner une idée sur l'exactitude qu'ont atteint les positions des étoiles en employant les méthodes de rattachement et de la recherche des constantes des clichés, je citerai ici les positions des étoiles qui sont communes à deux au moins des clichés 409, 412, 413 et 416. Les centres de ces clichés sont situés:

$$409.\begin{cases} \alpha_0 = 9^h\,40^m \\ \delta_0 = 44^0\,0' \end{cases} \quad 416.\begin{cases} \alpha_0 = 9^h\,50^m \\ \delta_0 = 44^0\,0' \end{cases} \quad 412.\begin{cases} \alpha_0 = 9^h\,45^m \\ \delta_0 = 43^0\,0' \end{cases} \quad 413.\begin{cases} \alpha_0 = 9^h\,45^m \\ \delta_0 = 45^0\,0' \end{cases}$$

Les clichés 409 et 416 sont donc consécutifs en ascension droite. Ils ont une zone commune de 18′ de largeur, où se trouvent 11 étoiles communes aux deux clichés. Dans une zone commune de 8′ de largeur, les clichés 412 et 413, qui sont consécutifs en déclinaison, ont de même 6 étoiles communes.

Les centres des clichés 412 et 413 sont situés aux coins des deux autres clichés, et la quatrième partie de l'un quelconque de ces clichés se retrouve

aussi sur l'un des clichés 409 et 416. Ils ont: 409 et 412, 27 étoiles communes, 409 et 413, 29 étoiles, 416 et 412, 26 étoiles et 416 et 413, 24 étoiles communes.

Voici les positions obtenues:

	α				δ			
	409	416	412	413	409	416	412	413
9^h 39^m	$10^s.05$			$10^s.06$	+44° 33′ 13″.0			13″.2
	11.62		$11^s.62$		43 12 2.9		2″.9	
	12.38			12.39	44 52 8.6			8.6
	15.70			15.73	44 43 58.0			57.7
	26.75		26.69		43 6 3.6		3.3	
	39.37		39.32		43 42 23.3		23.0	
	51.25		51.15		43 56 10.8		10.5	
	52.07			52.04	44 24 1.5			1.1
40	3.73			3.76	44 5 8.5			8.8
	7.15		7.11		43 7 29.6		29.6	
	10.86			10.87	44 50 15.9			15.9
	15.11		15.02		42 57 25.4		25.3	
	25.65			25.62	44 32 8.4			8.4
	30.10		30.04		43 31 43.4		43.3	
	33.97		33.94		43 46 51.9		51.7	
	59.02			59.09	44 52 10.8			10.9
41	1.58			1.60	44 41 58.4			58.1
	23.30		23.30		43 21 35.0		35.4	
	26.43			26.45	44 18 17.3			17.2
	28.97		28.93	28.98	43 59 20.1		19.6	19.5
	29.92		29.92		43 36 48.1		48.5	
	30.97			30.96	44 47 37.6			37.5
	37.97			37.94	44 58 35.3			35.1
	51.90		51.88		43 49 13.4		12.7	
42	3.64			3.63	44 46 43.2			43.6
	9.87		9.92		42 57 51.2		51.6	
	12.44			12.37	44 11 44.3			44.2
	16.61			16.56	44 29 58.7			58.8
	17.59		17.52	17.57	44 0 1.3		1.3	2.0
	26.51			26.52	44 7 48.2			48.6
	48.05			48.00	44 39 9.8			10.2
43	10.11		10.12		43 21 8.0		8.1	
	11.01			11.05	44 45 33.1			33.4
	16.09		16.09	16.08	44 3 33.4		33.4	33.6

	α				δ		
409	**416**	**412**	**413**	**409**	**416**	**412**	**413**
9^h 43^m 25.82		25.85		+ 43° 13′ 53.9		54.5	
26.25		26.23		43 45 50.3		50.6	
50.88		50.87	50.89	44 2 2.4		2.1	2.6
59.28			59.26	44 28 4.8			4.5
44 0.56	0.55		0.60	44 28 4.4	4.4		4.6
2.03			1.99	44 9 25.1			25.4
6.57	6.51	6.59		43 13 28.4	28.5	28.6	
7.94	7.93		7.90	44 5 54.6	54.9		54.5
11.13			11.12	44 54 21.9			21.9
13.44	13.41	13.41		43 50 19.6	19.9	20.1	
27.29	27.34	27.26		43 30 23.6	24.3	24.3	
55.57	55.52	55.55		43 41 38.5	39.2	39.2	
45 1.41	1.40	1.43	1.39	44 1 10.5	11.1	11.0	11.1
4.49	4.57	4.49		43 47 43.7	44.4	43.9	
32.43	32.54	32.51		43 21 12.5	13.1	13.0	
42.06	41.95	42.00		43 29 1.1	1.3	1.4	
42.09	42.15		42.13	44 16 57.6	57.9		57.3
	53.52	53.60		43 21	19.8	19.9	
	55.35	55.42		43 1	14.9	15.3	
46	0.16		0.16	44 35	46.6		46.5
	12.52	12.51		43 56	10.1	9.6	
	14.47		14.47	44 15	36.4		36.0
	18.39		18.39	44 12	8.5		8.5
	24.36	24.40		43 32	17.6	17.0	
	28.05		28.03	44 30	14.5		14.6
47	15.86	15.87		43 48	43.4	42.9	
	16.06	16.13		43 7	5.5	5.8	
	32.12	32.05	32.10	43 57	20.4	19.6	19.6
	36.01	35.99		43 16	27.6	28.0	
	47.53		47.58	44 35	49.7		49.8
	52.63	52.68		43 44	40.8	40.6	
	58.27	58.29		43 7	17.6	17.5	
48	3.37		3.45	44 27	40.2		40.1
	9.69		9.73	44 42	14.6		14.7
	12.96	12.96		43 45	4.3	4.4	
	14.90	14.88		43 30	4.9	4.9	
	16.97	16.92		43 41	28.7	28.4	
	18.86		18.86	44 16	24.2		24.4
	30.30		30.29	44 23	24.8		24.8
	34.34	34.33		43 55	15.3	14.7	
	58.60		58.58	45 2	5.2		5.0

	α				δ		
409	**416**	**412**	**413**	**409**	**416**	**412**	**413**
$9^h\ 49^m$	$2^s.95$		$2^s.98$	$+44^\circ\ 58'$	$57''.4$		$57''.7$
	3.75		3.79	44 28	50.9		50.8
	7.19		7.21	44 50	58.8		59.0
	27.82		27.78	44 7	6.5		6.6
	28.39		28.42	44 24	46.2		45.9
	33.20	$33^s.18$		43 55	10.8	$10''.6$	
	39.39		39.42	44 41	24.0		24.1
	42.21		42.22	44 45	56.0		55.8
	58.52	58.47		43 35	13.0	13.1	
50	9.44	9.48		43 6	27.0	26.3	
	11.49		11.48	44 38	6.1		6.0
	15.45	15.43		43 19	20.4	20.4	
	18.32		18.32	44 27	17.1		17.4

Des différences entre les positions d'une étoile déduites de deux clichés, j'ai calculé l'erreur probable *d'une détermination* et j'ai trouvé:

Des différences entre les clichés:	Erreurs probables: $\cos\delta\,.\,d\alpha$:	$d\delta$:	Nombre des étoiles communes:
409 et 412	$\pm 0^s.016$	$\pm 0''.20$	27
409 et 413	± 0.012	± 0.15	29
416 et 412	± 0.017	± 0.16	26
416 et 413	± 0.011	± 0.13	24
409 et 416	± 0.022	± 0.26	11
412 et 413	± 0.017	± 0.19	6

Comme on a du s'y attendre, les erreurs probables déduites de l'accord entre les clichés où les étoiles communes sont situées aux bords, sont plus grandes que celles provenant de l'accord entre les clichés où la partie commune s'étend jusqu' aux centres. On trouve ainsi pour moyenne des quatre premières comparaisons:

$$\cos\delta\,.\,d\alpha = \pm 0^s.0135 \qquad d\delta = \pm 0''.155$$

et des deux dernières, les valeurs un peu moins bonnes:

$$\cos\delta\,.\,d\alpha = \pm 0^s.021 \qquad d\delta = \pm 0''.23$$

Evidemment on aurait dû donner aux diverses déterminations de différents poids, décroissants quand la distance au centre croît. Mais comme la loi de ces poids ne peut être fixée qu'après des recherches spéciales qui manquent encore, j'ai été forcé de m'abstenir. On peut cependant dire, que la connaissance de cette loi doit encore diminuer les erreurs probables des positions d'étoiles qui formeront le catalogue.

Comme, du reste, les étoiles qui se trouvent sur la mince zone commune à deux clichés qui sont consécutifs en α ou en δ se retrouvent aussi toujours dans les parties communes d'autres clichés, les erreurs probables qui appartiennent à cette zone peuvent être laissées hors de calcul pour le moment.

On doit donc pouvoir se former une idée sur l'exactitude des positions du catalogue en supposant que chacune de ces positions soit fondée sur deux déterminations, dont les erreurs probables appartiennent à la première classe. Il ne semble donc pas exagéré d'attendre que les erreurs probables des positions du catalogue d'Helsingfors ne surpassent pas:

$$\cos\delta \,.\, d\alpha = \pm\, 0^{s}.01 \qquad d\delta = \pm\, 0''.1$$

qui devrait être considéré comme un résultat bien satisfaisant.

Je me permets encore d'exprimer mes meilleurs remercîments à mes collaborateurs MM. *G. Dreijer* et *K. Sundman*, qui ont pris part non seulement aux calculs et à la construction des tableaux, mais aussi aux développements des formules, ainsi qu' à MM.elles *M. Biese*, *N. Helin* et *O. Sederholm*, qui ont exécuté les mesures et assisté aux calculs préparatoires.



ACTA SOCIETATIS SCIENTIARUM FENNICÆ.
TOM. XXI. № 9.

ÜBER DIE BODENTEMPERATUR IN MUSTIALA

VON

THEODOR HOMÉN.

Inhalt.

Bodentemperaturbeobachtungen in Mustiala in den Jahren 1885—1894.

I. Angestellte Beobachtungen.

Die ersten bekannten, regelmässig fortgehenden Bodentemperaturbeobachtungen in Finnland wurden von der Polarexpedition in Sodankylä in den Jahren 1882—84 gemacht. [1]) Hierbei wurde, ausser der Temperatur an der Bodenoberfläche, mit Lamonts Ausziehthermometern von Wilds Construction die Bodentemperatur in 0.4, 0.8 und 1.6 Meter Tiefe beobachtet. Der Boden bestand aus Sand. Der Schnee wurde im Winter vom Beobachtungsplatz fortgeschafft.

Seit dem Jahre 1885 sind im südlichen Finnland bei dem landwirtschaftlichen Institute Mustiala im Kirchspiel Tammela tägliche Bodentemperaturbeobachtungen an verschiedenen Plätzen, im Walde und auf offenem Felde, gemacht worden.

Die Untersuchungen wurden von Herrn Forstmeister A. Borenius angeordnet und bis zum Jahre 1889 unter seiner Leitung durchgeführt. Von dieser Zeit an hat Herr Fortsmeister Th. Cannelin die Leitung der Arbeiten gehabt.

Die Beobachtungsresultate der vier ersten Jahre 1885—88 wurden der hiesigen Meteorologischen Centralanstalt zugesandt mit Erlaubniss dieselben zu publiciren. Der jetzige Vorstand der Centralanstalt, Herr Director Biese überliess mir die erwähnten Beobachtungen zum Benutzen und, wenn ich es wollte, zum Publiciren.

[1]) Exploration internationale des régions polaires 1882—83 et 1883—84. Expédition polaire finlandaise. Tome I. Helsingfors 1886.

Da diese Beobachtungen eine bedeutende Lücke in der Kenntniss der Natur unseres Landes füllen, habe ich kein Bedenken gehegt ihrer Bearbeitung die erforderliche Zeit zu widmen. Durch Vergleich mit den gleichzeitigen Bodentemperaturbeobachtungen in St. Petersburg und in Pawlowsk gewinnen dieselben noch an wissenschaftlichem Interesse.

Indessen sind die erwähnten Beobachtungen bis zum heutigen Tage fortgesetzt worden und ich habe durch Herrn Professor Rindell in Mustiala die Original-Angaben für die Jahre 1889—91 und 1893—94 bekommen. Für 1892 sind die Beobachtungen in extenso publicirt in „Landtbruksstyrelsens Meddelanden N:o III 1894". Auch die Jahrgänge 1893—94 werden allmählich in derselben Publicationsreihe veröffentlicht, so dass im Folgenden nur die ersten sieben Jahrgänge 1885—91 vollständig publicirt werden. Doch werden in den Zusammenstellungen auch die drei letzten Jahre berücksichtigt.

Das landwirtschaftliche Institut Mustiala ist gelegen 60° 49′ nördl. Br. und 23° 47′ E von Greenwich.

Die Beobachtungen wurden angestellt sowohl in der Nähe des Instituts, als in einer 11 km nördlich davon gelegenen Waldgegend Heinäis.

Die Beobachtungen wurden in Tiefen von 0.5, 1.0 und 2.0 Meter, für kürzere Zeit auch in Tiefen von nur 0.15 und 0.30 Meter, gemacht.

Es wurde also beobachtet

in Mustiala:

1) die sechs Jahre 1885—90 auf einem mit Timotheegras bewachsenen offenen Felde, wo der Boden aus feinem festgepackten Haidesand besteht,

2) im Jahre 1885 vom Januar bis zum Ende September auf einem mit 50-jährigem Kiefernwalde bewachsenen, aus Gerölle-Grus bestehenden Hügel,

in Heinäis:

3) vom September 1885 bis Oktober 1886 auf einem mit Gras bewachsenen aus Geschiebesand bestehenden offenen Felde,

4) alle zehn Jahre hindurch in einem bei Beginn der Beobachtungen 125-jährigen Fichtenhochwalde auf niedrig gelegenem, sandigem Geschiebe,

5) acht Jahre 1887—94 auf einem offenen Platze von etwa 3 ha im letztgenannten Walde,

6) dieselben acht Jahre in einem zum erwähnten Fichtenwalde grenzenden Birkenwalde. Der Boden war hier trockner.

Die Thermometer in 2 m Tiefe waren von Symons Construction: Ein unten geschlossenes eisernes Rohr, welches bis zur gewünschten Tiefe in den Boden eingesteckt wird, und ein darin liegendes Thermometer welches beim Beobachten heraufgezogen wird. Die Thermometerkugel ist mit Everetts für Wärme schlechtleitender Substans umgeben, das Thermometer also so träge gemacht, dass man dasselbe hinaufziehen und ablesen kann, ehe es sich zu ändern beginnt.

Alle übrigen Thermometer waren von Hambergs Construction [1]): Ein äusseres Rohr aus Fichtenholz, darinn ein dünnes Messingrohr, dessen unterer Teil, um die Wärmeleitung zu vermindern, aus Glas und Kautschuk besteht, und im Rohre ein Thermometer ungefähr wie im vorigen Falle.

Die Thermometer wurden täglich um 9 Uhr Vormittags beobachtet. Alle Thermometer waren in $\frac{1}{5}^0$ C. geteilt und wurden gewöhnlich in $\frac{1}{5}^0$ abgelesen. Doch wurde bisweilen die Hälfte des Fünftels angegeben.

Für die vier ersten Jahre habe ich die Beobachtungen zu Zehntelgraden reducirt und mit den Instrumenten-Correctionen fertig angebracht bekommen. Für die übrigen Jahre habe ich diese Reduction gemacht und die Correctionen der Thermometer eingeführt. Weiter habe ich für alle Jahre die Ausrechnung der Monats- und Jahresmittel besorgt. Das Jahresmittel ist den 365 resp. 366 Tagesmitteln, nicht den Monatsmitteln, entnommen.

Dann und wann ist die Beobachtung versäumt worden. Um in solchen Fällen das Monatsmittel so richtig wie möglich zu erhalten, habe ich die Lücken mit den Mittelwerthen der vorhergehenden und nachfolgenden Beobachtung ausgefüllt. Lücken von einigen Tagen werden in derselben Weise durch lineare Interpolation ausgefüllt. Der hierbei begangene Fehler wird ausserordentlich klein, weil die Bodentemperatur sich nur sehr langsam und gleichmässig ändert. Einige offenbare Beobachtungsfehler habe ich in derselben Weise corrigiert.

Längere Lücken, welche von Unglücksfällen mit den Instrumenten oder von anderen Umständen verursacht wurden, sind natürlich viel schwieriger zu behandeln. Solche sind die Unterbrechung 7. September — 12. October 1886 der Beobachtungen in 2 m Tiefe im Fichtenhochwalde zu Heinäis, die Lücken aller Beobachtungen in Heinäis während des Juli 1889, die Lücken 5. — 21. Juni und 12. September — 5. October 1890 der Beobachtungen in Mustiala, die vom 8 October bis zum 31. December 1890 der Beobachtungen im Birkenwalde in 1 Meter Tiefe, sowie die im Januar 1891 aller Beobachtungen in Heinäis. Weiter sind die Beobachtungen im Birkenwalde zu Heinäis in 2

[1]) Hamberg, Bihang till K. Vet. Akademiens Handlingar Bd 6, nr 17, 1881.

Meter Tiefe vom 1 Juli bis zum 7. August 1890, sowie die im Fichtenwalde in derselben Tiefe vom 19. August bis zum 30. September 1890 nur in ganzen Graden angegeben.

Diese Lücken habe ich durch grafische Interpolation ausgefüllt. Ich habe die Beobachtungsresultate grafisch dargestellt und mit Leitung der Curven während der übrigen Jahre sowie der Curven für die übrigen Plätze und der Temperaturverhältnisse in der betreffenden Zeit die fehlenden Strecken der betreffenden Curven aufgezogen. Auf Grund dieser Curven habe ich dann die fehlenden Beobachtungswerthe bestimmt und in den Tabellen eingeführt. Obgleich die Lücken ziemlich gross sind, so giebt doch diese grafische Methode so gute Anhaltspunkte für die Interpolation, dass die Fehler, welche begangen werden, mit aller Wahrscheinlichkeit auch hier ziemlich klein werden. Die Abweichung der einzelnen so erhaltenen Werthe von den richtigen kann kaum mehr als 0.°2 sein und die des Monatsmittels durchaus nicht mehr als 0.°1.

Sämmtliche interpolierte Werthe sind mit Cursiv gedruckt.

In der ersten Columne der Tabellen habe ich den Werth der Lufttemperatur in Mustiala angegeben. Die Lufttemperatur wird dreimal täglich, um 7 Uhr Vormittags 2 und 9 Uhr Nachmittags beobachtet. Das Tagesmittel wird nach der Formel $t = \frac{7 + 2 + 2 \times 9}{4}$ berechnet und habe ich durch Professor A. Rindell in Mustiala diese Mittelwerthe fertig ausgerechnet erhalten. Für die wenigen (8) Tage, für welche Lufttemperaturbeobachtungen fehlen, habe ich dieselben mit den an der nächsten meteorologischen Station (Tammerfors) beobachteten Werthen ersetzt.

In der zweiten Columne habe ich die Niederschlagsmenge per Tag in Mustiala angegeben, sowie auch die Beschaffenheit derselben, d. h. ob sie in fester oder flüssiger Form ershienen ist. Dies ist geschehen besonders um eine Vorstellung über die Schneemenge zu erhalten. Auch die Niederschläge in flüssiger Form sind übrigens, wie aus dem Folgenden ersichtlich, von grossem Einfluss auf die Bodentemperatur. Diese Angaben habe ich den in der Meteorologischen Centralanstalt aufbewahrten Originalbeobachtungen von Mustiala entnommen. Die Niederschlagsmessungen geschahen um 7 Uhr Morgens und werden auf den vorigen Tag eingetragen. Schnee habe ich in gebräuchlicher Weise mit ✳, Regen mit ●, Hagel mit ▲, Graupeln mit △ Thau mit ⌓ und Reif mit ⊔ bezeichnet. Für solche Tage, wo sowohl Schnee als Regen gefallen ist, habe ich in den Zusammenstellungen die Hälfte des Niederschlages als Schnee, die andere Hälfte als Wasser angenommen.

Seit 1891 werden sowohl in Mustiala als auch in Heinäis tägliche Messungen der Schneehöhe gemacht. Diese Beobachtungen stehen in Verbindung mit den von der Meteorologischen Centralanstalt angeordneten Schneemessungen in Finnland. Beim Besprechen des Einflusses der Schneedecke auf die Bodentemperatur werde ich die Resultate dieser Messungen anführen.

Nach Darlegung der Beobachtungsresultate werde ich besonders prüfen wie genau die angewandten Thermometer die Bodentemperatur, und besonders die tägliche Mitteltemperatur, in den betreffenden Tiefen angeben. Es ist nähmlich möglich, dass das Thermometerrohr die Wärme oder Kälte von der Oberfläche in höherem Grade als der Boden selbst zu den unteren Erdschichten, in welche das Rohr hineinragt, leitet, wodurch natürlich die Thermometerangaben beeinflusst werden. Ferner ist die tägliche Variation in den obersten Erdschichten, besonders im Sommer, von grosser Bedeutung, falls man aus den Beobachtungen um 9 Uhr Vormittags die tägliche Mitteltemperatur herleiten will. Wir werden doch bei Discussion dieser Fragen sehen, dass die Thermometer in 2.0, 1.0 und auch in 0.5 Meter Tiefe um 9 Uhr Vormittags wahrscheinlich sehr genau die tägliche Mitteltemperatur in diesen Tiefen angeben. In 0.30 und 0.15 Meter Tiefe werden dagegen die Thermometer um 9 Uhr eine zu niedrige Temperatur angeben. Die Abweichung vom Tagesmittel ist dazu sehr gross, im Sommer etwa 1° bis 2°, so dass diese Beobachtungen in Bezug auf die Erforschung der täglichen Mitteltemperatur zu keinen exakten Werthen führen. Sie wurden auch nur zwei und ein halbes Jahr fortgesetzt. Da sie in den Tabellen ohne zu stören Platz finden, habe ich dieselben doch angeführt, weil sie jedenfalls zur Beleuchtung der behandelten Fragen, besonders in Betreff der Bodentemperatur im Winter, dienen können.

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1885. **Januar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala: Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Mustiala: 50-jähriger Kiefernwald auf trocknem Geröllegrus.			Heinäis: 125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 3.5	Beobachtungen fehlen.	1.0	2.0	4.0	0.0	1.5	3.6	0.8	2.0	3.2
2	− 1.8		*1.0*	*2.0*	*4.0*	*0.1*	*1.5*	*3.6*	0.8	2.0	3.2
3	− 3.0		1.0	2.0	4.0	0.2	1.5	3.6	0.8	2.0	3.2
4	− 3.2		1.0	2.0	4.0	0.2	1.5	3.4	0.8	2.0	3.2
5	− 4.2		1.0	2.0	4.0	0.2	1.5	3.2	0.8	1.8	3.2
6	− 1.7		1.0	2.0	4.0	0.2	1.5	3.2	0.8	1.8	3.2
7	− 4.7		1.0	1.8	3.8	0.2	1.5	3.2	0.6	1.8	3.2
8	− 19.3		0.8	1.8	3.8	0.2	1.5	3.2	0.6	1.8	3.2
9	− 5.5		0.8	1.8	3.6	0.2	1.5	3.0	0.6	1.8	3.0
10	− 1.8		0.8	1.8	3.6	0.2	1.5	3.0	0.6	1.8	3.0
11	− 2.6		1.0	1.8	3.6	0.0	1.3	3.0	0.8	1.8	3.0
12	− 3.6		*0.9*	*1.8*	*3.6*	*0.2*	*1.3*	*3.0*	0.8	1.8	3.0
13	− 8.8		0.8	1.8	3.6	0.2	1.3	3.0	0.8	1.8	3.0
14	− 8.1		0.8	1.8	3.6	0.2	1.3	3.0	0.8	1.8	3.0
15	− 6.2		0.8	1.8	3.6	0.2	1.3	3.0	0.7	1.8	3.0
16	− 3.2		0.8	1.8	3.6	0.2	1.3	3.0	0.7	1.8	3.0
17	− *14.7*		0.8	1.8	3.6	0.2	1.3	3.0	0.6	1.7	3.0
18	− *5.8*		0.8	1.6	3.6	0.2	1.3	3.0	0.6	1.7	3.0
19	− 1.8		0.8	1.6	3.6	0.0	1.5	3.0	0.6	1.7	3.0
20	− 4.8		0.8	1.6	3.6	0.0	1.3	2.8	0.6	1.7	2.8
21	− 2.5		0.8	1.6	3.6	0.0	1.3	2.8	0.6	1.7	2.8
22	− 3.5		0.8	1.4	3.6	0.0	1.1	2.8	0.6	1.6	2.8
23	− 8.0		0.8	1.4	3.6	0.2	1.1	2.8	0.6	1.6	2.8
24	− 7.4		0.8	1.4	3.4	0.0	1.1	2.8	0.6	1.6	2.6
25	− 5.6		0.8	1.4	3.4	0.0	1.1	2.8	0.6	1.6	2.6
26	− 3.6		0.8	1.6	3.4	0.2	1.1	2.8	0.6	1.6	2.6
27	− 4.0		0.8	1.6	3.4	0.4	1.1	2.8	0.6	1.6	2.6
28	− 1.8		0.8	1.6	3.4	0.2	1.1	2.8	0.6	1.6	2.6
29	− 10.4		0.8	1.6	3.4	0.2	1.1	2.6	0.6	1.6	2.6
30	− 12.5		0.8	1.6	3.2	0.2	1.1	2.6	0.6	1.6	2.6
31	− 3.2		0.8	1.6	3.2	0.2	1.1	2.6	0.6	1.6	2.6
Mittel	**− 5.51**		**0.85**	**1.72**	**3.63**	**0.15**	**1.31**	**3.00**	**0.67**	**1.75**	**2.92**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1885. **Februar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala						Heinäis		
			Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			50-jähriger Kiefernwald auf trocknem Geröllegrus.			125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	1.2	Beobachtungen fehlen.	0.8	1.6	3.0	– 0.4	0.9	2.6	0.6	1.6	2.6
2	1.3		0.8	1.4	3.0	– 0.2	0.9	2.6	0.6	1.6	2.6
3	1.4		0.8	1.4	3.0	0.4	0.9	2.6	0.5	1.4	2.6
4	– 1.0		0.8	1.4	3.0	0.6	0.9	2.6	0.5	1.4	2.6
5	– 0.8		0.8	1.4	3.0	0.6	0.9	2.6	0.5	1.4	2.6
6	0.3		0.8	1.4	3.0	0.6	0.9	2.6	0.5	1.4	2.6
7	0.4		0.8	1.4	3.0	0.6	1.1	2.6	0.5	1.4	2.6
8	0.6		0.8	1.4	3.0	0.6	1.1	2.4	0.5	1.4	2.5
9	– 2.1		0.8	1.4	3.0	0.6	1.1	2.6	0.5	1.4	2.5
10	– 6.0		0.8	1.4	3.0	0.6	1.1	2.6	0.5	1.4	2.4
11	– 5.7		0.8	1.4	3.0	0.6	1.1	2.4	0.5	1.4	2.4
12	– 6.7		0.8	1.4	3.0	0.6	1.1	2.4	0.5	1.4	2.4
13	– 2.4		0.8	1.4	3.0	0.6	1.1	2.4	0.5	1.4	2.4
14	1.5		0.8	1.4	3.0	0.6	1.1	2.4	0.5	1.4	2.4
15	– 1.9		0.8	1.4	3.0	0.6	1.1	2.4	0.5	1.4	2.4
16	– 6.3		0.8	1.4	2.8	0.6	1.1	2.4	0.5	1.4	2.4
17	– 7.4		0.8	1.4	2.8	0.6	1.1	2.4	0.5	1.3	2.4
18	– 16.3		0.8	1.4	2.8	0.6	1.1	2.2	0.5	1.3	2.4
19	– 18.6		0.8	1.4	2.8	0.6	1.1	2.2	0.5	1.3	2.4
20	– **19.5**		0.8	1.4	2.8	0.6	1.1	2.2	0.5	1.3	2.4
21	– 18.1		0.8	1.4	2.8	0.6	1.1	2.2	0.5	1.3	2.4
22	– 14.9		0.8	1.4	2.8	0.6	1.1	2.2	0.5	1.3	2.2
23	– 17.8		0.8	1.4	2.8	0.4	1.1	2.2	0.4	1.3	2.2
24	– 1.2		0.6	1.4	2.6	0.2	1.1	2.2	0.4	1.3	2.2
25	1.2		0.6	1.4	2.6	0.2	1.1	2.2	0.4	1.3	2.2
26	1.1		0.6	1.4	2.6	0.4	1.1	2.2	0.4	1.3	2.2
27	0.7		0.6	1.4	2.8	0.6	1.1	2.2	0.4	1.3	2.2
28	– 0.4		0.6	1.4	2.8	0.6	1.1	2.2	0.4	1.2	2.2
Mittel	– **4.92**		**0.76**	**1.41**	**2.89**	**0.49**	**1.06**	**2.39**	**0.49**	**1.37**	**2.41**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1885. **März.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Mustiala. 50-jähriger Kiefernwald auf trocknem Geröllegrus.			Heinäis. 125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	— 0.7	Beobachtungen fehlen.	0.6	1.2	2.6	0.6	1.1	2.0	0.4	1.2	2.2
2	— 1.1		0.8	1.2	2.6	0.6	1.1	2.2	0.4	1.2	2.2
3	— 8.1		0.8	1.2	2.6	0.6	1.1	2.0	0.4	1.2	2.2
4	— 9.7		0.8	1.2	2.6	0.6	1.1	2.0	0.4	1.2	2.2
5	— 4.6		0.6	1.2	2.6	0.6	1.1	2.0	0.4	1.2	2.2
6	— 3.3		0.6	1.2	2.6	0.4	1.1	2.0	0.4	1.2	2.2
7	— 6.4		0.6	1.2	2.6	0.4	1.1	2.0	0.4	1.2	2.0
8	— 3.5		0.6	1.2	2.6	0.4	1.1	2.0	0.4	1.2	2.0
9	— 5.2		0.6	1.2	2.6	0.2	1.1	2.0	0.4	1.2	2.0
10	— 7.6		0.6	1.2	2.4	0.2	1.1	2.0	0.4	1.2	2.0
11	— 7.3		0.6	1.2	2.6	0.2	1.1	2.0	0.4	1.2	2.0
12	— 11.6		0.6	1.2	2.6	0.0	0.9	2.0	0.4	1.2	2.0
13	— 10.4		0.6	1.2	2.6	0.0	0.9	2.0	0.4	1.1	2.0
14	— 3.4		0.6	1.2	2.6	0.0	0.9	2.0	0.3	1.1	2.0
15	— 2.7		0.6	1.2	2.6	— 0.2	0.9	2.0	0.3	1.1	2.0
16	— 4.0		0.6	1,2	2.6	— 0.2	0.9	2.0	0.3	1.1	2.0
17	— 0.2		0.6	1.2	2.6	— 0.2	0.8	2.0	0.3	1.1	2.0
18	0.6		0.6	1.2	2.6	— 0.2	0.7	2.0	0.3	1.1	2.0
19	— 4.4		0.6	1.2	2.6	0.0	0.7	2.0	0.3	1.1	2.0
20	— 3.4		0.6	1.2	2.6	0.0	0.7	2.0	0.3	1.1	2.0
21	— 3.6		0.6	1.2	2.6	0.0	0.7	2.0	0.3	1.1	2.0
22	— 4.1		0.6	1.2	2.6	0.0	0.7	2.0	0.3	1.1	2.0
23	— 7.7		0.6	1.2	2.6	— 0.2	0.7	2.0	0.3	1.1	2.0
24	— 8.0		0.6	1.2	2.4	— 0.2	0.7	2.0	0.3	1.1	2.0
25	— 5.6		0.6	1.2	2.4	— 0.2	0.7	2.0	0.3	1.1	2.0
26	— 1.9		0.6	1.2	2.4	— 0.2	0.7	2.0	0.3	1.1	2.0
27	0.9		0.6	1.2	2.4	0.0	0.7	2.0	0.2	1.1	2.0
28	0.7		0.6	1.2	2.4	— 0.2	0.7	1.8	0.2	1.1	2.0
29	1.8		0.6	1.2	2.4	— 0.2	0.7	1.8	0.2	1.1	2.0
30	1.5		0.6	1.2	2.4	0.0	0.7	1.8	0.2	1.1	2.0
31	— 1.3		0.6	1.2	2.4	0.0	0.7	1.8	0.2	1.1	2.0
Mittel	— 4.01		**0.62**	**1.20**	**2.54**	**0.09**	**0.88**	**1.98**	**0.33**	**1.14**	**2.04**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1885. **April.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala.						Heinäis.		
			Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			50-jähriger Kiefernwald auf trocknem Geröllegrus.			125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	4.5	—	0.6	1.2	2.4	0.0	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
2	1.3	—	0.6	1.2	2.4	0.2	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
3	1.5	✱ ● 1.6	0.6	1.2	2.4	0.4	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
4	0.2	—	0.6	1.2	2.4	0.4	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
5	2.8	—	0.6	1.2	2.4	0.6	0.7	2.0	0.3	1.0	2.0
6	— 0.9	—	0.6	1.0	2.4	0.6	0.7	2.0	0.3	1.0	2.0
7	2.0	—	0.6	1.0	2.4	0.6	0.7	2.0	0.3	1.0	2.0
8	2.8	—	0.6	1.0	2.2	0.6	0.7	2.0	0.3	1.0	2.0
9	2.9	—	0.6	1.0	2.2	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
10	2.7	—	0.6	1.0	2.2	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
11	0.6	—	0.6	1.0	2.2	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
12	— 0.5	—	0.6	1.0	2.2	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
13	— 3.7	—	0.6	1.0	2.1	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
14	— 5.8	✱ 1.1	0.6	1.0	2.1	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
15	— 1.9	✱ 0.1	0.6	1.0	2.1	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
16	— 2.8	—	0.6	1.0	2.1	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
17	0.0	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
18	0.2	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
19	— 1.0	✱ 0.8	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
20	— 0.5	✱ 9.0	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.8	0.3	1.0	2.0
21	0.8	● 0.6	0.6	1.0	2.0	0.6	0.8	1.6	0.3	1.0	2.0
22	2.2	● 1.7	0.6	1.0	2.0	0.6	0.8	1.6	0.3	1.0	2.0
23	3.8	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.8	1.6	0.3	1.0	2.0
24	4.6	● 4.8	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	1.0	2.0
25	4.6	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	1.0	2.0
26	5.4	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.9	1.6	0.3	1.0	2.0
27	8.1	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	1.0	2.0
28	6.8	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	1.0	2.0
29	2.0	✱ 0.6	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
30	3.0	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
		20.3 [1]									
Mittel	**1.52**	✱ **12.4**	**0.60**	**1.03**	**2.14**	**0.55**	**0.72**	**1.76**	**0.30**	**0.99**	**2.00**

[1]) Für die Niederschlagsmenge wird die Monatssumme, nicht das tägliche Mittel angegeben, und zwar zuerst die ganze Summe, dann besonders die Schneemenge.

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1885. **Maj.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Mustiala. 50-jähriger Kiefernwald auf trocknem Geröllegrus.			Heinäis. 125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	3.1	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
2	0.6	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
3	1.7	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
4	7.2	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
5	2.9	✳ 0.8	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
6	3.8	—	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
7	3.7	● 0.8	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
8	9.1	● 10.5	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.3	0.9	2.0
9	5.0	● ✳ 0.1	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.4	0.9	2.0
10	5.1	● 0.4	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.4	0.9	2.0
11	5.6	● 2.7	0.6	1.0	2.0	0.6	0.7	1.6	0.4	0.9	2.0
12	4.9	● 0.9	*0.8*	*1.0*	*2.0*	*0.6*	*0.8*	*1.6*	0.4	0.9	2.0
13	5.9	● 0.8	*0.9*	*1.2*	*2.0*	*0.7*	*1.0*	*1.6*	0.4	0.9	2.0
14	3.1	—	1.0	1.5	2.0	0.8	1.1	1.6	0.4	0.9	2.0
15	5.6	● 6.6	1.5	1.6	2.0	0.6	1.1	1.6	0.4	0.9	2.0
16	7.4	● 4.6	2.4	1.6	2.0	0.6	1.1	1.6	0.4	0.9	2.0
17	8.4	● 5.8	3.2	1.8	2.0	0.6	1.1	1.6	0.4	0.9	2.0
18	5.1	● 5.6	4.0	2.2	2.1	0.6	1.1	1.6	0.4	0.9	2.0
19	4.6	● 0.5	*4.3*	*2.5*	*2.2*	*0.6*	*1.1*	*1.6*	0.4	0.9	2.0
20	9.8	● 4.8	4.6	2.8	2.2	0.6	1.1	1.6	0.4	1.0	2.0
21	12.8	● 5.6	4.8	3.2	2.2	0.6	1.1	1.6	0.4	1.0	2.0
22	8.8	● 1.6	6.0	4.0	2.2	0.6	1.1	1.6	0.4	1.0	2.0
23	14.3	—	6.6	4.4	2.4	0.6	1.3	1.8	0.4	1.0	2.0
24	15.9	—	*7.2*	*4.6*	*2.6*	*1.7*	*1.6*	*1.8*	0.4	1.0	2.0
25	12.7	—	*7.9*	*4.8*	*2.8*	*2.9*	*1.8*	*1.8*	0.4	1.0	2.0
26	9.2	—	8.4	5.8	3.0	4.0	2.1	1.8	0.4	1.0	2.0
27	10.1	● 1.7	8.7	5.4	3.0	4.4	2.5	1.8	0.4	1.0	2.0
28	11.0	● 3.6	9.0	5.8	3.1	4.8	2.7	2.0	0.4	1.0	2.0
29	13.1	● 0.4	9.0	6.0	3.2	5.0	2.9	2.0	0.4	1.0	2.0
30	15.0	● 0.2	9.3	6.2	3.4	5.4	3.1	2.0	0.4	1.0	2.0
31	10.4	—	9.6	6.4	3.6	6.0	3.3	2.0	0.4	1.0	2.0
		58.0									
Mittel	**7.61**	**✳ 0.8**	**3.80**	**2.70**	**2.32**	**1.56**	**1.31**	**1.68**	**0.37**	**0.94**	**2.0**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1885. **Juni.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Mustiala. 50-jähriger Kiefernwald auf trocknem Geröllegrus.			Heinäis. 125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.										
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	10.5	● 0.4	10.3	10.1	9.8	6.6	3.8	6.0	3.5	2.2	0.4	1.2	2.0
2	7.2	—	9.8	10.3	9.8	6.8	4.0	6.0	3.7	2.2	0.4	1.2	2.0
3	10.0	—	7.9	9.5	9.6	6.8	4.0	5.6	3.9	2.2	0.4	1.2	2.0
4	10.1	● 1 3	8.7	9.7	9.4	7.0	4.1	5.8	4.1	2.6	0.5	1.2	2.0
5	15.7	● 0.1	11.5	9.7	9.4	7.0	4.4	6.0	4.1	2.6	0.5	1.2	2.0
6	17.7	—	12.3	11.4	10.2	7.2	4.6	6.8	4.1	2.8	0.6	1.2	2.0
7	11.4	—	12.3	12.1	11.0	7.4	4.6	7.4	4.3	2.8	0.6	1.2	2.0
8	9.6	● 0.7	10.7	11.2	11.0	7.6	4.8	7.4	4.7	3.0	0.7	1.4	2.0
9	12.3	● 7.3	9.3	10.3	10.5	8.0	4.8	7.0	4.5	3.0	*1.3*	1.4	2.0
10	7.9	● 5.3	*8.5*	*9.8*	*10.3*	*8.0*	*4.9*	*6.9*	*4.7*	*3.0*	2.1	1.4	2.0
11	3.3	● 2.1	7.7	9.3	10.2	8.0	5.0	6.8	4.9	3.0	*3.0*	2.0	2.0
12	5.9	—	6.1	7.3	9.0	8.0	5.0	6.2	4.9	3.0	*3.3*	2.7	2.0
13	9.4	● 1.0	7.3	7.7	8.6	7.8	5.2	5.8	4.9	3.2	3.6	2.9	2.2
14	11.7	—	8.9	8.5	8.8	7.6	5.2	6.0	4.9	3.4	3.8	3.0	2.5
15	14.1	—	9.9	9.3	9.2	7.6	5.4	6.4	4.9	3.4	4.1	3.1	2.5
16	7.7	✳● 9.4	10.9	10.5	9.8	7.6	5.6	6.8	4.9	3.6	4.4	3.4	2.7
17	12.5	—	9.1	9.5	9.8	7.8	5.6	6.8	4.9	3.6	4.6	3.3	2.7
18	13.0	—	11.3	10.5	10.4	7.8	5.6	6.8	5.1	3.8	4.9	3.7	2.8
19	14.7	—	11.9	11.7	11.0	7.8	5.8	7.6	5.3	3.8	4.9	3.7	2.8
20	11.9	● 3.0	11.7	11.5	11.0	8.0	5.8	7.6	5.3	3.8	5.1	3.8	3.0
21	14.0	● 1,0	11.7	10.9	10.8	8.4	5.8	7.8	5.3	3.8	5.4	3.8	3.0
22	13.1	—	11.9	11.3	11.0	8.4	5.8	8.2	5.5	4.0	5.8	4.4	3.0
23	14.4	—	12.5	11.5	11.2	8.6	6.0	8.2	5.7	4.0	6.2	4.4	3.0
24	18.0	—	13.1	12.1	11.6	8.8	6.0	8.5	5.9	4.2	6.4	4.6	3.2
25	18.4	—	14.3	12.7	11.8	8.8	6.0	9.0	5.9	4.4	6.6	4.6	3.2
26	21.4	—	15.5	13.9	12.4	9.0	6.0	9.4	6.1	*4.6*	7.1	4.6	3.3
27	14.2	—	16.7	14.9	13.3	9.2	6.2	10.2	6.5	*4.8*	7.6	4.8	3.3
28	17.0	—	14.7	13.7	13.3	*9.4*	6.2	10.2	6.7	5.0	7.9	5.2	3 4
29	18.4	—	15.3	14.3	13.4	9.8	6.4	10.2	6.9	5.0	7.9	5.3	3.4
30	20.6	▲● 24.7	15.7	14.7	13.6	10.0	6.6	10.4	7.1	5.0	8.0	5.4	3.5
Mittel	**12.87**	**56.3**	**11.25**	**11.00**	**10.71**	**8.03**	**5.31**	**7.46**	**5.11**	**3.53**	**3.94**	**3.04**	**2.58**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1885. **Juli.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala: Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Mustiala: 50-jähriger Kiefernwald auf trocknem Geröllegrus.					Heinäis: 125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	17.5	● 0.2	17.5	15.5	14.0	10.6	6.6	11.3	10.7	11.4	7.3	5.0	10.1	8.9	8.5	5.7	3.5
2	15.2	—	15.5	15.1	14.4	10.6	6.8	11.3	10.7	11.4	7.5	4.8	10.8	8.9	9.0	6.0	3.6
3	15.3	—	14.7	14.5	14.2	10.8	7.0	11.0	10.5	11.1	7.7	4.8	9.6	7.7	9.1	6.1	3.8
4	20.3	—	15.3	14.7	14.2	11.0	7.0	11.6	10.6	11.2	7.9	5.0	9.6	8.8	9.1	6.2	3.8
5	18.7	—	16.3	15.4	14.4	11.0	7.0	12.2	11.1	11.6	8.0	5.0	10.6	9.3	9.2	6.4	3.9
6	20.0	—	16.1	15.6	14.8	11.1	7.1	12.2	11.3	11.8	8.1	5.0	10.5	9.7	9.5	6.6	3.9
7	20.0	—	16.7	16.0	15.0	11.1	7.4	12.8	11.5	12.0	8.3	5.0	10.8	9.9	9.6	6.8	4.0
8	21.0	—	17.1	16.1	15.2	11.4	7.6	13.1	11.9	12.2	8.5	5.2	11.9	9.9	9.8	6.6	4.0
9	21.6	—	17.7	16.5	15.4	11.6	7.6	13.4	12.3	12.8	8.8	5.4	11.3	9.7	10.0	6.8	4.1
10	19.8	—	16.7	16.5	15.6	11.8	7.8	13.2	12.3	12.8	8.9	5.6	11.3	10.2	10.0	7.0	4.2
11	22.2	—	16.5	16.1	15.6	12.0	7.8	13.2	12.3	12.8	9.1	5.6	11.0	10.1	10.1	*7.4*	4.4
12	22.3	—	17.0	16.7	15.6	12.1	8.0	13.8	12.5	12.8	9.3	6.0	11.6	10.4	10.3	*7.5*	4.4
13	23.2	● 6.8	17.5	17.3	15.8	12.4	8.3	14.4	12.9	13.0	9.3	6.0	12.3	10.2	10.6	7.7	4.4
14	24.2	—	17.7	17.5	16.2	12.6	8.6	14.8	13.1	13.4	9.7	6.0	12.9	11.4	10.9	8.2	4.5
15	22.2	● 0.2	18.5	17.7	16.4	12.8	8.8	15.2	13.5	14.0	9.9	6.0	13.3	11.7	11.3	8.5	4.6
16	**23.5**	—	**18.9**	18.3	17.0	12.8	9.0	15.4	14.1	14.4	9.9	6.1	13.4	11.9	11.5	*8.6*	4.7
17	19.9	● 12.1	18.9	**18.3**	**17.2**	13.2	9.0	**15.6**	**14.3**	**14.8**	10.1	6.4	**13.6**	**12.1**	11.7	8.8	4.7
18	16.7	—	18.3	17.9	17.2	13.2	8.8	15.0	14.1	14.8	10.1	**6.4**	13.3	12.0	**11.8**	9.0	4.8
19	16.7	—	16.7	16.9	16.8	13.4	8.8	13.4	13.3	14.2	10.5	6.6	12.1	11.3	11.6	9.2	4.8
20	18.4	● 3.1	15.7	16.1	16.4	13.3	9.0	13.0	12.7	13.6	10.5	6.6	11.6	10.9	11.3	9.0	4.9
21	14.7	● 7.8	16.9	16.5	16.2	13.3	9.0	14.1	13.1	13.6	10.5	6.8	12.7	11.2	11.2	8.5	4.9
22	12.6	—	14.7	15.7	16.0	13.4	9.1	12.1	12.3	13.4	10.5	7.0	12.7	10.8	11.2	8.5	4.9
23	12.0	● 5.4	13.4	14.7	15.2	13.2	9.1	11.4	11.5	12.8	10.5	7.0	12.3	10.1	10.8	8.6	5.0
24	17.8	● 4.0	12.9	13.6	14.6	13.0	9.2	11.4	11.3	12.2	10.3	7.0	10.7	9.9	10.5	8.5	5.1
25	14.3	● 1.4	14.9	14.5	14.7	12.8	9.3	13.0	11.9	12.6	10.3	7.0	10.5	10.5	10.5	8.4	5.2
26	16.8	—	13.9	13.9	14.6	12.8	9.4	12.0	11.7	12.6	10.3	7.1	11.7	10.5	10.5	8.4	5.2
27	16.5	—	14.3	14.5	14.6	12.6	9.5	12.4	12.1	12.8	10.3	7.2	11.7	10.0	10.5	8.7	5.4
28	16.3	—	15.3	15.1	14.8	12.6	9.5	12.8	12.3	12.8	10.3	7.2	11.7	10.2	10.5	8.4	5.4
29	14.0	● 1.3	15.3	15.5	15.1	12.6	9.6	12.8	12.3	13.0	10.3	7.2	11.1	10.4	10.6	8.3	5.5
30	14.6	—	14.1	14.7	15.0	12.6	9.6	11.6	11.9	12.6	10.3	7.2	11.3	10.1	10.5	8.4	5.6
31	16.2	—	14.9	14.7	15.0	12.8	9.6	12.6	11.9	12.6	10.3	7.2	10.5	10.2	10.4	8.8	5.7
Mittel	**18.21**	**43.1**	**16.13**	**15.87**	**15.39**	**12.27**	**8.42**	**12.97**	**12.19**	**12.81**	**9.46**	**6.14**	**11.53**	**10.29**	**10.39**	**7.79**	**4.61**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1885. **Augusti.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala: Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Mustiala: 50-jähriger Kiefernwald auf trocknem Geröllegrus.					Heinäis: 125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	21.2	—	15.9	14.9	14.8	12.6	9.6	13.6	12.1	12.6	10.3	7.4	11.7	10.4	10.3	8.4	5.9
2	20.0	—	17.5	16.1	15.4	12.8	9.6	14.4	13.1	13.4	10.3	7.4	12.6	11.2	10.9	9.0	5.9
3	19.0	—	16.9	16.6	16.0	12.8	9.7	14.4	13.3	13.8	10.5	7.6	12.8	11.5	11.2	9.0	5.9
4	18.4	● 0.8	17.1	16.7	16.2	13.0	9.7	14.4	13.5	14.0	10.7	7.6	12.9	11.6	11.4	8.7	5.9
5	12.9	—	16.9	16.7	16.4	13.2	9.8	14.4	13.5	14.0	10.8	7.6	13.2	11.9	11.6	9.2	5.9
6	11.5	—	14.3	15.3	15.8	**13.6**	9.8	12.4	12.5	13.6	10.9	7.8	11.7	11.2	11.7	9.0	6.0
7	13.4	—	12.3	14.5	15.4	13.4	9.9	12.2	11.9	13.0	**10.9**	**7.8**	10.5	10.7	11.2	9.2	6.0
8	13.7	—	12.7	14.5	14.6	13.0	10.0	11.2	11.5	12.7	10.9	7.8	10.1	10.1	10.6	8.9	6.0
9	14.0	—	12.7	13.9	14.8	13.2	10.0	11.2	11.3	12.4	10.7	8.0	9.9	9.6	10.3	9.2	6.0
10	18.3	—	13.7	14.0	14.5	13.0	10.0	11.8	11.5	12.3	10.7	8.0	10.5	9.8	10.2	9.2	6.2
11	17.5	—	14.5	14.7	14.7	13.0	10.1	12.4	11.7	12.6	10 6	8.0	11.1	10.2	10.4	9.0	6.2
12	17.4	—	14.7	14.7	14.5	13.0	10.1	12.6	11.9	12.6	10.6	8.0	11.4	10.6	10.6	8.7	6.2
13	18.5	● 1.3	15.2	15.4	14.5	13.0	10.1	12.8	12.3	13.0	10.6	8.0	11.7	10.8	10.9	8.9	6.3
14	14.0	● 0.6	16.3	15.9	15.5	13.0	10.2	13.6	12.7	13.2	10.7	8.0	12.3	11.0	11.0	**9.3**	6.3
15	11.2	● 1.2	13.7	16.0	15.4	13.0	10.2	12.0	12.1	13.0	10.7	8.0	10.9	10.5	10.9	9.3	6.3
16	11.5	● 0.4	12.3	13.9	14.8	13.2	10.2	11.0	11.3	12.5	10.8	8.0	9.8	9.7	10.6	8.9	6.3
17	11.1	● 8.0	12.1	13.5	14.4	13.1	10.2	10.8	10.9	12.2	10.7	8.0	9.8	9.5	10.2	8.8	6.3
18	12.4	● 5.5	12.1	13.3	13.8	13.0	10.2	10.8	10.7	11.6	10.7	8.0	10.7	9.3	10.0	9.1	6.4
19	16.1	—	12.3	12.7	13.8	12.8	10.2	11.2	10.7	11.8	10.5	8.0	10.7	9.7	10.1	8.9	6.4
20	15.9	—	13.1	13.3	13.8	12.7	10.2	11.6	11.3	12.0	10.5	8.1	10.7	10.0	10.3	8.4	*6.4*
21	15.1	—	13.3	13.7	13.5	12.6	10.3	11.8	11.5	12.2	10.5	8.1	10.6	9.9	10.3	8.7	6.4
22	14.6	● 2.4	12.9	13.7	14.2	12.6	10.3	11.6	11.3	12.2	10.5	8.1	11.1	10.1	10.3	9.0	6.4
23	15.0	● 2.4	12.7	13.7	14.2	12.6	10.3	11.6	11.5	12.2	10.5	8.1	10.6	10.1	10.4	8.7	6.4
24	12.6	—	12.6	13.7	14.3	12.6	10.3	11.4	11.5	12.4	10.5	8.1	10.7	10.1	10.4	8.7	6.6
25	11.3	—	11.3	12.7	14.0	12.6	10.4	10.6	10.9	12.2	10.5	8.1	10.2	9.3	10.2	8.2	6.6
26	11.4	● 4.2	*11.1*	*12.3*	*13.4*	*12.4*	*10.4*	*10.6*	*10.7*	*12.0*	*10.4*	*8.2*	10.1	9.4	10.2	8.7	6.6
27	9.4	● 0.6	10.8	11.7	12.8	12.4	10.4	10.4	10.5	11.7	10.4	8.2	9.7	9.2	9.9	8.9	6.7
28	8.1	● 0.5	10.6	11.9	13.1	12.6	10.4	9.4	10.0	11.3	10.4	8.3	8.7	8.7	9.7	8.9	6.7
29	9.3	● 0.4	9.9	11.5	12.8	12.3	10.4	9.2	9.7	11.0	10.3	8.3	8.5	8.4	9.3	8.7	6.7
30	9.1	● 0.5	10.3	11.3	12.5	12.1	**10.4**	9.2	9.5	10.8	10.1	**8.4**	8.5	8.2	9.1	8.5	6.8
31	8.8	● 4.1	10.7	10.9	12.3	12.0	10.4	8.9	9.3	10.6	10.1	8.3	8.3	8.1	9.0	8.5	6.8
Mittel	**13.96**	**32.9**	**13.31**	**13.99**	**14.39**	**12.81**	**10.12**	**11.73**	**11.49**	**12.42**	**10.56**	**7.98**	**10.71**	**10.03**	**10.43**	**8.86**	**6.31**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1885. **September.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Mustiala. 50-jähriger Kiefernwald auf trocknem Geröllegrus.					Heinäis. 125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	7.9	● 18.8	8.7	10.3	12.0	11.8	10.4	8.6	9.1	10.4	9.9	8.2	8.1	7.9	8.8	8.3	6.8
2	8.4	● 7.4	8.3	9.7	11.4	11.6	10.4	8.2	8.5	10.0	9.8	8.2	7.8	7.6	8.7	8.2	6.8
3	8.9	● 0.5	8.1	9.7	11.4	11.4	10.4	8.2	8.5	9.8	9.5	8.2	8.0	7.8	8.6	8.2	6.8
4	9.8	● 0.1	9.5	11.1	11.3	11.3	10.4	8.8	8.8	10.0	9.6	8.2	8.2	7.7	8.6	8.1	6.8
5	8.7	—	8.7	10.0	11.4	11.2	10.3	8.4	8.7	10.0	9.5	8.2	7.8	7.4	8.6	8.1	6.8
6	7.4	—	8.2	9.5	11.2	11.0	10.2	7.8	8.3	9.7	9.3	8.1	7.4	7.4	8.4	7.9	6.8
7	8.1	—	*8.3*	*9.4*	*11.0*	*10.9*	*10.1*	*8.0*	*8.3*	*9.6*	*9.3*	*8.1*	7.3	7.2	8.2	7.8	**6.8**
8	9.6	● 0.3	8.5	9.3	10.8	10.8	10.1	8.0	8.1	9.4	9.3	8.1	7.6	7.3	8.1	7.8	6.8
9	9.6	● 0.2	9.1	9.7	10.8	10.7	10.0	8.4	8.3	9.5	9.1	8.0	7.7	7.4	8.3	7.9	6.8
10	8.5	● 2.4	8.8	8.9	10.4	10.6	10.0	8.0	8.1	9.4	9.1	8.0	8.1	7.6	8.3	*7.8*	6.8
11	7.1	—	8.3	9.3	10.6	10.6	10.0	8.0	8.3	9.6	9.1	8.0	7.7	7.4	8.2	7.6	6.8
12	6.9	—	8.1	9.7	10.4	10.4	10.0	7.8	7.9	9.3	9.1	8.0	7.4	7.1	8.1	7.7	6.8
13	9.0	● 14.2	7.5	9.7	10.2	10.4	9.9	7.6	7.9	9.2	8.9	8.0	7.0	6.9	7.9	7.6	6.8
14	7.9	● 2.3	8.7	8.6	9.6	10.2	9.9	8.2	8.1	9.2	8.9	8.0	7.6	7.1	7.9	7.5	6.8
15	9.4	● 0.1	8.3	8.9	10.0	10.0	9.8	8.0	7.9	9.0	8.9	8.0	7.0	7.0	7.9	7.5	6.8
16	11.7	● 1.1	7.3	8.5	10.0	9.9	9.8	7.6	7.5	8.8	8.7	8.0	6.9	6.9	7.8	7.5	6.6
17	9.6	● 0.2	8.3	8.9	10.0	10.0	9.7	8.6	8.5	9.4	8.8	8.0	7.9	7.3	7.9	7.4	6.6
18	7.4	● 0.1	7.7	8.7	9.8	10.0	9.7	8.0	8.1	9.2	8.5	8.0	7.1	7.0	8.0	7.4	6.6
19	3.7	—	6.5	8.6	9.8	9.8	9.8	7.2	7.7	9.2	8.7	8.0	6.4	6.6	7.8	7.5	6.6
20	9.6	● 6.3	6.7	8.3	9.2	9.8	9.8	7.4	7.5	8.8	8.7	8.0	5.3	6.9	7.3	7.4	6.6
21	9.7	● 1.0	6.9	7.5	9.0	9.6	9.8	7.6	7.5	8.7	8.7	8.0	6.6	6.3	7.2	7.3	6.6
22	8.3	● 2.0	7.1	7.7	9.2	9.6	9.7	7.4	7.5	8.8	8.7	7.8	7.3	6.8	7.4	7.1	6.5
23	8.2	● 11.6	7.5	8.1	9.4	9.4	9.6	7.2	7.5	8.8	8.5	7.8	7.4	6.7	7.5	7.1	6.6
24	6.9	● 7.8	7.3	8.1	9.4	9.4	9.6	Die Thermometer wurden weggenommen und in Heinäis in einen Rasenplatz niedergelegt.					6.6	6.3	7.4	7.1	6.6
25	6.2	● 0.2	7.3	8.1	9.4	9.4	9.4						6.0	6.1	7.3	7.1	6.6
26	3.6	—	6.3	7.5	9.6	9.4	9.4						6.0	6.1	7.3	7.1	6.6
27	3.1	⊔ 0.2	5.5	7.1	9.8	9.2	9.4	8.5	7.9	9.9	10.0	9.8	6.1	6.2	7.2	7.1	6.6
28	3.0	—	3.9	6.3	8.4	9.0	9.2	5.8	8.1	9.4	10.0	9.8	4.7	5.1	*7.0*	7.0	6.6
29	2.9	—	4.1	5.7	7.8	8.9	9.0	5.9	6.5	8.8	9.8	9.8	4.4	5.1	*6.6*	7.0	6.6
30	1.7	—	3.1	4.3	7.4	8.4	9.0	4.5	6.0	8.5	9.6	9.7	4.1	4.6	6.1	6.7	6.6
Mittel	**7.43**	**76.8**	**7.42**	**7.91**	**10.02**	**10.16**	**9.83**						**6.92**	**6.83**	**7.81**	**7.53**	**6.70**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1885. **October.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 125 jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	2.1	● 0.3	2.9	4.1	6.8	8.2	8.9	4.0	5.7	8.2	9.3	Die Beobachtungen unzuverlässig.	3.5	5.4	5.8	6.6	6.6
2	4.1	● 12.6	2.7	3.9	6.4	8.2	8.8	4.9	5.7	7.8	8.9		3.6	5.3	5.4	6.3	6.6
3	8.8	● 8.4	4.5	4.7	6.4	8.0	8.7	5.4	5.6	7.5	8.7		3.6	5.4	5.5	6.3	6.6
4	7.3	● 0.2	7.1	6.5	7.0	7.7	8.8	7.4	6.9	7.9	8.5		6.1	5.4	5.8	6.1	6.6
5	6.7	● 5.6	6.9	6.7	7.2	7.6	8.7	6.8	6.8	8.2	8.5		5.6	5.3	6.1	6.7	6.4
6	6.6	● 10.3	6.5	6.7	7.6	7.8	8.7	6.8	6.9	8.3	8.5		6.0	5.5	6.3	6.2	6.4
7	5.5	● 17.5	5.7	6.3	7.4	7.8	8.6	5.8	6.5	8.2	8.5		6.2	5.7	6.3	6.2	6.4
8	4.1	● 0.6	5.5	6.1	7.4	7.8	8.6	6.1	6.4	8.0	8.5		6.1	5.5	6.3	6.2	6.4
9	5.4	● 0.2	5.7	6.3	7.6	7.6	8.6	4.5	5.8	7.8	8.3		6.2	5.7	6.3	6.2	6.4
10	7.7	● 6.1	5.9	6.1	7.8	7.6	8.5	5.7	5.9	7.6	8.3		4.5	4.8	6.1	6.1	6.4
11	10.9	● 0.2	*7.0*	*6.8*	*7.8*	*7.6*	*8.4*	7.2	6.6	7.7	8.2		6.9	6.1	6.7	6.1	6.2
12	10.0	● 1.8	8.0	7.5	7.8	7.6	8.3	8.0	8.3	8.2	8.2		7.1	6.3	6.8	6.2	6.2
13	9.0	● 10.8	*7.6*	*7.4*	*8.1*	*7.7*	*8.2*	8.1	7.6	8.6	8.3		7.1	6.4	6.9	6.3	6.2
14	7.9	—	*7.2*	*7.3*	8.4	7.8	8.1	7.9	7.7	8.7	8.4		7.1	6.4	6.9	6.3	6.2
15	6.4	● 0.2	*6.7*	*7.1*	*8.3*	*7.9*	*8.0*	7.4	7.5	8.8	8.4		6.6	6.2	7.0	6.5	6.2
16	5.7	● 0.1	*6.2*	*6.9*	*8.1*	*7.9*	*8.0*	7.0	7.5	9.0	8.7		6.6	5.9	6.8	6.5	6.2
17	3.8	● 0.4	5.8	6.7	8.0	8.0	7.9	*6.2*	4.6	*8.5*	8.3		5.6	5.6	6.4	6.4	6.2
18	0.5	—	3.2	5.7	7.5	7.7	7.9	*5.3*	6.1	8.0	8.5		3.1	3.8	5.6	6.3	6.2
19	−2.2	—	1.9	4.1	6.7	7.4	7.6	*4.5*	3.7	6.4	8.0		2.4	3.2	5.0	6.1	6.2
20	−3.0	✳ 0.2	1.1	3.1	5.8	7.5	7.4	*3.6*	3.0	5.8	7.7		4.4	4.9	5.0	5.8	6.2
21	−6.0	—	0.8	3.6	5.2	7.2	7.5	*2.8*	3.1	5.8	7.7		2.1	2.7	4.6	5.8	6.2
22	−5.1	—	0.2	2.1	4.7	6.8	7.5	*1.9*	2.6	5.3	7.3		1.8	2.4	4.2	5.5	6.0
23	−8.2	—	−0.3	1.7	4.2	6.4	7.6	1.1	2.2	4.9	6.9		1.4	2.1	3.8	5.4	6.0
24	−4.1	—	−1.1	1.2	3.8	6.2	7.6	0.7	1.7	4.5	6.6		1.0	1.7	3.5	5.4	6.0
25	−0.7	✳ 3.6	−0.7	1.0	3.5	5.9	7.4	0.5	1.5	4.1	6.3		0.8	1.5	3.2	5.0	6.0
26	−0.2	—	−0.5	0.9	3.3	5.7	7.5	0.5	1.4	3.8	6.0		0.8	1.4	3.0	4.6	6.0
27	1.6	● 2.1	−0.4	0.9	3.1	5.1	7.4	0.5	1.3	3.6	5.7		0.8	1.3	2.8	4.8	6.0
28	3.5	✳ 12.0	−0.2	0.9	3.0	5.2	7.2	0.6	1.3	3.4	5.5		0.8	1.3	2.7	4.4	5.9
29	−2.7	✳ 0.2	−0.3	0.7	2.8	5.0	7.2	0.5	1.1	3.2	5.3		0.7	1.1	2.6	4.5	5.9
30	−2.8	—	−0.3	0.7	2.7	4.6	7.1	0.0	1.1	3.2	5.1		0.4	2.9	2.4	4.2	5.9
31	−1.3	✳ 3.3	−0.3	0.7	2.5	4.1	7.0	0.6	1.1	3.1	5.0		0.8	1.1	2.5	3.9	5.9
		96.7															
Mittel	**2.62**	✳ **19.3**	**3.39**	**4.34**	**6.03**	**7.02**	**7.99**	**4.27**	**4.62**	**6.58**	**7.62**		**3.86**	**4.14**	**5.12**	**5.77**	**6.21**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1885. **November.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	− 1.3	* 3.9	−0.2	0.7	2.6	3.9	6.8	0.6	1.0	4.1	4.9	Die Beobachtungen unzuverlässig.	0.8	1.1	2.4	3.8	5.7
2	− 1.0	* 0.1	−0.2	0.8	2.6	3.9	6.8	0.6	1.0	3.0	4.7		0.6	1.0	2.4	4.0	5.7
3	− 5.3	—	−0.3	0.7	2.5	4.0	6.8	0.6	0.9	2.9	4.6		0.9	1.1	2.4	4.0	5.7
4	3.8	* 0.2	0.0	1.0	2.5	4.1	6.6	0.7	0.8	2.9	4.5		0.7	1.0	2.4	3.8	5.7
5	4.5	—	0.0	0.8	2.4	4.0	6.4	0.8	1.1	2.8	4.5		0.8	1.0	2.3	3.6	5.5
6	4.3	● 0.8	0.1	0.8	2.4	3.9	6.4	0.8	1.1	2.9	4.3		0.9	1.0	2.3	3.6	5.5
7	3.6	—	0.7	0.9	2.4	3.9	6.3	1.2	1.3	3.0	4.3		0.8	1.1	2.5	4.0	5.3
8	4.6	—	1.3	1.1	2.5	3.8	6.2	1.8	1.7	3.1	4.2		1.1	1.1	2.3	3.7	5.1
9	0.5	● 1.0	1.7	1.9	2.7	3.6	6.0	2.2	2.1	3.4	4.2		1.1	1.5	2.5	3.7	5.1
10	2.1	—	1.5	1.9	2.9	3.8	6.0	2.0	2.1	3.5	4.2		1.4	2.5	2.6	3.7	5.0
11	2.9	—	1.8	2.1	3.1	3.7	6.0	2.4	2.3	3.6	4.3		1.8	2.5	2.7	3.5	4.9
12	1.3	—	2.1	2.5	3.3	3.9	5.8	2.6	2.5	3.8	4.4		2.1	2.5	2.9	3.6	4.9
13	2.1	● 2.4	1.7	2.3	3.4	3.9	5.8	2.2	2.3	3.8	4.4		1.8	2.5	2.8	3.6	4.9
14	2.4	* 7.0	1.9	2.3	3.4	4.0	5.6	2.2	2.3	3.8	4.5		2.0	2.5	2.9	3.8	4.9
15	− 5.3	—	1.1	2.1	3.4	3.9	5.6	1.1	1.6	3.6	4.5		0.8	2.5	2.5	4.0	5.0
16	− 5.3	* 0.4	0.4	1.5	3.1	4.0	5.6	0.8	1.2	3.4	4.4		1.0	2.5	2.8	3.8	4.9
17	3.5	—	−0.1	1.1	2.8	3.9	5.6	0.8	1.2	3.1	4.3		1.0	1.5	2.8	3.4	4.9
18	1.5	* 1.6	0.1	1.1	2.6	3.8	5.4	0.6	0.9	3.0	4.2		0.8	2.3	2.4	3.7	4.9
19	− 7.9	—	−0.1	0.9	2.4	3.6	5.4	0.3	0.7	2.8	4.1		0.7	0.8	2.3	3.4	4.9
20	− 9.8	* 1.5	−0.3	0.7	2.3	3.6	5.4	0.4	0.8	2.7	4.0		0.4	0.7	2.1	3.3	4.9
21	− 3.4	—	−0.4	0.7	2.2	3.4	5.4	0.3	0.7	2.6	3.9		0.4	0.7	2.1	3.7	4.9
22	0.0	* 5.0	−0.4	0.5	2.1	3.4	5.2	0.2	0.6	2.5	3.8		0.4	0.7	2.0	3.5	4.9
23	− 5.7	* 0.3	−0.4	0.5	2.0	3.2	5.2	0.0	0.3	2.4	3.7		0.4	1.5	2.0	3.5	4.9
24	−17.7	—	−0.7	0.3	2.0	3.2	5.2	−0.2	0.2	2.3	3.5		0.0	1.5	1.8	3.5	4.9
25	−12.7	* 0.4	−0.7	0.1	1.8	3.2	5.1	−0.1	0.4	2.3	3.5		−0.1	0.2	1.2	3.2	4.7
26	− 6.7	—	−1.1	0.3	1.8	3.0	5.0	−0.2	0.3	2.2	3.4		0.0	0.1	1.4	3.2	4.7
27	− 6.7	—	−1.1	0.3	1.8	2.9	5.0	−0.2	0.2	2.2	3.4		−0.1	−0.1	1.6	3.3	4.7
28	− 8.1	—	−1.3	0.1	1.6	2.8	5.0	−0.2	0.1	2.2	3.4		0.0	0.1	1.5	3.0	4.7
29	− 2.1	* 2.8	−1.3	0.1	1.6	2.8	5.0	−0.2	0.3	2.1	3.2		0.4	0.3	1.8	3.2	4.7
30	0.1	—	−0.9	0.1	1.6	2.7	4.9	−0.2	0.1	2.0	3.2		0.0	0.2	1.4	2.9	4.7
		27.4															
Mittel	2.06	* 23.2	0.16	1.01	2.46	3.59	5.72	0.80	1.07	2.93	4.08		0.76	1.26	2.24	3.57	5.04

Bodentemperatur 9h a, m, C°

1885. **December.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala.					Heinäis.									
			Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Rasenplatz auf Geschiebesand.					125-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	– 0.9	—	– 0.5	0.1	1.6	2.8	4.8	– 0.2	0.3	2.2	2.9	Die Beobachtungen unzuverlässig.	0.0	0.1	1.4	2.8	4.6
2	– 0.3	⚹ 2.8	– 0.5	0.1	1.5	2.6	4.8	– 0.2	0.3	2.0	2.6		0.5	0.4	1.4	2.6	4.6
3	0.1	—	– 0.6	0.1	1.6	2.6	4.8	– 0.2	0.2	1.9	3.0		0.0	0.1	1.4	2.6	4.6
4	0.2	—	– 0.5	0.1	1.5	2.6	4.8	– 0.2	0.2	1.9	3.0		0.0	0.2	1.3	2.4	4.6
5	0.9	⚹ 5.4	– 0.3	0.1	1.5	2.6	4.6	0.0	0.2	1.9	2.9		0.0	0.1	1.3	2.4	4.6
6	– 4.4	⚹ 1.4	– 0.4	– 0.1	1.6	2.5	4.6	– 0.2	0.2	1.9	2.9		0.0	0.1	1.3	2.6	4.5
7	– 6.3	⚹ 0.6	– 0.7	0.1	1.5	2.6	4.6	– 0.1	0.2	1.9	2.9		0.0	0.1	1.3	2.6	4.5
8	– 12.2	⚹ 11.8	– 1.1	0.1	1.4	2.5	4.6	– 0.2	0.2	1.8	2.8		– 0.1	– 0.1	1.3	2.4	4.5
9	– 7.6	⚹ 1.4	– 1.5	0.1	1.4	2.5	4.4	– 0.2	0.2	1.8	2.7		– 0.1	0.0	1.2	2.4	4.5
10	– 10.2	⚹ 1.3	– 1.3	0.0	1.4	2.4	4.4	– 0.2	0.1	1.8	2.7		– 0.2	– 0.2	1.1	2.5	4.5
11	– 16.1	—	– 1.3	– 0.1	1.4	2.4	4.4	0.4	0.1	1.8	2.7		– 0.2	– 0.2	1.1	2.5	4.4
12	– 8.4	●⚹ 0.2	– 1.3	– 0.1	1.3	2.2	4.4	– 0.4	– 0.1	1.7	2.7		– 0.6	– 0.3	1.1	2.5	4.4
13	1.5	●⚹ 0.6	– 1.1	– 0.1	1.3	2.2	4.2	– 0.2	0.1	1.8	2.7		– 0.2	– 0.1	1.1	2.4	4.4
14	0.6	—	– 0.7	0.0	1.3	2.2	4.2	– 0.2	0.1	1.7	2.6		– 0.2	– 0.1	2.0	2.2	4.4
15	1.3	—	– 0.9	– 0.1	1.3	2.2	4.2	– 0.1	0.0	1.7	2.6		– 0.2	– 0.1	1.0	2.2	4.4
16	– 1.8	⚹ 5.5	– 1.1	– 0.1	1.2	2.2	4.1	– 0.2	– 0.1	1.7	2.5		– 0.2	– 0.2	1.0	2.2	4.3
17	– 4.5	—	– 0.9	– 0.1	1.2	2.2	4.1	– 0.2	0.0	1.6	2.5		– 0.3	– 0.2	1.0	2.2	4.3
18	– 12.5	⚹ 0.7	– 1.1	– 0.1	1.2	2.1	4.0	– 0.5	– 0.3	1.6	2.5		– 0.2	– 0.2	1.0	2.2	4.3
19	2.4	—	– 1.3	0.1	1.2	2.1	4.0	– 0.4	– 0.1	1.7	2.7		– 0.2	– 0.2	1.0	2.2	4.3
20	– 0.2	—	– 0.9	– 0.1	1.2	2.2	4.0	– 0.2	0.1	1.8	2.7		– 0.2	– 0.2	1.0	2.1	4.3
21	0.4	—	– 1.1	– 0.1	1.2	2.1	4.0	– 0.3	– 0.4	1.9	2.5		– 0.2	– 0.2	0.9	2.1	4.2
22	– 2.1	—	– 1.3	– 0.1	1.2	2.1	4.0	– 0.3	– 0.1	1.6	2.5		– 0.2	– 0.3	0.9	2.1	4.2
23	– 11.1	—	– 2.3	– 0.2	1.2	2.0	4.0	– 0.3	0.0	1.6	2.0		– 0.6	– 0.2	1.0	2.1	4.2
24	0.5	—	– 2.1	– 0.3	1.1	2.0	3.9	– 0.2	– 0.1	1.5	2.4		– 1.2	– 0.3	0.9	2.4	4.2
25	– 3.0	⚹ 0.4	– 2.1	– 0.3	1.0	2.0	3.9	– 0.4	– 0.1	1.6	2.3		– 1.2	– 0.3	0.8	1.8	4.2
26	**– 22.0**	—	– 2.3	– 1.2	1.0	2.0	3.9	– 0.6	– 0.3	1.4	2.3		– 1.2	– 1.5	0.8	2.0	4.0
27	– 4.6	⚹ 2.2	**– 4.7**	– 1.1	1.0	2.0	3.8	– 1.4	– 0.5	1.4	2.3		– 1.2	– 1.5	0.8	2.0	4.0
28	2.5	● 0.5	– 1.9	– 0.7	0.9	2.0	3.8	– 1.6	– 0.2	1.4	2.2		– 1.2	– 0.6	0.6	1.9	4.0
29	0.5	—	– 1.3	– 0.3	0.9	1.9	3.7	– 0.4	– 0.2	1.4	2.2		– 0.2	– 0.5	0.6	1.9	4.0
30	– 5.6	⚹ 6.8	– 1.3	– 0.5	0.8	1.9	3.7	– 1.4	– 0.3	1.3	2.2		– 1.2	– 0.5	0.6	1.8	4.0
31	– 8.5	⚹ 0.6	– 1.3	– 0.3	0.8	1.8	3.6	– 1.4	– 0.3	1.3	2.1		– 1.6	– 0.5	0.6	1.6	4.0
		42.2															
Mittel	**– 4.24**	⚹ **41.8**	**–1.28**	**–0.16**	**1.25**	**2.24**	**4.20**	**–0.41**	**–0.02**	**1.70**	**2.57**		**–0.40**	**–0.24**	**1.06**	**2.25**	**4.32**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1886. **Januar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala m.m.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	− 1.6	* 2.3	− 1.1	− 0.3	0.8	1.8	3.6	1.6	− 0.3	1.3	2.1	Die Beobachtungen unzuverlässig.	− 0.6	− 0.5	0.6	1.8	4.0
2	− 6.3	* 0.4	− 1.3	− 0.3	1.0	1.8	3.6	1.6	− 0.3	1.3	2.1		− 0.4	− 0.5	0.6	1.6	4.0
3	− 12.1	—	− 1.7	− 0.3	0.8	1.7	3.5	− 1.9	− 0.4	1.3	2.1		− 1.6	− 0.3	0.6	1.8	4.0
4	− 8.9	* 1.2	− 1.5	− 0.3	0.8	1.8	3.5	− 1.8	− 0.4	1.3	2.1		− 1.3	− 0.7	0.4	1.8	3.8
5	− 1.4	* 7.0	− 1.3	− 0.5	0.8	1.6	3.5	− 2.0	− 0.4	1.2	2.0		− 0.7	− 0.6	0.5	1.6	3.8
6	− 10.9	* 0.8	− 1.3	− 0.4	0.8	1.6	3.5	− 2.1	− 0.3	1.3	2.0		− 0.6	− 0.5	0.5	1.6	3.8
7	− 16.7	* 0.2	− 1.5	− 0.5	0.8	1.6	3.4	− 2.0	− 0.4	1.2	2.0		− 0.8	− 0.7	0.4	1.6	3.8
8	− 10.9	* 0.4	− 1.3	− 0.5	0.7	1.4	3.4	− 1.9	− 0.4	1.3	2.0		− 1.0	− 0.9	0.4	1.2	3.6
9	− 8.7	* 0.2	− 1.7	− 0.7	0.8	1.6	3.4	− 1.9	− 0.4	1.2	2.0		− 1.5	− 2.3	0.5	1.6	3.4
10	− 8.8	* 1.1	− 1.9	− 0.7	0.8	1.6	3.4	− 2.0	− 0.3	1.2	1.9		− 1.6	− 2.3	0.4	1.6	3.3
11	− 12.2	* 0.1	− 1.7	− 0.5	0.7	1.6	3.4	− 0.4	− 0.3	*1.4*	*1.8*		− 1.6	− 2.3	0.4	1.6	3.3
12	− 7.0	* 0.3	− 1.7	− 0.5	0.6	1.4	3.4	− 2.0	− 0.4	1.2	1.9		− 1.6	− 2.3	0.4	1.6	3.3
13	− 4.1	* 0.3	− 1.5	− 0.5	0.7	1.4	3.3	− 2.0	− 0.4	1.2	1.8		− 1.6	− 2.3	0.4	1.6	3.3
14	− 4.9	* 0.2	− 1.3	− 0.3	0.7	1.6	3.3	− 2.1	− 0.4	1.2	1.9		− 1.7	− 2.4	0.4	1.5	3.2
15	− 0.3	*● 3.9	− 1.1	− 0.3	0.6	1.6	3.3	− 0.2	− 0.3	1.2	1.9		− 1.8	− 2.4	0.4	1.3	3.2
16	0.9	* 7.2	− 0.9	− 0.5	0.7	1.5	3.2	− 0.2	− 0.3	1.2	1.9		− 1.8	− 2.4	0.4	1.3	3.1
17	0.0	—	− 0.7	− 0.6	0.7	1.5	3.2	− 0.3	− 0.3	1.1	1.7		− 1.8	− 2.3	0.4	1.3	3.1
18	− 1.3	* 2.3	− 0.7	− 0.6	0.6	1.4	3.2	− 0.3	− 0.3	1.1	1.7		− 0.2	− 0.4	0.4	1.4	3.2
19	− 2.7	* 2.0	− 0.5	− 0.5	0.6	1.4	3.1	− 0.3	− 0.3	1.1	1.7		− 0.2	− 0.4	0.4	1.4	3.2
20	− 6.5	—	− 0.7	− 0.3	0.6	1.3	3.1	− 0.3	− 0.3	1.1	1.7		− 0.4	− 0.4	0.4	1.4	3.2
21	− 6.1	—	− 0.7	− 0.5	0.7	1.3	3.1	− 0.3	− 0.3	1.1	1.7		− 2.1	− 0.5	0.4	1.4	3.1
22	− 7.1	—	− 0.6	− 0.4	0.7	1.3	3.0	− 0.3	− 0.3	1.1	1.7		− 0.4	− 0.5	0.4	1.4	3.1
23	− 7.7	—	− 0.7	− 0.5	0.8	1.4	3.0	− 0.2	− 0.3	1.1	1.7		− 1.7	− 2.3	0.3	1.4	3.1
24	− 9.0	—	− 1.3	− 0.3	0.7	1.3	3.0	− 0.2	− 0.3	0.9	1.7		− 1.7	− 2.3	0.3	1.4	3.1
25	− 8 6	—	− 1.3	− 0.7	0.8	1.4	3.0	− 2.1	− 0.3	1.1	1.7		− 1.5	− 2.2	0.3	1.3	3.1
26	− 6.9	—	− 1.5	− 0.6	0.7	1.4	3.0	− 2.1	− 0.3	1.1	1.7		− 1.4	− 2.2	0.3	1.4	3.1
27	− 19.9	—	− 2.3	− 0.6	0.7	1.4	3.0	− 2.1	− 0.3	1.1	1.7		− 1.6	− 2.2	0.3	1.4	3.1
28	− 19.1	—	− 4.1	− 1.3	0.6	1.4	3.0	− 1.5	*− 0.4*	1.0	1.7		− 3.2	− 2.5	0.1	1.3	3.2
29	− 17.1	* 0.3	**− 4.7**	**− 1.7**	0.6	1.2	3.0	− 1.4	− 0.5	1.0	1.7		**− 3.6**	− 2.9	0.1	1.3	3.1
30	− 10.6	* 5.2	− 4.1	− 1.3	0.6	1.2	2.9	− 1.6	− 0.5	1.0	1.6		− 3.6	**− 3.0**	0.4	1.3	3.1
31	− 3.2	* 0.5	− 2.3	− 1.1	0.5	1.2	2.9	− 0.6	− 0.7	1.0	1.7		− 1.7	− 1.5	0.2	1.2	3.0
		37.1															
Mittel	**− 7.73**	* **35.1**	**15.8**	**− 0.58**	**0.71**	**1.47**	**3.23**	**− 1.06**	**− 0.34**	**1.16**	**1.84**		**− 1.46**	**− 1.58**	**0.39**	**1.46**	**3.35**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1886. **Februar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	− 7.9	✱ 5.5	− 1.7	− 0.7	0.5	1.2	2.8	− 2.1	− 0.3	1.0	1.6	Die Beobachtungen unzuverlässig.	− 1.2	− 1.8	0.0	1.3	2.8
2	− 1.6	✱ 3.3	− 1.3	− 0.5	0.6	1.2	2.8	− 0.2	− 0.3	1.0	1.6		− 1.2	− 1.9	0.0	1.2	2.8
3	− 2.0	✱ 5.2	− 1.1	− 0.3	0.6	1.2	2.8	− 0.2	− 0.3	0.9	1.5		− 1.7	− 2.2	0.1	1.0	2.8
4	− 7.4	✱ 2.6	− 1.1	− 0.3	0.6	1.2	2.8	− 2.0	− 0.3	0.9	1.5		− 1.7	− 2.2	0.1	1.2	2.8
5	− 16.9	—	− 1.3	− 0.5	0.5	1.1	2.8	− 1.8	− 0.4	0.9	1.5		− 1.3	− 1.8	0.0	1.2	2.6
6	− 16.1	—	− 2.7	− 0.7	0.6	1.2	2.8	− 1.6	− 0.5	0.9	1.5		− 1.3	− 1.8	0.0	1.2	2.6
7	− 10.4	—	− 3.3	− 1.1	0.5	1.1	2.8	− 1.0	− 0.7	0.9	1.5		− 1.4	− 1.3	− 0.2	1.2	2.6
8	− 4.6	—	− 2.3	− 0.9	0.4	1.2	2.8	− 0.3	− 0.5	0.9	1.5		− 1.4	− 1.3	0.3	1.1	2.6
9	− 0.1	—	− 1.7	− 0.7	0.4	1.2	2.8	− 0 3	− 0.3	0.9	1.4		− 0.8	− 1.0	− 0.1	1.1	2.5
10	− 0.3	—	− 1.1	− 0.5	0.3	1.2	2.8	− 0.3	− 0.3	0.8	1.5		− 0.7	− 0.9	0.0	1.1	2.5
11	− 0.3	—	− 0.9	− 0.3	0.5	1.2	2.8	− 0.3	− 0.7	0.9	1.4		− 0.5	− 0.7	0.1	1.1	2.5
12	− 4.6	—	− 2.5	− 0.3	0.6	1.2	2.8	− 0.3	− 0.7	0.8	1.4		− 0.6	− 0.7	0.2	1.1	2.4
13	− 5.3	—	− 2.7	− 0.5	0.6	1.2	2.8	− 0.2	− 0.7	0.9	1.4		− 0.6	− 0.7	0.1	1.1	2.4
14	− 4.2	—	− 1.1	− 0.5	0.6	1.2	2.8	− 0.5	− 0.3	0.9	1.4		− 0.7	− 0.8	0.1	1.1	2.4
15	− 6.3	—	− 1.3	− 0.5	0.6	1.2	2.8	− 0.5	− 0.4	0.9	1.4		− 0.9	− 0.9	0.0	1.1	2.4
16	− 6.2	—	− 1.3	− 0.3	0.6	1.2	2.8	− 0.7	− 0.6	0.9	1.4		− 1.0	− 1.0	0.0	1.0	2.4
17	− 12.2	—	− 1.7	− 0.5	0.6	1.2	2.8	− 0.6	− 0.5	0.8	1.4		− 1.4	− 1.1	0.1	1.1	2.4
18	− 11.0	✱ 0.1	− 2.7	− 0.9	0.5	1.2	2.6	− 0.7	− 0.5	0.8	1.4		− 1.4	− 1.0	0.1	1.1	2.2
19	− 11.0	—	− 2.7	− 0.9	0.3	1.2	2.6	− 1.2	− 0.7	0.8	1.4		− 1.5	− 2.0	0.1	1.1	2.2
20	− 10.4	—	− 2.9	− 1.1	0.4	1.0	2.6	− 1.0	− 0.7	0.8	1.4		− 1.5	− 2.0	− 0.3	1.1	2.2
21	− 10.3	—	− 3.1	− 1.1	0.2	1.0	2.6	− 1.0	− 0.7	0.8	1.3		− 1.5	− 2.2	− 0.6	1.1	2.2
22	− 10.5	—	− 2.9	− 1.3	0.2	1.0	2.6	− 1.4	− 0.7	0.7	1.3		− 1.9	− 1.8	− 0.6	0.9	2.2
23	− 10.8	—	− 3 1	− 1.3	0.3	1.0	2.6	− 1.6	− 1.1	0.7	1.3		− 2.2	− 1.8	− 0.7	1.0	2.2
24	− 12.0	—	− 3.3	− 1.5	0.2	1.0	2.6	− 1.9	− 1.3	0.4	1.3		− 2.4	− 2.1	− 0.8	1.0	2.2
25	− 16.6	—	− 3.7	− 1.5	0.2	1.0	2.6	− 2.2	− 1.5	0.5	1.3		− 2.8	− 2.3	− 1.0	1.0	2.2
26	− 14.9	—	− 3.5	− 1.7	0.0	1.0	2.6	− 2.4	− 1.7	0.2	1.3		− 3.1	− 2.6	− 1.2	1.0	2.1
27	− 8.0	—	− 3.5	− 1.7	0.0	1.0	2.4	− 2.0	− 1.5	0.2	1.3		− 2.6	− 1.4	− 1.0	0.8	2.1
28	− 13.2	—	− 3.3	− 1.5	0.0	1.0	2.4	− 2.2	− 1.6	0.2	1.2		− 2.6	− 2.3	− 1.2	0.9	2.1
		16.7															
Mittel	**− 8.40**	**✱ 16.7**	**−2.28**	**−0.84**	**0.41**	**1.13**	**2.70**	**−1.09**	**−0.71**	**0.76**	**1.41**		**−1.50**	**−1.56**	**−0.23**	**1.08**	**2.41**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1886. **Mars.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fechtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	− 9.2	—	−3.3	−1.5	0.0	1.2	2.4	−2.2	**−2.5**	0.2	1.2	Die Beobachtungen unzuverlässig.	−2.6	−2.3	−1.2	0.9	2.1
2	−10.2	—	−3.3	−1.5	0.0	1.0	2.4	−2.2	−1.6	0.1	1.2		−2.5	−2.3	−1.1	0.8	2.1
3	−11.1	✳ 1.1	−2.7	−1.4	0.0	1.0	2.4	−1.8	−1.4	0.0	1.1		−2.2	−2.0	−1.0	0.8	2.1
4	−11.2	✳ 4.6	−2.7	−1.3	0.0	1.0	2.4	−1.8	−1.4	0.0	1.1		−2.2	−2.0	−1.0	0.8	2.1
5	−13.7	✳ 0.4	−2.7	−1.3	0.0	0.9	2.4	−1.4	−1.2	−0.4	1.1		−2.0	−1.9	−1.0	0.8	2.0
6	−11.4	—	−2.3	−1.3	0.0	0.9	2.4	−1.4	−1.1	0.1	1.1		−2.0	−1.9	−0.9	0.8	2.0
7	−13.2	—	−2.1	−1.1	0.0	0.9	2.4	*−1.8*	*−1.3*	*0.0*	*1.0*		*−2.2*	*−2.0*	*−1.0*	*0.8*	*2.0*
8	−10.3	—	−2.3	−1.1	0.0	0.8	2.4	−2.4	−1.7	0.0	1.0		−2.5	−2.3	−1.1	0.8	2.0
9	− 9.9	—	−2.7	−1.3	0.0	0.8	2.4	−2.2	−1.6	−0.2	1.1		−2.4	−2.2	−1.1	0.8	2.0
10	− 6.4	—	−2.9	−1.3	0.0	0.8	2.4	−2.0	−1.5	−0.1	1.0		−2.2	−2.0	−1.0	0.8	2.0
11	− 5.5	—	−2.3	−1.1	0.0	0.8	2.4	−2.0	−1.3	−0.1	1.0		−1.8	−1.8	−0.8	0.6	2.0
12	− 5.1	—	−2.3	−1.1	0.0	0.8	2.4	−1.6	−1.3	0.0	1.0		−2.2	−2.1	−1.0	0.8	2.0
13	− 6.0	—	−2.1	−0.9	0.0	0.8	2.4	−1.6	−1.3	0.0	1.0		−1.6	−1.6	−0.4	0.5	2.0
14	− 2.6	—	−2.1	−0.7	0.0	0.8	2.2	−1.6	−1.3	0.0	1.0		−1.6	−1.6	−0.4	0.5	2.0
15	− 3.9	—	−1.9	−0.7	0.0	0.8	2.2	−1.4	−1.1	0.0	1.0		−1.4	−1.5	−0.4	0.5	2.0
16	− 9.6	—	−2.1	−0.9	0.0	0.8	2.2	−1.5	−1.1	0.1	1.0		−1.4	−1.5	−0.5	0.7	2.0
17	−12.8	—	−2.7	−1.1	0.0	0.8	2.2	−2.5	−1.7	−0.1	1.0		−2.2	−2.2	−0.5	0.7	2.0
18	− 7.9	—	−2.9	−1.1	0.0	0.8	2.2	**−2.9**	−2.1	−0.4	1.0		−1.7	−2.3	−1.2	0.7	2.0
19	− 5.9	—	−2.9	−1.3	**0.2**	0.8	2.2	−2.5	−2.2	−0.4	1.0		−2.2	−2.2	**−1.2**	0.7	2.0
20	− 5.7	—	−2.3	−1.1	0.0	0.8	2.2	−2.2	−1.5	−0.4	1.0		−2.2	−2.2	−1.2	0.7	1.8
21	− 3.0	—	−2.1	−1.1	0.0	0.8	2.2	−1.9	−1.5	−0.3	0.9		−1.8	−1.8	−0.7	0.7	1.8
22	− 4.6	—	−2.3	−0.9	0.0	0.8	2.2	−1.3	−1.5	−0.1	0.8		−1.4	−1.5	−0.7	0.7	1.8
23	− 8.2	—	−2.3	−1.1	0.0	0.8	2.0	−2.2	−1.4	−0.2	0.9		−1.9	−1.8	−0.6	0.7	1.8
24	− 0.3	✳ 0.1	−1.7	−0.9	0.0	0.8	2.0	−1.8	−1.3	**−0.3**	0.9		−1.7	−1.8	−0.7	0.7	1.8
25	1.6	—	−1.3	−0.7	0.0	0.8	2.0	−1.0	−0.9	−0.1	0.9		−1.1	−1.4	−0.5	0.7	1.8
26	0.8	—	−1.1	−0.5	0.0	0.8	2.0	−0.4	−0.9	0.2	0.9		−0.8	−1.1	−0.3	0.6	1.8
27	2.9	● 0.5	−0.7	−0.3	0.2	0.8	2.0	−0.5	−0.5	0.3	0.9		−0.6	−0.9	−0.2	0.6	1.8
28	3.7	● 0.5	−0.5	−0.1	0.4	0.8	2.0	−0.2	−0.8	0.3	0.9		−0.5	−0.8	−0.1	0.6	1.8
29	1.0	▲ 0.1	−0.5	−0.1	0.4	0.8	2.0	−0.2	−0.7	0.4	0.9		−0.4	−0.7	−0.0	0.6	1.8
30	1.6	● 7.2	−0.4	−0.1	0.4	0.8	2.0	−0.2	−0.7	0.4	0.9		−0.3	−0.6	−0.0	0.6	1.8
31	1.7	—	−0.3	−0.1	0.4	0.8	2.0	−0.2	−0.7	0.4	0.8		−0.2	−0.6	−0.1	0.8	1.6
		14.5															
Mittel	**−5.63**	✳ 6.3	**−2.06**	**−0.94**	**0.05**	**0.84**	**2.23**	**−1.58**	**−1.33**	**−0.02**	**0.99**		**−1.67**	**−1.71**	**−0.70**	**0.70**	**1.93**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1886. **April.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	1.8	—	– 0.3	0.1	0.6	0.8	2.0	– 0.1	– 0.2	0.5	0.8	3.4	– 0.2	– 0.5	0.1	0.6	1.6
2	0.9	—	– 0.3	0.1	0.6	0.8	2 0	– 0.1	– 0.1	0.5	0.8	3.4	– 0.2	– 0.5	0.1	0.6	1.6
3	4.0	—	– 0.3	0.1	0.6	0.7	2.0	– 0.1	– 0.2	0.5	0.8	3.4	– 0.2	– 0.5	0.1	0.6	1.6
4	2.2	—	– 0.3	0.1	0.6	0.7	2.0	– 0.1	– 0.2	0.5	0.8	3.4	– 0.2	– 0.5	0.1	0.6	1.6
5	3.0	—	– 0.1	0.1	0.6	0.7	2.0	– 0.1	– 0.2	0.5	0.8	3.4	– 0.2	– 0.5	0 2	0.5	1.6
6	2.4	—	– 0.1	0.1	0.6	0.7	2.0	– 0.1	– 0.2	0.5	0.8	3.4	– 0.2	– 0.5	0.2	0.6	1.6
7	2.8	—	– 0.1	0.1	0.6	0.7	2.0	– 0.1	– 0.2	0.5	0.8	3.4	– 0.1	– 0.4	0.2	0.6	1.6
8	2.4	—	– 0.1	0.1	0.6	0.7	2.0	– 0.1	– 0.2	0.5	0.8	3.4	– 0.1	– 0.4	0.2	0.6	1.6
9	3.3	—	– 0.1	0.1	0.6	0.6	2.0	– 0.1	– 0.2	0.6	0.8	3.4	– 0.1	– 0.4	0.2	0.6	1.6
10	4.2	—	– 0.1	0.1	0.6	0.6	2.0	0.0	– 0 2	0.5	0.8	3.4	– 0.2	– 0.4	0.2	0.6	1.6
11	6.4	—	0.1	0.3	0.6	0.6	2.0	0.1	– 0.1	0.5	0.8	3.4	– 0.1	– 0.4	0.2	0.6	1.6
12	7.0	—	0.1	0.3	0.6	0.6	2.0	0.2	– 0.1	0.7	0.8	3.4	– 0.1	– 0.4	0.3	0.6	1.6
13	7.6	—	0.5	0.3	0.8	0.6	2.0	0.0	– 0.1	0.6	0.8	3.4	– 0.1	– 0.4	0.3	0.6	1.4
14	8.4	—	0.9	0.4	0.8	0.6	1.8	0.4	0.3	0.6	0.8	3.4	– 0.1	– 0.4	0.3	0.6	1.4
15	7.4	—	1.3	0.4	0.8	*0.6*	1.8	0.3	0.2	0.6	**0.7**	3.4	0.0	– 0.3	0.3	0.6	1.4
16	8.0	—	1.1	0.3	0.6	*0.6*	1.8	0.3	0.0	0.6	0.9	3.4	0.0	– 0.3	0.2	0.6	1.4
17	3.8	—	0.9	0.3	0.6	*0.6*	1.8	0.2	0.0	0.7	0.9	3.4	– 0.1	– 0.4	0.2	0.6	1.4
18	1.3	—	0.7	0.3	0.6	*0.6*	1.8	0.1	– 0.2	0.6	0.8	3.4	– 0.1	– 0.4	0.3	0.6	1.4
19	3.0	—	0.7	0.3	0.6	**0.6**	1.8	0.7	– 0.2	0.6	1.1	3.4	– 0.1	– 0.4	0.3	0.6	1.4
20	3.8	—	0.7	0.5	0.6	*0.6*	1.8	0.1	0.0	0.6	0.9	3.4	– 0.1	– 0.3	0.3	0.6	1.4
21	4.9	—	0.7	0.5	0.6	*0.6*	1.8	0.1	0.1	0.6	0.9	3.4	– 0.1	– 0.3	0.2	0.6	1.4
22	6.3	—	0.9	0.5	0.6	*0.6*	1.8	0.1	0.1	0.6	0.9	3.4	– 0.1	– 0.4	0.2	0.6	1.4
23	6.6	—	1.5	0.7	0.6	*0.6*	1.8	0.1	0.1	0.7	0.9	3.4	– 0.1	– 0.4	0.3	0.6	1.4
24	7.5	—	2.1	0.9	0.6	*0.6*	1.8	0.1	0.1	0.7	0.9	3.4	0.0	– 0.3	0.3	0.6	1.4
25	2.6	—	2.3	1.1	0.6	*0.6*	1.8	0.2	0.0	0.7	0.9	3.4	0.0	– 0.3	0.3	0.6	1.4
26	– 0.2	—	0.5	0.7	0.6	0.6	1.8	0.1	0.1	0.7	1.0	3.4	– 0.1	– 0.4	0.3	0.6	1.4
27	0.0	—	0.3	0.5	0.6	0.6	1.6	0.1	– 0.2	0.7	1.0	**3.4**	– 0.1	– 0.4	0.3	0.5	1.4
28	– 2.4	—	– 0.1	0.3	0.6	0.6	1.6	0.1	0.0	0.6	1.0	3.4	– 0.1	– 0.4	0.3	0.5	1.4
29	– 2.9	—	– 0.1	0.3	0 6	0.6	1.6	0.1	– 0.2	0.6	1.1	3.4	– 0.2	– 0.4	0.3	0.6	1.4
30	– 3.6	✳ 1.4	– 0.3	0.3	0.6	0.6	1.6	0.0	– 0.2	0.6	1.1	3.4	– 0.2	– 0.4	0.3	0.6	1.4
		1.4															
Mittel	3.42	✳ 1.4	0.43	0.34	0.62	0.63	1.86	0.08	–0.07	0.59	0.87	3.40	–0.12	0.40	0.24	0.59	1.48

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1886. **Mai.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem fuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	−2.7	—	−0.3	0.3	0.6	0.7	1.6	0.0	−0.2	0.6	1.1	3.4	−0.1	−0.4	0.3	0.6	1.4
2	0.9	—	−0.3	0.3	0.6	0.7	1.6	0.1	0.0	0.6	1.1	4.0	−0.2	−0.4	0.3	0.6	1.6
3	0.7	✳ 0.6	0.5	0.5	0.6	0.7	1.6	0.0	−0.1	0.6	1.1	4.0	−0.2	−0.4	0.3	0.6	1.6
4	2.1	—	0.9	0.7	0.6	0.7	1.6	0.3	−0.1	0.6	1.1	3.4	−0.1	−0.4	0.3	0.6	1.4
5	5.7	—	1.3	0.9	0.6	0.7	**1.6**	1.3	0.3	0.6	1.1	3.4	−0.1	−0.4	0.3	0.5	1.4
6	7.2	—	1.5	1.1	0.6	0.7	1.6	0.5	0.1	0.7	1.1	3.5	−0.1	−0.4	0.3	0.5	1.4
7	10.2	—	2.7	1.7	0.7	0.7	1.6	3.5	2.0	0.6	1.3	3.4	−0.1	−0.4	0.3	0.5	1.4
8	11.4	—	3.7	2.7	0.8	0.7	1.6	4.8	3.2	1.5	1.4	3.4	0.0	−0.3	0.3	0.5	1.4
9	8.0	● 5.0	4.9	3.1	0.8	0.7	1.6	3.9	3.1	2.7	2.2?	4.0	0.1	−0.2	0.5	**0.5**	1.4
10	5.9	● 3.3	4.9	2.9	0.8	0.8	1.6	4.4	3.3	3.1	1.9	4.0	−0.1	−0.3	0.3	0.5	1.6
11	4.6	● 1.4	4.9	2.9	0.8	0.8	1.6	3.9	3.3	3.1	1.9	4.0	0.0	−0.3	0.3	0.5	1.6
12	5.8	▲ 1.1	4.7	2.7	0.8	0.8	1.6	3.9	3.3	3.3	1.9	4.0	0.0	−0.3	0.3	0.5	1.6
13	5.8	▲ 0.1	4.9	2.9	0.8	1.0	1.6	4.0	3.5	4.1	2.2	4.0	0.0	−0.3	0.2	0.6	1.6
14	9.8	—	5.1	3.5	1.0	1.2	1.8	5.1	4.5	4.1	2.2	4.0	0.0	−0.3	0.3	0.6	1.6
15	12.2	● 6.8	5.5	3.7	1.2	1.2	1.8	7.2	5.3	5.1	2.4	4.0	0.1	−0.1	0.3	0.6	1.6
16	10.5	—	5.7	4.3	1.6	1.4	1.8	8.2	6.9	6.7	3.3	4.0	0.5	−0.2	0.3	0.6	1.6
17	8.2	—	6.3	4.7	1.8	1.4	1.8	7.8	6.3	6.6	3.7	4.0	0.8	−0.1	0.3	0.6	1.6
18	9.2	—	6.9	5.7	2.2	1.6	2.0	7.4	6.9	7.0	4.6	4.0	0.4	−0.1	0.3	0.6	1.4
19	10.9	● 2.8	7.7	6.1	2.4	2.0	2.0	7.6	7.2	7.3	4.6	4.0	0.4	0.1	0.3	0.6	1.4
20	12.7	—	8.5	6.7	4.0	3.0	2.0	7.8	7.8	7.8	5.1	4.0	0.5	0.3	0.3	0.6	1.4
21	15.5	—	9.7	8.5	6.4	3.4	2.2	8.2	7.7	7.8	5.0	4.4	0.4	0.4	0.3	0.6	1.4
22	11.9	● 3.0	11.1	9.3	7.4	3.8	2.4	8.8	8.8	*8.3*	6.3	5.0	1.9	0.5	0.3	0.6	1.4
23	7.8	—	9.7	9.1	8.0	4.2	2.6	9.4	9.2	*8.6*	6.5	5.0	2.6	0.8	0.3	0.6	1.4
24	12.2	—	9.1	8.7	8.2	5.0	2.8	10.6	10.1	*9.7*	6.9	5.0	1.2	1.2	0.3	0.6	1.4
25	13.8	● 5.2	10.7	9.1	8.4	5.4	3.0	10.2	9.8	10.1	7.2	5.0	1.4	0.4	0.3	0.6	1.4
26	11.1	—	10.7	9.3	9.0	5.6	3.2	10.2	9.8	10.1	7.2	5.0	2.8	1.2	0.4	0.6	1.4
27	13.1	—	11.1	9.7	9.4	6.0	3.4	10.4	9.9	10.2	7.3	5.0	2.8	1.1	0.4	0.5	1.4
28	15.4	—	11.1	10.3	9.6	6.2	3.6	11.3	10.9	11.0	7.7	5.4	3.3	1.6	0.6	0.6	1.4
29	14.5	—	10.7	10.5	10.0	6.4	3.8	11.4	11.1	11.3	8.0	5.4	3.1	1.6	0.8	0.6	1.4
30	15.1	—	10.1	10.7	11.2	6.8	4.0	10.5	10.5	11.4	8.5	5.4	3.9	1.6	0.8	0.6	1.4
31	13.1	—	9.7	10.7	11.2	7.0	4.0	10.5	10.7	11.4	8.7	5.4	2.8	1.2	0.8	0.6	1.4
		29.3															
Mittel	**9.13**	✳ 1.8	**6.25**	**5.27**	**3.94**	**2.62**	**2.23**	**6.23**	**5.65**	**5.70**	**4.02**	**4.27**	**0.90**	**0.22**	**0.37**	**0.57**	**1.46**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1886. **Juni.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	10.4	—	10.3	10.5	10.4	7.2	4.2	11.1	10.5	11.0	8.4	6.0	1.7	1.7	0.9	0.6	1.4
2	10.9	● 12.6	9.7	10.7	10.4	7.4	4.2	10.3	10.2	11.0	8.5	6.0	2.8	1.7	0.8	0.6	1.4
3	8.3	● 0.2	10.7	10.5	10.2	7.4	4.4	10.0	9.9	10.9	8.5	6.0	2.4	1.2	0.8	0.6	1.4
4	8.4	● 0.8	10.7	9.7	9.6	7.6	4.6	9.2	9.9	10.2	8.5	6.2	1.8	0.9	0.8	0.6	1.4
5	10.7	—	10.1	9.7	9.6	7.6	4.8	9.5	9.5	10.1	8.5	6.4	2.2	1.1	0.9	0.6	1.4
6	12.3	● 1.4	9.9	9.5	9.6	7.6	4.8	9.9	10.1	10.4	8.5	6.4	2.1	1.2	1.0	0.6	1.4
7	12.9	—	12.7	10.9	10.2	7.8	5.0	11.2	10.7	11.2	8.7	6.4	3.1	1.6	1.1	0.6	1.4
8	11.3	—	11.5	10.7	10.4	8.0	5.0	11.2	10.7	11.4	8.8	6.4	3.1	1.7	1.2	0.6	1.4
9	13.2	—	11.1	10.7	10.6	8.0	5.2	11.7	11.4	11.8	9.1	6.4	2.6	1.9	1.3	0.6	1.4
10	16.0	—	12.1	11.3	10.8	8.2	5.2	11.7	11.5	11.8	9.2	6.4	4.2	2.1	2.3	0.7	1.4
11	18.0	—	12.7	11.7	11.2	8.4	5.2	11.7	12.1	12.0	9.3	6.4	5.1	3.7	2.7	0.8	1.4
12	19.3	—	13.5	12.7	11.4	8.6	5.4	11.7	12.1	12.0	9.3	6.4	5.8	3.9	2.7	0.8	1.4
13	18.4	—	13.7	13.1	12.2	8.6	5.4	13.8	13.5	13.4	10.1	7.0	5.8	4.0	2.7	0.9	1.4
14	19.4	—	14.9	13.7	12.4	8.8	5.4	15.8	14.5	14.2	10.9	7.0	5.8	3.9	2.6	0.6	1.4
15	19.5	—	16.1	14.1	13.0	9.4	5.6	14.8	14.5	14.6	10.9	7.0	6.2	5.1	3.6	0.6	1.4
16	19.5	● 0.1	15.7	14.5	13.2	9.6	5.8	14.1	13.8	14.6	11.2	7.0	7.6	5.9	4.8	1.4	1.4
17	20.3	—	15.5	14.7	13.6	9.6	5.8	15.4	15.1	15.0	11.4	7.4	7.6	5.9	4.8	2.4	1.4
18	20.9	● 0.2	15.7	14.7	13.8	9.8	6.0	15.4	15.1	15.2	11.7	8.0	7.6	5.9	4.9	2.6	1.4
19	**23.4**	—	15.7	14.9	14.0	10.0	6.2	13.8	14.5	15.0	11.7	8.0	8.1	6.4	5.4	2.6	1.6
20	20.3	● 4.1	17.1	15.7	14.4	10.4	6.4	16.4	16.1	15.8	11.9	8.0	8.6	7.1	6.1	*3.0*	1.6
21	17.2	● 5.8	15.5	15.5	14.6	10.6	6.6	15.8	15.3	15.2	11.7	8.0	8.6	6.5	6.0	3.0	2.0
22	17.4	●▲17.0	15.5	14.9	14.6	10.8	6.6	15.8	15.0	*15.4*	11.9	8.0	8.8	7.4	7.0	3.8	2.0
23	16.6	● 0.6	15.7	15.1	14.6	11.0	6.8	15.7	15.4	15.8	11.6	8.0	9.8	8.1	7.4	4.3	2.0
24	16.0	—	15.9	14.9	14.6	11.0	*7.0*	14.8	14.7	15.4	11.9	8.0	9.6	8.2	7.8	4.5	2.0
25	17.4	● 6.7	16.3	15.7	14.8	11.2	*7.0*	15.2	15.1	15.8	12.7	8.2	9.4	8.2	7.8	4.8	2.2
26	15.6	—	16.1	15.5	15.0	11.4	7.2	14.4	14.6	15.5	12.8	9.0	9.0	8.0	8.0	5.1	2.4
27	14.6	—	15.7	15.3	14.8	11.4	7.2	14.2	14.7	15.6	12.9	9.0	8.6	7.9	8.0	5.2	3.0
28	14.4	—	15.5	15.5	14.8	11.4	7.4	14.1	14.3	15.3	12.8	9.0	8.4	7.7	8.0	5.4	3.0
29	16.0	● 3.0	15.1	14.7	14.6	11.6	7.6	14.5	14.6	15.3	12.8	9.0	8.6	7.8	8.0	5.6	3.0
30	18.2	—	15.5	15.1	15.0	11.6	7.8	15.8	15.5	15.6	12.8	9.0	8.5	7.8	8.1	5.6	3.0
Mittel	**15.80**	**52.5**	**13.88**	**13.21**	**12.61**	**9.40**	**5.86**	**13.29**	**13.16**	**13.55**	**10.63**	**7.33**	**6.12**	**4.82**	**4.25**	**2.30**	**1.77**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1886. **Juli.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	16.8	● 9.2	15.3	15.1	15.0	11.6	7.8	14.9	15.2	15.8	12.9	9.2	8.6	8.0	8.3	5.6	3.0
2	*16.1*	—	15.5	15.3	14.8	11.4	8.0	16.0	15.5	15.8	12.9	9.4	9.5	8.4	8.4	5.8	3.2
3	17.3	—	14.9	15.1	14.6	11.6	8.0	14.9	15.0	15.8	13.1	9.4	9.0	8.4	8.6	5.8	3.2
4	16.2	—	15.5	15.1	14.8	11.8	8.2	15.7	15.4	15.9	13.1	9.4	9.2	8.4	8.7	6.2	3.2
5	*17.1*	—	15.7	15.5	15.2	12.0	8.2	15.2	15.2	15.8	13.2	9.6	9.5	8.8	8.9	6.2	3.4
6	*16.7*	● 5.0	16.3	15.5	15.2	12.0	8.4	15.4	15.2	15.8	13.2	9.8	9.3	8.8	8.8	6.3	3.4
7	14.2	—	16.7	15.7	15.4	12.2	8.4	15.5	15.2	15.8	13.2	10.0	9.8	8.8	8.9	6.3	3.4
8	16.0	● 1.7	14.7	14.9	14.8	12.2	8.4	15.0	14.7	15.2	13.2	10.0	9.2	8.5	8.9	6.5	3.6
9	14.1	● 9.4	12.9	13.9	14.6	12.2	8.5	13.9	13.7	14.7	13.2	10.0	9.0	8.4	8.7	6.5	3.6
10	13.4	—	13.9	13.9	14.4	12.2	8.6	12.9	12.5	14.3	13.0	10.0	9.0	8.4	8.7	6.6	3.8
11	10.7	● 3.1	14.5	13.7	14.0	12.0	8.6	13.9	13.9	14.8	13.0	10.0	8.8	8.1	8.6	6.6	4.0
12	10.2	—	14.7	13.3	13.6	12.0	8.8	13.7	13.5	14.4	12.9	10.0	8.3	8.0	8.5	6.6	4.0
13	13.1	● 9.8	14.5	13.5	13.8	12.0	8.8	13.7	13.5	14.4	12.8	10.2	8.8	8.1	8.5	6.6	4.0
14	16.5	—	13.7	13.1	13.4	11.8	8.8	14.9	14.5	14.8	13.2	10.2	9.4	8.4	8.6	6.7	4.1
15	19.2	● 0.1	14.5	13.3	13.8	11.8	8.9	15.2	14.9	15.2	13.3	10.2	10.0	9.0	9.2	6.7	4.2
16	17.8	● 21.0	14.9	14.5	14.8	12.0	8.9	15.6	15.2	15.4	13.0	10.2	10.8	9.1	9.6	6.8	4.4
17	18.4	● 7.9	15.7	15.7	15.0	12.0	9.0	15.6	15.2	15.8	13.1	10.2	11.6	9.9	10.2	7.1	4.4
18	18.3	● 6.1	16.7	16.3	15.2	12.2	9.0	16.2	15.7	15.8	13.3	10.2	11.7	10.3	10.4	7.2	4.4
19	18.4	▲● 26.4	16.7	16.5	15.4	12.2	9.2	16.7	16.3	16.4	13.5	10.2	12.5	11.1	10.7	7.4	4.4
20	20.3	—	17.5	16.7	15.6	12.4	9.2	16.8	16.6	16.9	13.8	10.2	12.5	11.4	11.1	7.8	4.4
21	19.4	● 7.8	17.5	16.7	16.2	12.8	9.4	16.9	16.7	17.0	13.9	10.2	12.5	11.6	11.3	7.8	4.6
22	15.8	● 1.1	17.7	17.5	16.4	13.0	9.4	16.9	16.7	17.0	14.0	10.2	12.6	11.7	11.4	8.0	4.6
23	19.2	● 2.6	17.7	17.5	16.8	13.4	9.4	17.1	16.5	16.8	14.5	10.0	12.4	11.1	11.4	8.0	4.8
24	19.8	—	18.5	17.7	17.0	13.6	9.6	16.8	16.3	16.4	14.5	10.4	11.8	11.3	11.0	8.2	5.0
25	19.9	—	18.7	18.1	17.2	13.8	9.6	16.4	15.5	16.2	14.7	10.6	11.6	11.1	11.4	8.6	5.3
26	17.7	● 3.3	18.5	17.9	17.2	14.0	9.8	17.0	16.1	16.2	14.5	10.8	12.4	11.5	11.2	8.6	5.5
27	18.5	● 0.3	18.7	17.7	17.4	14.0	9.8	**17.2**	**16.9**	16.2	14.6	11.0	**12.6**	11.7	11.1	8.6	5.4
28	20.8	—	18.9	17.9	17.4	14.2	10.0	15.8	15.3	16.0	14.7	11.0	12.5	**11.8**	11.2	8.4	5.5
29	17.2	● 0.9	**19.1**	**18.1**	**17.6**	14.4	10.0	16.6	15.5	16.4	14.5	11.4	12.4	11.5	11.0	8.8	5.8
30	15.5	● 0.1	18.7	17.7	17.4	14.4	10.2	15.6	15.7	**16.6**	14.7	11.5	12.1	11.6	11.3	8.6	5.8
31	16.8	—	16.7	16.9	17.4	14.4	10.4	15.6	15.7	16.6	**14.7**	11.5	11.6	11.3	11.6	9.0	6.0
Mittel	**16.81**	**115.8**	**16.31**	**15.82**	**15.53**	**12.63**	**9.01**	**15.60**	**15.28**	**15.81**	**13.62**	**10.23**	**10.68**	**9.82**	**9.88**	**7.22**	**4.34**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1886. **Augusti.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	17.2	—	17.7	17.1	17.4	14.4	10.4	15.9	15.7	16.3	14.7	11.3	11.5	11.0	11.5	9.0	5.8
2	17.8	● 4.4	17.1	16.9	17.3	14.4	10.6	15.8	15.5	16.3	14.4	11.4	11.9	11.2	11.4	9.0	6.0
3	16.0	● 20.6	16.7	16.7	17.2	14.4	10.6	15.7	15.3	16.2	14.3	11.4	12.0	11.3	11.5	9.1	6.0
4	16.0	● 5.4	18.1	17.1	16.8	14.4	10.6	15.3	15.3	16.2	14.3	11.4	12.4	11.5	11.6	9.2	6.0
5	16.5	● 0.7	17.5	17.3	16.8	14.4	10.8	15.3	15.3	16.1	14.3	11.4	12.2	11.5	11.6	9.2	6.0
6	15.4	● 11.0	16.7	16.9	16.8	14.4	10.8	15.6	15,7	16.6	14.4	11.5	12.5	11.6	**11.7**	9.3	6.1
7	15.2	● 8.0	17.3	17.1	16.8	14.4	10.8	14.5	15.3	16.1	14.3	11.4	12.5	11.6	11.7	9.3	6.1
8	15.8	● 4.5	16.5	16 7	16.8	14.4	11.0	14.8	15.1	15.8	14.2	11.8	11.8	11.2	11.6	9.2	6.2
9	13.5	● 1.8	16.1	16.9	16.8	14.4	11.0	14.5	14.7	15.9	14.2	12.0	11.2	11.3	11.6	9.2	6.3
10	16.3	● 0.1	15.9	16.7	16.8	14.4	11.0	14.4	14.4	15.5	14.1	12.0	11.2	10.6	11.1	9.2	6.4
11	17.7	—	16.3	16.9	16.8	14.4	11.0	14.6	14.4	15.1	14.0	12.0	11.8	10.6	11.1	9.2	6.4
12	15.8	—	16.5	16.9	16.8	14.4	11.2	14.6	14.4	15.1	14.0	12.0	11.9	10.9	11.2	9.3	6.4
13	14.8	—	16.9	17.1	16.9	**14.5**	11.2	14.7	14.3	15.0	14.0	12.0	12.3	11.3	11.5	9.4	6.4
14	15.3	—	16.7	16.9	16.9	14.4	11.2	14.7	14.3	15.0	14.0	12.0	11.3	10.9	11.3	9.2	6.4
15	14.8	● 5.0	16.9	16.9	16.7	14.4	11.2	14.9	14.6	15.4	13.9	12.0	10.6	10.1	10.8	9.2	6.5
16	16.0	● 0.3	16.5	16.7	16.4	14.4	11.2	15.1	14.6	15.4	13.9	12.0	12.0	10.9	11.2	9.3	6.4
17	15.7	—	16.3	16.7	16.4	14.4	11.4	15.4	15.2	15.7	14.0	12.0	12.3	11.3	11.4	9.4	6.4
18	16.5	—	15.9	16.3	16.4	14.4	11.4	15.0	15.1	15.8	14.0	12.0	11.3	10.9	11.3	9.2	6.6
19	16.2	—	16.7	15.9	16.2	14.4	11.4	15.0	15.1	15.9	14.1	12.0	11.5	11.4	11.6	9.5	6.6
20	16.7	—	16.3	15.7	16.2	14.4	11.4	14.8	14.9	15.8	14.1	12.0	11.5	11.2	11.6	9.3	6.8
21	16.7	—	15.9	15.1	16.2	14.4	11.4	15.0	15.1	15.8	14.1	12.0	11.6	10.9	11.4	**9.8**	6.8
22	15.0	—	15.7	15.3	16.0	14.4	11.4	14.2	14.6	15.7	14.1	12.0	10.9	10.7	11.4	9.3	7.0
23	14.5	—	15.1	15.1	15.8	14.2	11.6	13.6	14.3	16.2	13.9	12.0	10.2	10.1	10.8	9.3	7.0
24	14.1	—	14 7	15.3	15.6	14.2	11.6	13.5	14.4	15.1	13.9	12.0	10.1	10.1	10.6	9.3	7.0
25	15.2	—	13.5	14.9	15.4	14.2	11.8	14.6	14.4	15.2	13.9	12.0	10.2	10.1	10.6	9.3	7.0
26	15.8	—	14.7	15.1	15.4	14.2	11.8	13.4	13.7	14.8	13.7	12.0	10.2	9.9	10.6	9.4	7.0
27	15.6	● 5.0	15.1	15.5	15.4	14.0	11.8	14.4	14.1	14.8	13.6	12.0	10.5	10.5	10.7	9.1	7.0
28	10.4	● 0.6	13.7	14.9	15.4	14.0	11.8	13.0	13.7	14.6	13.6	12.0	9.8	9.9	10.7	9.2	7.0
29	12.0	● 2.5	13.1	14.7	15.2	14.0	11.8	12.3	12.9	14.4	13.5	12.0	9.3	9.4	10.4	9.3	7.0
30	11.1	● 0.6	13.3	14.1	15.0	13.8	11.8	13.2	12.9	14.1	13.4	12.0	9.4	9.4	10.1	9.1	7.0
31	9.2	△ 0.1	12.9	13.9	14.8	13.8	11.8	11.6	12.4	13.5	13.3	12.0	9.4	9.3	10.1	9.1	7.0
Mittel	**15.12**	**70.6**	**15.88**	**16.11**	**16.30**	**14.30**	**11.25**	**14.50**	**14.57**	**15.46**	**14.01**	**11.86**	**11.20**	**10.73**	**11.15**	**9.25**	**6.54**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1886. **September.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	14.5	—	13.3	13.9	14.2	13.4	11.8	11.8	12.0	13.5	13.1	**12.0**	8.8	8.7	9.7	9.0	7.0
2	15.8	● 1.4	12.9	13.7	14.2	13.4	**11.8**	*12.5*	*12.4*	*13.7*	*13.0*	*12.0*	*9.8*	*9.4*	*10.0*	*9.0*	*7.0*
3	11.7	⌓ 0.1	13.3	13.7	14.0	13.2	11.8	13.0	12.9	13.8	12.9	12.0	10.6	9.9	10.4	8.8	7.0
4	14.5	—	12.7	13.5	13.8	13.2	11.8	12.7	12.8	13.9	12.9	12.0	10.1	9.6	10.3	8.8	7.0
5	10.6	—	12.1	13.1	13.4	13.0	11.8	11.9	12.4	13.7	12.8	12.0	9.5	9.4	10.2	8.8	7.0
6	9.9	—	11.3	12.7	13.4	13.0	11.8	11.8	13.4	13.2	13.0	12.0	9.0	9.3	9.8	8.8	7.1
7	12.0	—	10.3	12.5	13.2	13.0	*11.8*	11.5	12.1	13.1	12.6	12.0	8.7	8.6	9.7	8.9	7.0
8	11.8	—	12.3	12.7	13.2	12.8	*11.8*	13.4	12.3	13.1	12.5	12.0	9.9	9.2	9.6	8.8	7.0
9	14.3	● 0.4	13.3	13.5	13.4	12.8	*11.8*	*13 0*	*12.5*	*13.3*	*12.6*	*12.0*	*10.0*	*9.6*	*9.9*	*8.8*	*7.1*
10	14.5	—	12.7	13.3	13.4	12.8	*11.8*	12.3	12.7	13.5	12.6	12.0	10.2	9.9	10.1	8.8	7.2
11	13.3	● 15.2	13.1	13.1	13.6	12.8	*11.8*	12.4	12.7	13.6	12.7	12.0	10.4	9.9	10.2	8.8	7.2
12	13.3	—	13.1	13.1	13.4	12.8	*11.7*	11.9	12.3	13.5	12.6	12.0	10.1	9.8	10.4	8.8	7.2
13	11.3	● 0.1	12.7	13.3	13.6	12.8	*11.7*	12.5	12.4	13.3	12.5	12.0	10.5	9.8	10.3	9.0	7.2
14	14.1	● 11.5	11.7	12.7	13.2	12.6	*11.7*	11.2	11.7	13.1	12.4	12.0	9.2	9.1	10.1	9.0	7.2
15	7.0	⌓ 0.1	10 9	11.5	12.4	12.6	*11.7*	12.1	12.0	13.0	12.4	12.0	8.8	8.5	9.8	8.9	7.3
16	5.6	● 0.4	9.1	10.9	12.4	12.4	*11.6*	10.1	10.7	12.4	12.4	12.0	7.8	8.2	9.7	8.9	7.3
17	7.5	● 3.1	7.9	10.1	11.8	12.4	*11.6*	10.9	9.6	11.4	11.8	12.0	7.8	8.1	9.7	8.9	7.2
18	6.6	● 0.9	7.5	9.7	11.4	12.0	*11.5*	10.9	9.6	11.4	11.8	12.0	7.2	7.5	9.0	8.7	7.4
19	4.2	—	6.7	8.9	10 8	11.8	*11.5*	8.8	9.1	11.0	11.5	12.0	6.6	6.9	8.4	8.5	**7.4**
20	5.2	● 0.7	6.3	8.7	10.4	11.4	*11.4*	7.6	8.4	10.5	11.2	12.0	6.3	7.3	8.3	8.3	7.3
21	3.6	● 4.2	5.9	8.3	10.0	11.0	*11.4*	8.3	8.5	10.1	11.0	12.0	5.2	6.0	7.8	8.3	7.2
22	2.7	● 1.0	5.7	7.7	9.6	11.0	*11.3*	8.2	8.5	10.1	10.9	12.0	5.3	5.7	7.4	8.0	7.1
23	4.2	● 0.2	5.3	7.3	9 2	10.8	*11.2*	7.4	7.8	9.5	11.0	12.0	5.2	5.5	7.0	7.7	7.1
24	3.7	● 0.2	4.7	6.9	9.0	10.4	*11.1*	7.2	7.5	9.2	10.0	11.4	5.0	5.3	6.6	7.5	7.1
25	4.4	—	4.5	7.5	8.8	10.0	*11.0*	7.2	7.5	9.2	10.1	11.2	6.8	4.5	6.5	7.0	7.2
26	3.4	● 0.1	3.7	7.7	8.2	9.8	*11.0*	6.6	7.3	9.0	9.9	11.0	6.8	4.5	6.5	7.0	7.2
27	4.8	● 4.4	4.9	8.1	8.6	9.6	*10.9*	7.0	7.7	9.1	10.1	11.0	5.7	5.7	6.8	7.1	7.0
28	8.4	● 7.2	5.5	8.9	8.8	9.4	*10.8*	7.3	7.5	8.9	9.2	11.1	5.6	5.7	6.8	7.1	7.0
29	5.5	● 1.4	6.5	9.3	8.4	9.2	*10.7*	7.2	7.7	8.9	9.2	11.1	5.8	5.6	6.6	6.9	7.0
30	7.0	—	6.7	9.5	8.4	9.2	*10.5*	7.8	7.7	9.0	9.2	11.0	6.1	5.8	6.6	6.8	6.8
Mittel	8.85	**52.6**	**9.22**	**10.86**	**11.61**	**11.82**	**11.47**	**10.22**	**10.39**	**11.70**	**11.66**	**11.79**	**7.96**	**7.77**	**8.81**	**8.32**	**7.13**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1886. **October.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Rasenplatz auf Geschiebesand.					Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.				
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.														
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.15	0.30	0.5	1.0	2.0
1	6.4	—	6.7	8.9	8.4	9.0	*10.4*	7.8	7.7	9.0	9.2	11.0	6.0	5.8	6.4	6.8	6.8
2	7.4	—	6.1	8.5	8.6	9.0	*10.3*	7.8	7.7	9.0	9.2	11.0	5.9	5.8	6.8	6.9	6.8
3	7.8	● 2.1	5.7	8.1	8.2	9.0	*10.2*	6.8	7.2	7.9	9.1	10.0	6.0	5.7	6.6	6.8	6.8
4	3.1	● 1.8	4.9	7.7	8.0	9.0	*10.1*	4.8	10.5	7.2	8.5	11.0	6.0	5.7	6.6	6.8	7.0
5	3.2	● 0.2	4.7	7.1	7.8	9.0	*10.0*	5.0	9.5	7.4	8.7	10.1	6.0	6.5	6.8	6.6	7.0
6	2.6	—	3.1	6.5	7.6	8.8	*9.8*	4.8	10.5	7.2	8.5	11.0	6.0	5.7	6.6	6.8	6.8
7	0.2	● 0.4	*2.7*	*6.3*	*7.2*	*8.6*	*9.7*	5.0	10.3	7.4	8.7	10.0	6.0	5.8	6.6	6.8	6.8
8	5.2	● 0.2	*2.9*	*5.7*	*7.0*	*8.4*	*9.6*	4.8	8.5	7.8	8.5	10.0	6.0	5.7	6.6	6.8	6.6
9	2.5	● 1.8	3.5	5.5	6.6	8.2	*9.4*	4.9	9.3	7.4	8.7	10.0	5.8	5.5	6.4	6.6	6.6
10	5.5	● 0.4	2.7	5.6	6.4	8.0	*9.3*	5.0	8.3	6.8	7.9	10.2	4.0	4.1	6.0	6.2	6.4
11	6.7	● 1.2	4.5	6.3	6.4	7.8	*9.2*	6.8	7.2	7.9	8.1	10.0	4.7	4.4	5.4	6.1	6.0
12	7.2	● 2.9	4.9	6.7	6.8	7.6	*9.1*	5.6	5.6	7.0	7.7	10.0	4.8	4.3	5.8	6.0	6.4
13	6.7	—	5.5	7.5	7.1	7.6	8.9	5.8	6.3	7.6	7.7	10.0	4.8	3.5	5.4	6.0	6.0
14	7.6	● 1.6	6.1	7.9	7.4	7.6	9.0	5.8	6.3	7.6	7.7	10.0	5.0	3.5	5.4	6.0	6.0
15	7.3	● 2.1	6.3	7.7	7.8	7.7	9.0	6.8	6.5	7.8	7.9	10.0	5.8	5.5	6.2	6.2	6.0
16	6.6	● 3.4	6.7	8.1	7.7	7.8	9.0	7.0	6.7	8.0	7.9	10.0	5.7	5.4	6.1	6.2	6.4
17	4.7	● 6.0	5.5	7.9	7.8	7.8	8.9	6.8	6.7	7.8	7.9	10.0	5.8	5.5	6.3	6.2	6.0
18	4.6	● 2.5	5.1	7.7	7.6	7.8	8.8	6.4	6.4	7.8	8.0	10.0	5.3	5.1	6.2	6.3	6.3
19	3.7	● 3.3	4.7	7.3	7.4	7.8	8.8	6.6	6.3	7.6	8.3	10.0	5.1	5.0	6.1	6.3	6.2
20	3.6	—	4.1	6.7	7.2	7.8	8.8								6.0	6.2	6.3
21	−1.0	—	2.7	5.7	6.4	7.6	8.8								5.9	6.2	6.3
22	−0.3	—	1.5	4.9	6.2	7.4	8.6								5.8	6.2	6.2
23	−1.3	—	0.9	4.3	5.6	7.2	8.6								5.3	6.0	6.0
24	−1.9	—	0.7	3.9	5.0	7.0	8.6								5.6	6.1	6.0
25	1.9	● 0.3	1.3	4.1	4.8	6.8	8.6								5.1	5.9	6.3
26	2.4	△ 0.1	1.5	3.7	4.6	6.4	8.6								4.8	5.6	6.2
27	3.7	—	1.3	3.7	4.4	6.2	8.4								5.0	5.8	6.2
28	1.8	● 0.1	1.5	3.9	4.4	6.0	8.4								4.8	5.5	6.1
29	1.6	● 0.1	1.7	4.3	4.4	6.0	8.2								4.8	5.5	6.2
30	4.8	● 0.2	1.9	4.3	4.6	6.0	8.2								4.6	5.4	6.0
31	3.6	● 2.4	3.3	5.1	4.8	5.8	8.0								4.8	5.3	6.0
Mittel	**3.80**	**33.1**	**3.70**	**6.18**	**6.59**	**7.64**	**9.07**								**5.83**	**6.20**	**6.35**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1886. **November.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem feuchtem Geschiebe.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.										
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	1.2	0.2	1.7	4.7	5.0	5.8	8.0	4.7	5.8	8.2	4.8	5.3	6.0
2	3.3	—	1.7	4.9	5.0	5.8	7.8	4.7	5.8	8.2	4.8	5.3	6.0
3	5.1	● 0.3	2.7	5.1	4.8	5.6	7.8	4.7	5.8	8.2	4.7	5.2	6.0
4	4.2	● 0.4	3.1	5.1	4.8	5.6	7.6	4.8	5.7	8.0	4.6	5.3	5.8
5	5.0	● 3.2	3.5	5.3	5.0	5.6	7.4	5.0	5.7	8.0	4.8	5.2	5.8
6	3.6	—	3.5	5.5	5.0	5.6	7.4	5.2	5.7	7.5	5.0	5.6	5.8
7	4.6	● 2.3	3.7	5.7	5.4	5.6	7.4	5.4	5.7	7.7	5.0	5.2	5.6
8	5.6	● 2.2	3.9	6.1	5.6	5.8	7.2	5.4	5.7	8.0	5.0	5.2	5.6
9	3.2	● 0.2	3.5	5.9	5.6	5.8	7.2	5.5	5.7	7.7	5.0	5.2	5.6
10	3.8	● 3.1	3.9	5.7	5.6	5.8	7.2	5.5	5.1	7.5	5.1	5.2	5.5
11	3.9	● 0.1	3.7	5.9	5.4	5.8	7.0	5.3	5.7	7.4	5.0	5.2	5.5
12	5.0	● 1.2	4.1	5.7	5.4	5.8	7.0	5.2	5.7	7.2	5.0	5.2	5.5
13	5.2	● 5.0	4.3	5.7	5.4	5.8	7.0	5.3	5.7	7.1	5.1	5.2	5.4
14	4.5	● 0.4	4.1	5.9	5.4	5.8	7.0	5.5	5.7	7.1	5.1	5.2	5.4
15	3.8	● 1.5	3.7	5.9	5.5	5.8	7.0	5.5	5.7	7.1	5.1	5.2	5.4
16	3.7	● 0.2	3.5	5.7	5.5	5.8	7.0	5.6	5.8	7.1	5.1	5.2	5.4
17	1.7	● 0.8	3.1	5.3	5.4	5.8	7.0	5.5	5.7	7.0	5.1	5.2	5.4
18	3.0	● 2.9	2.9	4.9	5.2	5.8	7.0	5.2	5.7	7.0	5.2	5.2	5.4
19	1.3	● 0.3	2.5	4.7	5.0	5.6	7.0	5.0	5.7	7.0	4.9	5.1	5.4
20	0.8	—	1.7	4.5	4.8	5.6	7.0	5.0	5.7	7.0	4.8	5.1	5.4
21	1.2	● 5.4	1.3	4.1	4.4	5.5	7.0	5.2	5.9	*7.0*	4.1	4.8	5.4
22	0.1	—	0.7	3.5	4.2	5.4	7.0	5.0	6.1	7.0	4.4	5.1	5.2
23	−1.9	—	−0.1	2.7	3.8	5.2	6.8	4.9	5.6	7.1	4.6	5.0	5.2
24	1.8	● 7.7	0.9	3.3	3.6	5.1	6.8	4.5	5.4	7.0	3.6	5.3	5.2
25	−0.2	✳ 5.4	0.3	2.9	3.4	5.0	6.8	4.2	5.3	7.0	4.2	4.8	5.2
26	−3.2	—	0.1	2.7	3.4	4.8	6.8	3.8	5.1	7.0	3.8	4.6	5.2
27	−0.8	✳ 1.4	−0.1	2.6	3.2	4.6	6.6	4.0	4.6	7.0	3.4	4.4	5.1
28	1.3	✳ 1.4	0.1	2.5	3.0	4.6	6.6	*3.8*	*4.6*	*7.0*	3.4	4.4	5.1
29	3.3	✳ 2.6	0.1	2.5	2.9	4.4	6.4	*3.6*	*4.5*	*7.0*	3.4	4.4	5.1
30	4.0	● ✳ 5.6	0.3	2.5	2.8	4.2	6.4	3.4	4.4	7.0	3.4	4.2	5.1
		53.8											
Mittel	**2.60**	✳ **13.6**	**2.28**	**4.58**	**4.65**	**5.45**	**7.07**	**4.88**	**5.51**	**7.34**	**4.58**	**5.05**	**5.46**

Bodentemperatur 9ʰ a. m. C°

1886. **December.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwald.			Heinäis. 126-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.										
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	3.2	✳ 12.1	0.1	2.3	2.8	4.2	6.3	3.2	4.4	7.0	3.6	4.3	5.1
2	2.0	✳ 3.8	0.7	3.1	3.2	4.0	6.2	3.4	4.4	7.0	3.6	4.3	5.0
3	0.5	✳ 1.8	0.5	2.9	3.2	4.0	6.2	3.4	4.4	7.0	3.6	4.5	5.0
4	0.1	✳ 0.7	0.3	2.7	3.0	4.0	6.1	3.3	4.4	7.0	3.4	4.2	5.0
5	− 1.1	—	0.3	2.7	2.9	3.9	6.0	3.2	4.4	6.4	3.4	4.1	5.2
6	0.3	✳ 5.0	0.3	2.6	2.8	3.8	6.0	3.3	4.3	7.0	3.2	4.2	5.0
7	0.5	✳ 1.2	0.1	2.5	2.6	3.8	6.0	3.3	4.4	6.4	3.2	4.2	5.0
8	0.0	✳ 0.2	0.0	2.3	2.6	3.8	6.0	3.2	4.4	6.4	3.2	4.2	5.0
9	1.2	● 2.4	− 0.1	2.5	2.6	3.6	5.8	3.2	4.4	6.4	3.2	4.0	5.0
10	2.4	—	0.1	2.5	2.6	3.6	5.8	3.1	4.2	6.4	3.1	4.0	5.0
11	2.4	—	0.3	2.5	2.5	3.5	5.7	3.1	4.1	6.4	3.1	3.8	5.0
12	1.9	—	0.7	2.7	2.6	3.4	5.6	3.3	4.0	6.2	3.1	3.8	5.0
13	0.0	✳ 0.4	0.3	2.7	2.6	3.4	5.6	3.1	4.0	6.2	3.0	3.8	5.0
14	1.2	—	0.1	2.5	2.4	3.4	5.5	3.1	4.0	6.1	3.1	3.7	5.0
15	− 1.2	✳ 4.0	− 0.1	2.3	2.4	3.3	5.4	3.0	3.9	6.1	3.0	3.7	4.8
16	0.5	✳ 3.6	− 0.1	2.3	2.4	3.3	5.4	3.0	3.9	6.1	2.8	3.6	4.8
17	0.9	—	− 0.1	2.1	2.2	3.2	5.4	2.8	3.8	6.1	2.7	3.6	4.8
18	− 4.2	—	− 0.1	2.1	2.2	3.2	5.3	2.7	3.7	6.0	2.6	3.5	4.8
19	− 8.2	✳ 0.9	− 0.1	2.1	2.1	3.1	5.2	2.6	3.7	6.0	2.4	3.5	4.8
20	**−15.0**	—	− 0.7	1.9	2.0	3.0	5.2	2.5	3.6	6.0	2.3	3.4	4.8
21	− 6.6	—	− 2.1	1.7	1.9	3.0	5.2	2.5	3.5	6.0	2.0	3.1	4.6
22	− 8.6	—	− 2.3	1.5	1.8	3.0	5.0	2.4	3.3	6.0	2.0	3.1	4.6
23	− 4.5	✳ 2.6	− 2.1	1.5	1.7	2.9	5.0	2.3	3.3	*6.0*	2.0	3.1	4.6
24	− 3.8	✳ 1.4	− 1.3	1.5	1.7	2.8	5.0	2.2	3.3	6.0	2.0	3.0	4.4
25	− 6.3	✳ 0.4	− 1.3	1.5	1.6	2.7	5.0	2.1	3.3	5.9	1.9	3.0	4.4
26	− 3.1	✳ 0.1	− 1.1	1.5	1.6	2.6	4.9	2.1	3.5	5.6	1.9	3.0	4.4
27	− 2.9	✳ 2.1	− 1.0	1.5	1.6	2.6	4.8	2.1	3.4	5.4	1.9	3.0	4.4
28	− 2.3	✳ 1.5	− 0.9	1.5	1.5	2.6	4.8	2.1	3.1	5.2	1.9	3.0	4.4
29	− 8.0	—	− 1.1	1.4	1.4	2.5	4.8	2.1	3.1	5.2	1.9	3.0	4.4
30	−10.8	—	− 1.3	1.3	1.4	2.4	4.8	2.1	3.1	5.2	1.9	2.9	4.2
31	− 8.3	—	− 2.1	1.3	1.4	2.4	4.6	2.0	3.1	5.2	1.8	2.8	4.2
		44.2											
Mittel	**− 2.51**	**✳ 41.8**	**− 0.45**	**2.11**	**2.24**	**3.26**	**5.44**	**2.77**	**3.82**	**6.11**	**2.67**	**3.59**	**4.76**
Jahresmittel	**4.34**	**521.6**	**5.14**	**6.05**	**6.31**	**5.96**	**5.97**				**3.96**	**3.88**	**3.92**

Bodentemperatur 9^h^ a. m. C^0^

1887. **Januar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwald.			127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	– 7.4	⚹ 0.1	– 1.9	1.3	1.4	2.4	4.6	2.2	2.9	5.0	1.7	2.6	4.0	1.7	2.0	4.0
2	– 9.5	⚹ 0.1	– 2.1	1.2	1.4	2.4	4.6	2.0	2.9	*5.0*	1.7	2.9	4.2	1.4	2.4	4.4
3	– 5.9	⚹ 3.9	– 2.1	1.1	1.3	2.3	4.6	2.0	2.9	*4.9*	1.7	2.7	4.1	1.4	2.5	4.4
4	– 3.7	⚹ 0.8	– 1.5	1.1	1.3	2.2	4.6	2.0	2.9	*4.8*	1.7	2.6	4.1	1.4	2.4	4.2
5	– 1.9	⚹ 5.4	– 1.1	1.3	1.3	2.2	4.5	2.0	2.9	*4.8*	1.7	2.6	4.1	1.4	2.4	4.2
6	0.1	⚹ 0.4	– 0.9	1.3	1.2	2.2	4.4	2.0	2.9	*4.7*	1.7	2.6	4.0	1.5	2.6	4.0
7	– 0.6	⚹ 1.2	– 0.5	1.3	1.2	2.2	4.4	1.9	2.7	*4.6*	1.6	2.6	4.1	1.4	2.5	4.2
8	– 2.7	—	– 0.7	1.3	1.2	2.2	4.4	1.9	2.7	*4.6*	1.4	2.4	4.0	1.4	2.4	4.2
9	– 4.0	⚹ 6.6	– 0.7	1.3	1.1	2.2	4.3	1.9	2.7	*4.5*	1.4	2.4	4.0	1.5	2.4	4.2
10	– 4.0	—	– 0.7	1.3	1.0	2.1	4.2	1.9	2.5	*4.4*	1.5	2.5	4.0	1.4	2.4	4.0
11	– 4.0	—	– 0.7	1.3	1.0	2.1	4.2	1.9	2.5	*4.4*	1.5	2.5	3.8	1.4	2.4	4.0
12	– 2.1	⚹ 0.7	– 0.7	1.3	1.2	2.0	4.2	1.9	2.7	*4.3*	1.4	2.4	3.8	1.4	2.4	4.0
13	– 0.2	⚹ 0.4	– 0.7	1.3	1.2	2.0	4.2	1.9	2.7	*4.2*	1.5	2.4	3.8	1.4	2.4	4.1
14	– 1.4	—	– 0.7	1.3	1.2	2.0	4.1	1.8	2.7	*4.2*	1.4	2.4	3.6	1.4	2.4	4.0
15	– 0.3	—	– 0.7	1.3	1.2	2.0	4.1	1.8	2.6	*4.1*	1.4	2.4	3.6	1.4	2.4	3.6
16	– 6.3	—	– 1.1	1.3	1.2	2.0	4.1	1.8	2.6	*4.0*	1.4	2.3	3.4	1.4	2.6	3.6
17	–10.2	—	– 1.7	1.1	1.2	2.0	4.0	1.8	2.5	*4.0*	1.4	2.2	3.4	1.3	2.2	3.6
18	– 8.5	—	– 2.3	1.1	1.2	2.0	4.0	1.7	2.5	*3.9*	1.4	2.2	3.3	1.3	2.2	3.6
19	– 6.8	—	– 1.9	1.1	1.2	2.0	4.0	1.7	2.5	3.8	1.4	2.2	3.4	1.3	2.2	3.7
20	– 3.9	⚹ 7.2	– 1.5	1.1	1.2	1.9	3.9	1.7	2.5	3.8	1.4	2.2	3.6	1.3	2.4	3.6
21	– 0.1	⚹ 0.8	– 1.3	1.1	1.1	1.9	3.9	1.7	2.5	3.8	1.3	2.2	3.6	1.3	2.4	3.8
22	– 3.1	⚹ 6.1	– 0.9	1.1	1.1	1.9	3.9	1.7	2.4	3.6	1.2	2.2	3.4	1.2	2.2	3.6
23	– 4.5	—	– 0.7	1.1	1.1	1.9	3.8	1.6	2.3	3.6	1.2	2.2	3.4	1.1	2.0	3.6
24	– 7.8	—	– 0.9	1.1	1.1	1.8	3.8	1.6	2.4	3.6	1.3	2.0	3.3	1.2	2.2	3.5
25	1.4	—	– 0.8	1.1	1.1	1.8	3.8	1.7	2.4	3.6	1.3	2.0	3.2	1.2	2.3	3.5
26	2.4	—	– 0.7	1.1	1.1	1.8	3.7	1.7	2.3	3.5	1.3	2.0	3.2	1.2	2.2	3.5
27	– 4.6	—	– 0.7	1.1	1.1	1.8	3.7	1.6	2.3	3.6	1.2	2.0	3.2	1.2	2.2	3.6
28	– 3.0	—	– 1.3	1.1	1.1	1.7	3.7	1.6	2.3	3.6	1.2	2.0	3.2	1.2	2.2	3.4
29	2.3	● 1.2	– 1.1	1.1	1.1	1.7	3.6	1.6	2.3	3.6	1.2	2.2	3.2	1.2	2.2	3.4
30	1.5	—	– 0.7	1.1	1.1	1.7	3.6	1.6	2.3	3.5	1.2	1.9	3.2	1.2	2.2	3.4
31	1.6	—	– 0.7	1.1	1.1	1.7	3.6	1.7	2.2	3.5	1.2	1.8	3.2	1.2	2.1	3.5
		3.49														
Mittel	**– 3.14**	⚹ **3.37**	**–1.10**	**1.19**	**1.17**	**2.00**	**4.08**	**1.80**	**2.57**	**4.11**	**1.42**	**2.31**	**3.63**	**1.33**	**2.32**	**3.82**

Bodentemperatur 9ʰ a. m. C°

1887. **Februar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld. 0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwald. 0.5	1.0	2.0	127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe. 0.5	1.0	2.0	Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer. 0.5	1.0	2.0
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
1	2.1	✳ ● 4.0	– 0.5	1.1	1.1	1.6	3.6	1.6	2.2	3.5	1.2	1.9	3.2	1.2	2.1	3.5
2	– 0.8	✳ 0.1	– 0.7	1.1	1.1	1.6	3.6	1.6	2.2	3.5	1.1	1.8	3.0	1.2	2.1	3.5
3	– 1.5	✳ 2.2	– 1.1	1.1	1.0	1.6	3.6	1.6	2.2	3.5	1.2	1.8	3.0	1.2	2.1	3.4
4	2.7	—	– 0.9	1.1	1.0	1.6	3.6	1.6	2.2	3.5	1.1	1.9	3.0	1.2	2.1	3.4
5	– 1.1	✳ 0.5	– 1.1	1.1	1.0	1.6	3.6	1.6	2.2	3.4	1.1	1.9	3.0	1.2	2.1	3.4
6	– 2.0	—	– 1.3	0.7	1.0	1.6	3.5	1.6	2.1	3.4	1.1	1.9	3.0	1.1	2.0	3.4
7	– 6.2	—	– 1.9	0.5	1.0	1.6	3.5	1.7	2.2	3.4	1.1	1.9	3.0	1.1	2.1	3.4
8	– 6.7	—	– 4.1	0.4	1.0	1.6	3.4	1.5	2.2	3.4	1.2	1.9	3.0	1.2	2.1	3.4
9	– 2.1	—	– 2.3	0.3	1.0	1.6	3.4	1.5	2.2	3.4	1.2	1.8	3.0	1.2	2.1	3.4
10	– 1.0	—	– 1.9	0.3	1.0	1.6	3.4	1.5	2.1	3.4	1.1	1.8	2.9	1.2	2.0	3.4
11	– 3.1	—	– 1.3	0.3	1.0	1.6	3.4	1.5	2.1	3.4	1.1	1.8	2.8	1.2	2.0	3.4
12	– 5.8	—	– 4.3	0.1	0.9	1.6	3.4	1.4	2.1	3.4	1.1	1.8	2.8	1.1	2.0	3.3
13	– 1.7	—	– 3.5	0.0	0.9	1.6	3.4	1.5	2.1	3.3	1.1	1.8	2.8	1.0	2.0	3.4
14	– 9.0	—	– 3.3	0.0	0.9	1.5	3.3	1.4	2.1	3.3	1.1	1.7	2.8	1.0	2.0	3.4
15	– 7.0	—	– 3.1	– 0.1	0.8	1.5	3.3	1.4	2.1	3.3	1.0	1.7	2.8	1.0	2.0	3.4
16	– 2.8	—	– 2.3	– 0.1	0.8	1.5	3.3	1.4	2.0	3.3	1.0	1.7	2.8	0.9	1.9	3.2
17	– 3.8	—	– 2.3	– 0.1	0.8	1.5	3.2	1.3	2.0	3.2	1.0	1.7	2.8	0.9	1.9	3.2
18	– 2.0	—	– 2.3	– 0.1	0.7	1.4	3.2	1.3	2.0	3.2	1.0	1.6	2.8	0.8	1.9	3.2
19	– 1.8	✳ 0.2	– 2.3	– 0.1	0.7	1.4	3.2	1.3	1.9	3.2	1.0	1.6	2.8	0.8	1.9	3.2
20	– 2.6	—	– 2.3	– 0.1	0.7	1.4	3.2	1.3	1.9	3.1	0.9	1.6	2.8	0.8	1.8	3.1
21	– 3.2	—	– 2.5	– 0.1	0.7	1.4	3.1	1.3	1.9	3.1	0.9	1.6	2.6	0.8	1.8	3.1
22	– 1.6	✳ 0.1	– 2.1	– 0.1	0.7	1.4	3.1	1.3	1.9	3.1	0.9	1.6	2.6	0.8	1.8	3.0
23	– 0.3	● ✳ 1.4	– 1.7	0.1	0.7	1.4	3.1	1.3	1.9	3.0	0.9	1.6	2.6	0.8	1.8	3.0
24	1.0	● 0.5	– 1.1	0.1	0.6	1.4	3.1	1.3	1.8	3.0	0.9	1.6	2.4	0.8	1.7	3.0
25	2.1	● 3.8	– 1.1	0.3	0.6	1.4	3.0	1.3	1.8	3.0	0.9	1.5	2.4	0.8	1.8	3.0
26	– 2.2	—	– 0.9	0.5	0.6	1.4	3.0	1.3	1.8	3.0	0.8	1.5	2.6	0.9	1.8	3.0
27	2.0	—	– 0.9	0.5	0.6	1.3	3.0	1.3	1.9	2.8	0.9	1.5	2.5	0.9	1.8	3.0
28	4.0	—	– 0.7	0.7	0.6	1.3	3.0	1.3	1.8	3.0	0.8	1.5	2.6	0.9	1.8	3.0
		12.8														
Mittel	**– 1.94**	✳ **5.8**	**– 1.92**	**0.34**	**0.84**	**1.50**	**3.30**	**1.43**	**2.03**	**3.25**	**1.03**	**1.71**	**2.80**	**1.0**	**1.95**	**3.25**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1887. **Mars.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwald.			127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	3.8	✳ 1.2	– 0.5	0.7	0.6	1.3	3.0	1.3	1.8	3.0	0.9	1.5	2.6	0.8	1.7	3.0
2	3.0	✳ 0.6	– 0.5	0.7	0.6	1.3	3.0	1.3	1.8	3.0	0.8	1.5	2.6	0.8	1.7	3.0
3	– 0.1	—	– 0.6	0.9	0.6	1.3	3.0	1.3	1.8	3.0	0.8	1.5	2.6	0.8	1.7	3.0
4	1.6	—	– 0.7	0.9	0.6	1.2	3.0	1.3	1.8	3.0	0.8	1.5	2.5	0.7	1.7	3.0
5	– 0.6	—	– 0.7	0.9	0.6	1.2	3.0	1.3	1.8	3.0	0.8	1.5	2.5	0.8	1.7	3.0
6	– 0.5	—	– 0.7	0.9	0.6	1.2	3.0	1.3	1.8	3.0	0.8	1.5	2.5	0.8	1.7	3.0
7	1.2	▲ 0.2	– 0.7	0.9	0.6	1.2	2.9	1.3	1.7	3.0	0.8	1.5	2.5	0.8	1.7	3.0
8	– 0.6	—	– 0.9	0.9	0.6	1.2	2.9	1.3	1.7	3.0	0.8	1.5	2.5	0.8	1.7	3.0
9	– 1.3	✳ 0.1	– 1.5	0.7	0.6	1.2	2.9	1.2	1.7	2.9	0.8	1.4	2.4	0.7	1.7	2.9
10	– 6.3	✳ 0.2	– 1.9	0.7	0.6	1.2	2.9	1.2	1.5	2.8	0.8	1.5	2.6	0.7	1.7	2.9
11	– 9.8	✳ 3.0	– 2.3	0.5	0.5	1.2	2.8	1.2	1.7	2.9	0.8	1.4	2.4	0.8	1.7	2.9
12	–13.0	—	– 2.9	– 0.1	0.5	1.2	2.8	1.2	1.4	3.0	0.7	1.4	2.0	0.7	1.6	2.8
13	– 9.9	—	– 4.3	– 0.5	0.5	1.2	2.8	1.1	1.6	2.8	0.7	1.4	2.4	0.5	1.6	2.9
14	– 9.3	—	– 4.3	– 0.7	0.4	1.2	2.8	1.1	1.6	2.8	0.7	1.3	2.4	0.0	1.5	2.9
15	– 9.6	—	– 4.7	– 0.7	0.3	1.2	2.8	1.0	1.5	2.8	0.8	1.4	2.4	0.2	1.6	2.8
16	– 6.4	—	– 4.5	– 0.9	0.2	1.1	2.7	*1.0*	*1.5*	*2.7*	*0.7*	*1.4*	*2.4*	*0.1*	*1.5*	*2.8*
17	– 7.5	—	**– 4.9**	– 0.9	0.2	1.1	2.7	1.0	1.6	2.7	0.7	1.3	2.4	0.0	1.5	2.7
18	– 9.9	—	– 4.9	– 1.1	0.1	1.1	2.7	1.0	1.6	2.6	0.7	1.4	2.4	0.0	1.4	2.8
19	– 6.9	—	– 4.5	**– 1.1**	0.0	1.0	2.7	1.1	1.6	2.6	0.7	1.3	2.3	0.0	1.5	2.8
20	– 5.2	—	– 4.3	– 1.1	– 0.2	1.0	2.6	0.9	1.5	2.6	0.7	1.3	2.3	– 0.5	1.4	2.8
21	– 0.1	—	– 2.9	– 0.7	– 0.2	1.0	2.6	0.9	1.5	2.5	0.6	1.1	2.4	– 0.6	1.4	2.6
22	– 1.9	—	– 2.3	– 0.5	**– 0.2**	1.0	2.6	0.8	1.4	2.5	0.5	1.2	2.3	**– 0.6**	1.3	2.8
23	– 2.6	✳ 5.0	– 2.5	– 0.3	– 0.2	1.0	2.6	0.8	1.4	2.6	0.5	1.2	2.2	– 0.3	1.2	2.6
24	– 0.3	✳ 0.3	– 1.7	0.1	0.2	0.9	2.6	0.9	1.5	2.5	0.6	1.1	2.4	– 0.5	1.4	2.6
25	0.6	✳ 0.6	– 1.3	0.3	0.3	0.9	2.6	0.8	1.3	2.6	0.5	1.2	2.2	– 0.2	1.2	2.8
26	0.2	✳ 3.2	– 0.9	0.5	0.3	0.9	2.6	0.8	1.3	2.6	0.5	1.2	2.2	– 0.2	1.2	2.8
27	1.9	—	– 0.7	0.7	0.4	0.9	2.6	0.8	1.3	2.4	0.5	1.2	2.5	0.0	0.9	2.8
28	1.2	—	– 0.7	0.7	0.4	0.9	2.6	0.9	1.3	2.4	0.5	1.2	2.3	0.1	1.1	2.7
29	1.9	—	– 0.6	0.7	0.4	0.8	2.5	0.9	1.3	2.4	0.5	1.2	2.2	0.1	1.1	2.7
30	1.5	—	– 0.6	0.9	0.5	0.8	2.5	0.9	1.3	2.4	0.5	1.1	2.2	0.1	1.1	2.5
31	0.9	—	– 0.5	0.9	0.5	0.8	2.5	0.9	1.3	2.4	0.5	1.1	2.2	0.1	1.1	2.4
		14.4														
Mittel	**– 2.71**	✳ **14.4**	**– 2.10**	**0.70**	**0.35**	**1.08**	**2.75**	**1.06**	**1.55**	**2.73**	**0.68**	**1.33**	**2.38**	**0.24**	**1.46**	**2.82**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1887. **April.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	0.3	* 0.6	−0.5	0.9	0.5	0.8	2.5	0.9	1.3	2.4	0.5	1.1	2.2	0.1	1.1	2.4
2	−0.4	* 0.8	−0.5	0.9	0.5	0.8	2.5	0.8	1.3	2.5	0.3	1.3	2.5	0.4	0.9	2.1
3	0.2	* 1.7	−0.6	0.9	0.5	0.8	2.4	0.8	1.3	2.4	0.3	1.3	2.5	0.4	0.9	2.1
4	0.4	* 1.2	−0.5	0.9	0.5	0.8	2.4	0.8	1.3	2.4	0.5	1.1	2.1	0.2	0.9	2.1
5	0.4	* 0.7	−0.4	0.9	0.6	0.8	2.4	0.9	1.3	2.4	0.5	1.1	2.1	0.2	1.0	2.2
6	1.0	—	−0.4	0.9	0.6	0.8	2.4	0.8	1.3	2.4	0.5	1.1	2.1	0.2	1.0	2.0
7	0.6	—	−0.3	0.9	0.6	0.8	2.4	0.8	1.3	2.4	0.5	1.1	2.1	0.1	1.0	2.0
8	0.8	* 0.4	−0.3	0.9	0.6	0.8	2.4	0.8	1.3	2.4	0.5	1.2	2.0	0.1	1.0	2.2
9	−0.8	—	−0.3	0.9	0.6	0.8	2.4	0.8	1.3	2.4	0.5	1.1	2.0	0.1	1.0	2.2
10	3.5	—	−0.2	0.9	0.6	0.8	2.4	0.8	1.3	2.4	0.5	1.1	2.0	0.1	1.0	2.2
11	4.3	—	−0.2	0.9	0.6	0.8	2.4	0.8	1.3	2.4	0.5	1.1	2.0	0.1	1.0	2.3
12	5.6	—	−0.3	0.9	0.6	0.8	2.3	0.8	1.3	2.4	0.5	1.1	2.0	0.1	1.0	2.3
13	0.1	—	−0.3	0.9	0.6	0.8	2.3	0.8	1.3	2.4	0.5	1.1	2.0	0.3	1.0	2.4
14	−2.4	—	−0.4	1.1	0.6	0.8	2.3	0.8	1.3	2.2	0.5	1.1	2.0	0.3	1.0	2.3
15	−2.1	—	−0.3	1.1	0.6	0.8	2.3	0.8	1.3	2.3	0.5	1.1	2.0	0.3	1.0	2.3
16	−2.0	—	−0.3	1.1	0.6	0.8	2.3	0.9	1.3	2.2	0.6	1.0	2.0	0.3	1.0	2.4
17	0.9	—	−0.3	1.1	0.6	0.8	2.2	0.8	1.2	2.3	0.5	1.0	2.0	0.3	1.0	2.3
18	4.8	—	−0.3	1.2	0.6	0.8	2.2	0.8	1.2	2.3	0.5	1.0	2.0	0.3	1.1	2.3
19	5.0	—	−0.3	1.1	0.6	0.8	2.2	0.9	1.2	2.3	0.5	1.0	2.0	0.3	1.1	2.3
20	0.6	—	−0.2	1.1	0.6	0.8	2.2	0.9	1.2	2.3	0.5	1.0	2.0	0.3	1.1	2.3
21	−3.2	—	−0.2	1.1	0.6	0.8	2.2	0.9	1.2	2.3	0.5	1.0	2.0	0.3	1.1	2.3
22	0.0	—	−0.1	1.1	0.6	0.8	2.2	0.9	1.2	2.3	0.5	1.0	2.0	0.3	1.1	2.3
23	3.3	—	*0.2*	*1.2*	*0.6*	*0.8*	*2.2*	0.8	1.2	2.3	0.5	1.0	2.0	0.3	1.1	2.3
24	6.7	—	*1.1*	*1.2*	*0.6*	*0.8*	*2.1*	*0.8*	*1.2*	*2.2*	*0.4*	*1.0*	*2.0*	*0.3*	*1.1*	*2.3*
25	9.6	● 2.2	1.7	1.3	0.6	0.8	2.1	0.8	1.2	2.2	0.4	1.0	2.0	0.3	1.1	2.2
26	11.9	● 1.5	1.8	1.3	0.6	0.8	2.1	0.8	1.2	2.2	0.5	1.0	1.9	0.3	1.1	2.3
27	13.4	—	1.7	1.5	0.6	0.8	2.1	0.8	1.2	2.2	0.5	1.0	1.9	0.3	1.0	2.3
28	9.2	● 0.2	2.1	1.7	0.6	0.8	2.1	0.8	1.2	2.2	0.5	1.0	1.9	0.3	1.0	2.3
29	6.4	● 0.5	1.9	1.7	0.7	0.8	2.1	0.8	1.2	2.2	0.5	1.0	1.9	0.3	1.0	2.3
30	4.0	● 6.4	1.5	1.3	0.7	0.8	2.1	0.8	1.2	2.2	0.5	1.0	1.9	0.3	1.1	2.3
		16.2														
Mittel	**2.74**	* **5.4**	**0.16**	**1.10**	**0.59**	**0.80**	**2.27**	**0.82**	**1.25**	**2.32**	**0.48**	**1.07**	**2.04**	**0.25**	**1.03**	**2.25**

Bodentemperatur 9^h a, m, C^0

1887. **Mai.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	2.7	● 1.6	1.7	1.7	0.7	0.8	2.1	0.9	1.3	2.1	0.5	1.0	1.8	0.3	1.2	2.2
2	5.1	—	2.1	1.9	0.7	0.8	2.1	0.9	1.2	2.1	0.5	1.0	1.8	0.4	1.0	2.2
3	6.1	—	2.9	2.3	0.7	0.8	2.0	0.9	1.2	2.1	0.5	1.0	1.8	0.4	1.1	2.2
4	8.3	● 1.2	2.7	2.5	0.7	0.8	2.0	0.9	1.2	2.1	0.5	1.0	1.8	0.2	1.1	2.1
5	4.9	● 0.9	3.5	2.5	0.7	0.8	2.0	0.9	1.2	2.1	0.5	1.0	1.8	0.2	1.1	2.1
6	3.4	—	3.1	2.5	0.7	0.8	2.0	0.9	1.2	2.1	0.5	1.0	1.8	0.2	1.1	2.1
7	4.0	—	1.7	2.3	0.7	0.8	2.0	*1.0*	*1.3*	*2.1*	*0.5*	*1.0*	*1.8*	*0.2*	*1.1*	*2.1*
8	4.8	—	1.3	2.3	0.7	0.8	2.0	1.2	1.3	2.0	0.4	1.0	1.8	0.3	1.0	2.2
9	6.8	—	1.7	2.7	0.8	0.8	2.0	1.2	1.3	**2.0**	0.4	1.0	1.8	0.3	1.0	*2.2*
10	6.8	● 0.5	1.9	2.7	0.8	0.8	2.0	1.2	1.3	2.1	0.5	1.0	1.8	0.2	1.1	2.3
11	8.4	—	2.3	2.9	0.9	0.8	2.0	1.1	1.2	2.1	0.5	1.0	1.8	0.4	1.0	2.2
12	8.5	● 0.7	2.5	3.1	0.9	0.8	**2.0**	1.3	1.3	2.2	0.5	1.0	1.8	0.3	1.0	2.2
13	8 4	● 11.0	2.9	3.3	1.0	0.8	2.0	1.3	1.3	2.0	0.5	1.0	1.8	0.5	1.2	2.2
14	6.9	● 0.4	3.5	3.7	1.1	0.8	2.0	2.0	1.4	2.1	0.5	0.9	1.6	0.4	1.3	2.2
15	10.0	—	2.9	3.5	1.2	0.9	2.0	3.1	1.7	2.1	0.4	1.0	1.8	0.7	1.3	2.2
16	12.0	—	3.9	3.7	1.6	1.0	2.0	4.0	2.2	2.1	0.6	0.9	1.8	0.5	1.6	2.2
17	11.5	—	5.1	4.9	2.4	1.2	2.0	4.2	2.4	2.1	0.6	1.0	1.8	0.7	1.8	2.2
18	13.6	● 1.1	6.5	6.5	3.2	1.5	2.0	4.0	2.4	2.0	0.5	1.0	1.7	2.3	2.0	2.3
19	11.5	● 1.3	8.1	8.1	5.2	2.0	2.0	4.2	2.4	2.2	0.4	1.0	1.6	2.3	2.1	2.4
20	12.0	● 0.1	8.9	8.7	5.6	2.6	2.0	4.2	2.9	2.4	0.5	1.0	1.8	2.7	2.6	2.5
21	17.6	—	10.1	9.9	6.4	3.0	2.2	4.2	2.9	2.4	0.5	1.0	1.8	3.7	2.6	2.5
22	18.3	—	11.1	11.3	8.4	3.4	2.3	4.2	3.3	2.4	0.6	1.0	**1.7**	4.9	2.7	2.5
23	11.0	● 1.2	10.7	11.5	8.4	3.8	2.4	7.2	3.9	2.5	0.5	1.0	1.8	5.6	2.9	2.6
24	11.8	● 1.6	11.5	11.5	8.8	4.0	2.6	7.1	4.3	2.6	0.5	1.0	1.8	5.5	3.1	2.6
25	11.7	—	11.7	10.7	9.2	4.4	2.6	7.1	4.3	2.8	0.5	1.0	1.9	5.5	3.3	2.8
26	16.9	—	12.7	11.7	9.6	4.8	2.8	7.2	4.3	2.8	0.5	*1.1*	1.8	5.7	3.6	3.0
27	12.1	● 13.0	11.1	10.9	9.4	5.0	3.0	8.1	5.1	3.0	0.7	*1.1*	1.8	6.5	3.8	3.0
28	12.9	—	9.9	10.3	9.4	5.2	3.2	8.0	5.3	3.2	0.9	*1.2*	1.8	6.4	4.0	3.2
29	8.5	—	*9.7*	*10.2*	*9.5*	*5.6*	*3.4*	7.8	5.2	3.4	1.0	*1.2*	1.8	6.4	4.3	3.4
30	7.9	—	*9.3*	*10.0*	*9.5*	*6.2*	*3.6*	8.0	5.3	3.4	1.3	*1.2*	1.8	6.0	4.2	3.3
31	9.6	—	8.7	10.3	9.6	6.8	3.8	7.8	5.6	3.4	1.8	*1.3*	1.8	6.1	4.2	3.4
Mittel	**9.48**	**34.6**	**5.99**	**6.13**	**4.15**	**2.34**	**2.36**	**3.81**	**2.61**	**2.39**	**0.60**	**1.03**	**1.78**	**2.45**	**2.11**	**2.47**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1887. **Juni.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	12.7	—	9.7	10.7	9.6	6.8	3.9	7.7	5.5	3.4	1.4	1.3	1.8	6.0	4.2	3.3
2	14.2	—	10.5	11.3	9.8	6.9	4.0	7.8	5.6	3.4	1.8	1.5	1.8	6.1	4.2	3.4
3	14.2	—	10.9	11.7	10.0	7.0	4.2	7.9	5.7	3.5	2.3	1.6	1.8	6.2	4.2	3.4
4	16.0	—	11.3	12.1	10.4	7.2	4.3	8.1	5.7	3.6	2.8	1.9	1.8	6.5	4.3	3.5
5	16.5	—	11.9	12.7	10.8	7.4	4.4	8.4	5.9	3.8	3.3	2.1	2.0	6.7	4.4	3.5
6	17.7	—	12.1	12.5	10.8	7.6	4.4	8.7	6.1	3.8	3.7	2.3	2.0	7.1	4.5	3.5
7	15.2	● 0.8	11.7	12.3	10.8	7.8	4.6	9.0	6 2	4.0	4.1	2.5	2.0	7.4	4.6	3.6
8	15.0	● 4.1	11.3	12.1	10.8	8.0	4.8	9.2	6.4	4.0	4.5	2.8	2.0	7.5	4.8	3.7
9	14.4	● 5.2	10.7	11.9	10.8	8.2	5.0	9.3	6.6	4.1	4.7	3.0	2.1	7.7	4.9	3.8
10	8.6	● 25.5	9.7	11.7	10.8	8.3	5.1	9.3	6.7	4.2	4.8	3.1	2.2	7.6	5.0	3.9
11	6.7	● 7.4	9.1	11.5	10.8	8.4	5.2	9.2	6.7	4.2	4.9	3.4	2.3	7.4	5.1	3.9
12	9.3	—	9.1	10.9	10.2	8.5	5.3	9.1	5.9	4.4	5.0	3.6	2.4	7.3	5.2	4.0
13	12.1	—	9.7	11.1	10.4	8.5	5.4	9.1	7.0	4.5	5.1	3.7	2.4	7.3	5.2	4.0
14	12 0	● 1.4	10.9	11.7	10.8	8.5	5.6	9.3	7.0	4.6	5.1	3.8	2.4	7.3	5.3	4.1
15	12.9	● 0.2	11.1	12.5	11.0	8.5	5.7	9.4	7.0	4.6	5.3	3.9	2.5	7.4	5.3	4.2
16	12.9	—	11.7	12.7	11.2	8.5	5.8	9.5	7.1	4.6	5.5	4.0	2.4	7.4	5.4	4.3
17	14.5	—	12.3	13.1	11.4	8.6	5.9	9.7	7.1	4.8	5.6	4.1	2.4	7.7	5.4	4.4
18	15.1	—	12.7	13.7	11.6	8.8	6.0	9.8	7.3	4.8	5.8	4.2	3.0	7.9	5.6	4.4
19	16.7	● 0.3	12.9	14.1	12.0	9.0	6.0	10.0	7.3	4.9	5.9	4.3	2.9	8.1	5.5	4.4
20	14.1	—	13.1	14.3	12.4	9.2	6.1	10.2	7.5	5.0	6.2	4.4	3.0	8.4	5.4	4.4
21	14.5	—	13.1	14.5	12.6	9.4	6.2	10.4	7.7	5.1	6.4	4.5	3.0	8.6	5.6	4.5
22	15.1	—	13.3	14.7	13.0	9.6	6.2	11.0	7.9	5.2	6.8	4.8	3.0	9.0	6.0	4.8
23	15.0	—	12.9	14.5	13.1	9.6	6.4	10.8	7.9	5.0	6.1	4.6	3.0	8.9	5.9	4.6
24	13.5	—	*12.5*	*14.3*	*13.0*	*9.7*	*6.4*	11.0	8.0	5.3	6.1	4.9	3.0	8.9	6.0	4.7
25	11.3	● 6.4	*12.3*	*13.9*	*13.0*	*9.8*	*6.5*	11.1	8.2	5.3	6.8	5.1	3.4	9.0	6.1	4.8
26	10.3	●▲ 2.5	*11.9*	*13.7*	*12.8*	*9.9*	*6.6*	11.0	8.4	5.4	6.9	5.3	3.5	8.7	6.3	5.0
27	11.4	—	*11.7*	*13.7*	*12.8*	*10.0*	*6.7*	11.0	8.4	5.5	6.9	5.3	3.5	8.7	6.3	5.0
28	14.5	● 1.4	12.4	14.3	12.5	10.1	6.8	11.0	8.5	5.6	6.9	5.4	3.4	8.7	6.4	5.0
29	12.6	● 3.6	12.6	14.5	12.8	10.2	7.0	11.0	8.6	5.9	7.2	5.5	3.7	8.9	6.4	5.1
30	14.7	—	12.5	14.3	12.7	10.2	7.0	11.2	8.6	5.8	7.2	5.7	3.8	9.1	6.4	5.1
Mittel	**13.43**	**58.8**	**11.59**	**12.90**	**11.49**	**8.67**	**5.58**	**9.67**	**7.08**	**4.61**	**5.17**	**3.75**	**2.62**	**7.78**	**5.33**	**4.21**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1887. **Juli.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	17.4	● 0.6	12.7	14.3	12.8	10.3	7.1	11.2	8.7	5.9	7.4	5.4	3.8	9.2	6.5	5.1
2	19.7	—	12.5	13.7	12.8	10.4	7.2	11.3	8.8	5.9	7.8	5.9	3.9	9.3	6.6	5.2
3	12.5	● 0.2	12.3	12.9	12.8	10.4	7.2	11.3	8.8	5.9	7.9	5.9	3.9	9.3	6.7	5.3
4	14.1	—	11.7	12.7	12.8	10.4	7.3	11.7	9.0	6.1	7.8	6.0	3.8	9.6	6.7	5.4
5	16.3	● 12.6	10.9	11.5	12.5	10.5	7.3	11.9	9.0	6.0	8.0	6.0	3.8	9.8	6.8	5.4
6	12.0		9.7	9.9	12.6	10.5	7.4	11.4	9.2	6.4	7.8	6.3	4.0	9.2	7.0	5.4
7	9.2	—	7.7	8.7	12.4	10.6	7.4	11.6	8.9	6.4	8.2	6.2	4.0	9.0	6.9	5.6
8	10.6	● 0.1	9.7	9.9	12.2	10.6	7.6	11.9	9.2	6.4	8.0	6.2	4.0	9.5	7.0	5.4
9	13.1	—	10.5	11.7	12.4	10.7	7.6	11.4	9.3	6.4	7.9	6.4	4.0	9.3	7.1	5.4
10	13.7	—	11.1	13.9	12.6	10.8	7.8	11.4	9.3	6.4	7.8	6.3	4.2	9.1	7.0	5.6
11	15.5	—	11.7	14.1	12.8	10.8	7.8	11.2	9.4	6.4	7.7	6.3	4.2	9.3	7.0	5.4
12	14.0	—	12.5	14.7	13.2	10.8	7.9	11.2	9.2	6.4	7.7	6.2	4.3	9.1	7.0	5.4
13	17.5	—	13.1	15.5	13.4	10.9	7.9	11.2	9.2	6.4	7.7	6.3	4.3	9.4	7.1	5.6
14	18.2	—	16.9	16.1	13.8	11.0	8.0	11.4	9.2	6.4	8.2	6.3	4.3	9.5	7.2	5.6
15	20.9	—	13.7	16.5	14.0	11.0	8.0	11.4	9.3	6.4	8.2	6.4	4.1	9.9	7.1	5.8
16	21.2	—	14.5	16.7	14.2	11.2	8.0	11.6	9.8	6.6	8.1	6.3	4.3	9.3	7.0	5.8
17	**22.5**	—	14.9	17.3	14.8	11.4	8.1	12.2	9.5	6.6	8.6	6.4	4.4	10.5	7.3	5.8
18	20.7	● 1.6	15.3	17.5	15.4	11.6	8.2	12.4	9.6	6.8	9.0	6.7	4.4	11.4	7.5	5.8
19	18.1	—	15.7	17.7	15.6	11.8	8.2	13.4	10.0	7.0	9.8	7.1	5.0	11.8	7.9	6.0
20	17.1	● 2.5	15.9	17.5	15.6	11.8	8.2	14.1	10.3	7.1	9.8	6.4	5.0	11.5	8.1	6.1
21	13.3	● 15.4	15.5	16.7	15.6	11.8	8.4	14.2	10.4	7.1	9.6	6.8	5.0	11.4	8.2	6.1
22	13.5	—	15.3	16.7	15.8	12.0	8.4	14.2	10.4	7.1	9.5	7.5	5.0	11.2	8.2	6.1
23	15.8	—	15.3	16.9	15.8	12.0	8.6	13.0	10.3	7.2	9.6	7.5	5.0	11.2	8.2	6.4
24	17.3	—	15.1	17.3	15.8	12.2	8.6	13.2	10.3	7.2	9.7	7.6	5.0	11.2	8.2	6.4
25	17.1	—	14.9	17.5	16.0	12.2	8.6	13.2	10.3	7.2	9.7	7.6	5.0	11.2	8.2	6.4
26	17.0	—	14.7	16.7	16.0	12.4	8.8	13.2	10.4	7.2	9.7	7.6	5.0	11.2	8.2	6.4
27	16.7	—	15.3	17.3	16.0	12.4	8.8	13.2	10.5	7.2	9.7	7.6	5.0	11.2	8.2	6.4
28	20.8	● 1.0	15.5	17.7	16.2	12.6	8.8	13.4	10.7	7.4	10.0	7.8	5.2	11.7	8.4	6.4
29	18.8	—	16.7	18.1	16.2	12.6	9.0	13.4	10.7	7.4	10.1	7.8	5.2	11.7	8.4	6.4
30	20.4	—	17.5	18.3	1.62	12.8	9.0	13.4	10.7	7.5	10.2	7.8	5.3	11.8	8.5	6.4
31	20.0	—	**17.7**	**18.5**	**16.4**	12.8	9.2	13.4	10.8	7.6	10.2	7.9	5.3	11.9	8.5	6.4
Mittel	**16.61**	**34.0**	**13.76**	**15.31**	**14.35**	**11.40**	8.08	**12.35**	**9.72**	**6.71**	8.75	**6.73**	**4.51**	**10.35**	**7.51**	**5.84**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1887. **Augusti.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala m.m.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	21.7	● 0.8	17.5	17.7	16.4	12.8	9.2	13.4	10.8	7.6	10.3	7.9	5.4	12.0	8.6	6.4
2	15.3	—	16.9	17.5	16.2	12.9	9.4	13.8	10.9	7.8	10.4	8.1	5.4	**12.2**	8.7	6.5
3	14.5	—	15.7	17.7	16.0	13.0	9.4	**13.8**	11.0	7.8	**10.5**	8.2	5.4	12.2	8.8	6.7
4	12.5	—	14.9	17.1	15.8	13.0	9.5	13.6	11.1	7.8	10.3	8.4	5.5	11.8	8.8	6.8
5	11.1	—	13.9	16.7	15.6	13.0	9.6	13.1	**11.1**	7.8	10.1	**8.5**	5.6	11.4	8.8	6.8
6	12.9	—	13.7	15.7	15.4	13.1	9.6	13.0	11.0	7.9	10.0	8.4	5.7	11.1	8.8	6.8
7	15.4	—	13.9	16.5	15.3	13.2	9.7	12.5	10.9	8.0	9.6	8.2	5.8	10.8	8.8	6.8
8	16.0	—	14.3	16.5	15.3	**13.2**	9.8	12.4	10.8	8.0	9.5	8.2	5.8	10.7	8.7	7.0
9	13.5	● 14.7	14.5	16.3	15.2	13.2	9.8	12.3	10.8	8.0	9.5	8.1	5.8	10.7	8.7	7.0
10	13.4	● 8.5	14.1	16.5	15.1	13.0	9.8	12.4	10.7	8.0	9.6	8.1	5.8	10.8	8.6	7.0
11	13.2	● 1.4	14.3	16.1	15.0	13.0	9.9	12.5	10.8	8.1	9.6	8.1	5.8	10.9	8.6	7.0
12	13.7	● 6.0	14.6	16.6	15.0	13.0	9.9	12.6	10.8	8.2	9.8	8.1	5.9	11.1	8.7	7.0
13	13.0	—	14.1	16.1	14.8	13.0	10.0	12.8	10.7	8.2	9.8	8.2	5.8	11.1	8.7	7.0
14	13.1	● 3.8	13.9	16.3	14.8	12.9	10.0	12.5	10.8	8.2	9.7	8.2	6.0	11.0	8.7	7.0
15	12.4	● 8.5	*13.7*	*16.1*	*14.6*	*12.9*	*10.0*	12.6	10.7	8.2	9.8	8.2	6.0	11.1	8.8	7.2
16	12.6	● 7.5	*13.1*	*15.9*	*14.6*	*12.9*	*10.1*	12.6	10.7	8.2	9.7	8.2	6.0	11.0	8.8	7.1
17	11.7	● 4.1	12.9	15.7	14.4	12.8	10.1	12.5	10.8	8.2	9.7	8.3	6.0	11.0	8.8	7.2
18	12.1	—	13.1	15.3	14.4	12.8	10.1	12.4	10.7	8.3	9.6	8.2	6.1	10.9	8.8	7.3
19	12.9	● 1.2	13.5	15.5	14.4	12.8	10.1	12.4	10.7	8.3	9.6	8.2	6.2	10.7	8.8	7.2
20	14.0	—	12.9	15.3	14.4	12.7	10.2	12.4	10.7	8.3	9.7	8.3	6.2	10.7	8.8	7.2
21	13.1	—	13.1	15.5	14.4	12.7	10.2	12.4	10.7	8.4	9.8	8.2	6.2	10.9	8.8	7.4
22	12.2	—	*13.1*	*15.1*	*14.2*	*12.6*	*10.2*	12.4	10.9	8.5	9.7	8.3	6.2	11.0	8.8	7.4
23	14.7	● 0.3	*12.9*	*14.7*	*14.0*	*12.6*	*10.2*	12.2	10.7	8.4	9.6	8.3	6.1	10.8	8.8	7.3
24	12.3	● 3.3	*13.3*	*14.9*	*13.8*	*12.5*	*10.2*	12.2	10.7	8.4	9.6	8.2	6.2	10.7	8.8	7.1
25	10.7	—	*12.5*	*14.3*	*13.6*	*12.4*	*10.2*	12.1	10.7	8.4	9.6	8.2	6.2	10.7	8.8	7.2
26	10.4	—	*11.3*	*13.9*	*13.4*	*12.4*	*10.3*	11.4	10.4	8.4	9.3	8.1	6.4	10.3	8.6	7.2
27	10.3	—	10.5	13.5	13.2	12.3	10.3	11.2	10.5	8.6	9.4	8.2	6.4	10.3	8.6	7.3
28	13.7	—	10.3	13.5	13.0	12.3	10.3	11.5	10.3	8.4	9.5	8.1	6.4	10.3	8.6	7.4
29	17.4	—	10.7	13.7	13.2	12.4	10.3	11.7	10.3	8.4	9.5	8.1	6.4	10.6	8.6	7.4
30	16.8	—	10.7	13.7	13.2	12.4	10.3	11.7	10.4	8.4	9.3	8.1	6.4	10.5	8.8	7.4
31	14.1	● 1.5	11.1	13.9	13.4	12.4	10.3	11.7	10.3	8.4	9.3	8.1	6.4	10.6	8.8	7.4
Mittel	**13.57**	**61.6**	**13.39**	**15.60**	**14.58**	**12.78**	**9.97**	**12.45**	**10.72**	**8.18**	**9.72**	**8.19**	**5.98**	**10.96**	**8.74**	**7.08**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1887. **September.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	16.1	● 0.3	11.9	14.7	13.6	12.4	10.3	12.0	10.3	8.6	9.8	8.2	6.4	10.3	9.0	7.2
2	14.8	—	12.3	15.1	13.8	12.4	10.3	12.0	10.3	8.6	10.0	8.0	6.4	10.3	9.0	7.2
3	14.3	● 0.5	12.5	15.5	14.0	12.4	10.3	12.2	10.3	8.6	9.8	8.1	6.5	10.3	9.1	7.2
4	14.3	● 8.8	12.9	15.5	14.2	12.4	10.3	12.0	10.5	8.6	10.2	8.4	6.5	10.5	9.3	7.2
5	14.3	● 11.4	12.5	14.9	13.8	12.4	10.3	12.2	10.5	8.6	10.2	8.4	6.5	10.5	**9.4**	7.4
6	12.9	● 7.4	11.9	14.7	13.6	12.3	10.3	12.0	10.7	8.6	10.2	8.6	6.4	11.1	9.0	7.6
7	13.3	● 5.5	11.7	14.1	13.4	12.3	10.4	12.0	10.7	8.6	10.2	8.6	6.4	11.1	9.0	7.6
8	9.9	● 5.7	11.5	13.7	13.2	12.3	10.4	12.2	10.7	8.8	9.8	8.2	6.4	11.1	9.0	7.6
9	12.3	● 0.2	10.7	13.5	13.0	12.2	10.4	12.2	10.5	8.8	9.8	8.2	6.4	11.1	9.0	7.6
10	10.6	—	10.5	13.1	12.8	12.2	10.4	11.6	10.3	8.6	9.8	8.2	6.4	11.1	9.0	7.6
11	11.0	● 0.2	9.9	12.9	12.6	12.1	10.4	*11.2*	10.3	8.5	9.8	8.3	6.5	11.1	9.0	7.6
12	10.4	● 3.6	10.3	13.1	12.5	12.0	10.4	11.1	10.3	8.6	9.4	8.5	6.6	10.1	8.8	7.8
13	11.6	● 0.3	10.5	12.9	12.4	12.0	10.4	11.0	10.3	8.6	9.4	8.4	6.6	10.1	8.8	7.4
14	13.1	—	10.7	13.5	12.4	11.8	10.4	11.0	10.3	8.6	9.4	8.4	6.6	10.1	8.8	7.2
15	12.2	—	11.1	13.9	12.4	11.6	**10.4**	11.0	10.3	8.6	9.6	8.4	6.6	10.4	8.8	7.3
16	12.9	● 2.4	11.3	13.9	12.4	11.6	10.4	11.4	10.3	8.5	9.8	8.4	7.0	10.5	8.8	7.6
17	11.8	△ 0.3	11.5	13.8	12.4	11.6	10.4	11.4	10.3	8.6	9.4	8.4	**7.0**	10.5	9.0	7.8
18	12.1	● 2.3	11.3	13.7	12.5	11.6	10.4	11.4	10.3	8.6	9.5	8.4	6.9	10.4	9.0	7.8
19	10.4	● 3.5	10.9	13.7	12.4	11.6	10.4	11.2	10.2	8.6	9.6	8.5	6.8	10.3	9.1	7.8
20	7.4	● 1.8	10.7	13.3	12.0	11.6	10.4	11.1	10.3	8.6	9.5	8.5	6.6	10.3	9.0	7.8
21	4.2	—	10.3	12.9	12.0	11.6	10.4	11.2	10.3	**8.8**	9.6	8.5	6.8	10.3	8.9	7.8
22	9.2	—	9.7	12.7	11.6	11.6	10.4	10.5	10.1	8.6	9.0	8.4	7.0	9.4	8.8	8.0
23	6.8	● 8.2	9.1	12.5	11.4	11.6	10.4	10.6	9.7	8.8	9.0	8.4	6.8	9.4	8.8	**8.0**
24	10.5	● 9.7	7.9	11.7	11.2	11.6	10.3	10.6	9.7	8.5	8.8	8.5	6.8	9.4	8.8	8.0
25	7.4	● 0.1	7.1	10.3	10.4	10.6	10.2	10.2	9.7	8.6	8.5	8.2	6.9	8.7	8.6	7.8
26	7.9	● 0.7	7.3	10.1	10.2	10.4	10.2	9.5	9.3	8.6	8.5	7.8	6.8	8.5	8.1	7.8
27	9.2	● 0.1	7.1	10.5	10.2	10.4	10.1	9.6	9.5	8.7	8.4	8.0	**7.0**	8.5	8.2	7.8
28	8.2	● 0.1	7.5	10.7	10.0	10.2	10.1	9.5	9.3	8.4	8.1	7.9	6.8	8.6	7.9	7.8
29	7.7	● 0.7	7.3	10.3	9.8	10.0	10.0	9.8	9.3	8.5	8.2	7.8	7.0	8,5	8.1	7.8
30	7.2	—	6.9	10.1	9.4	9.8	9.9	9.5	9.3	8.4	8.1	7.9	6.8	8.6	8.1	7.8
Mittel	**10.80**	**73.8**	**10.23**	**13.04**	**12.19**	**11.62**	**10.31**	**11.11**	**10.13**	**8.27**	**9.38**	**8.28**	**6.67**	**10.04**	**8.81**	**7.63**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1887. **October.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	3.8	—	6.7	9.7	9.0	9.6	9.8	9.6	9.3	8.6	8.2	7.9	6.8	8.6	8.0	7.7
2	3.4	● 2.0	6.3	10.1	9.0	9.4	9.8	8.6	9.1	8.5	7.6	7.6	6.8	7.7	7.8	7.6
3	1.6	✳ 2.3	5.7	8.9	8.8	9.0	9.6	8.4	9.0	8.4	7.2	7.5	6.8	7.2	7.8	7.6
4	1.4	✳ 3.4	4.9	8.1	8.6	8.8	9.6	8.4	9.0	8.4	6.8	7.4	6.8	7.2	7.8	7.6
5	3.7	● 0.1	5.1	7.7	8.3	8.6	9.6	8.4	9.0	8.4	6.8	7.4	6.8	7.2	7.8	7.6
6	6.2	● 4.3	4.9	7.5	7.9	8.6	9.7	7.9	8.6	8.4	6.6	7.2	6.8	6.6	7.4	7.6
7	2.5	—	3.7	7.3	7.7	8.4	9.6	7.9	8.6	8.4	6.7	7.1	6.8	6.6	7.4	7.6
8	− 0.1	—	2.7	6.9	7.4	8.4	9.6	7.7	8.4	8.2	6.5	7.0	6.8	6.5	7.2	7.4
9	− 2.3	—	1.7	5.9	6.8	8.1	9.4	7.2	8.2	8.0	6.2	6.9	6.5	6.1	7.0	7.4
10	− 2.9	—	1.1	5.5	6.2	8.0	9.3	6.4	7.9	8.0	6.0	6.8	6.4	5.9	6.8	7.4
11	0.0	✳ 2.6	0.9	5.1	5.6	7.8	9.2	6.2	7.9	8.0	5.5	6.6	6.4	5.3	6.8	7.4
12	0.4	✳ 4.4	0.7	4.5	5.2	7.6	9.2	5.8	7.7	8.0	5.2	6.4	6.4	5.0	6.6	7.2
13	1.8	●✳ 10.4	0.5	4.1	4.8	7.4	9.0	5.6	7.3	7.8	5.0	6.2	6.4	4.7	6.4	7.2
14	0.5	✳ 4.3	0.5	4.1	4.6	7.0	9.0	5.4	7.1	7.8	4.8	6.0	6.4	4.7	6.5	6.8
15	0.4	✳ 0.2	0.4	3.9	4.4	6.6	8.9	5.4	7.1	7.8	4.8	6.0	6.4	4.7	6.5	6.8
16	2.0	—	0.5	3.9	4.2	6.4	8.8	5.4	7.1	7.8	4.8	6.0	6.4	4.7	6.5	6.8
17	1.6	● 0.4	0.5	3.7	4.2	6.3	8.6	5.2	6.7	7.8	4.6	5.4	6.4	4.2	5.9	6.9
18	3.7	● 0.4	0.5	3.7	4.2	6.2	8.6	5.2	6.6	7.6	4.4	5.6	6.2	3.9	5.8	6.8
19	3.5	—	0.9	3.9	4.2	6.0	8.4	4.8	6.3	7.4	4.2	5.4	6.1	3.9	5.5	6.8
20	5.5	● 4.5	1.1	4.1	4.0	6.0	8.4	5.0	6.3	7.4	4.3	5.4	6.0	3.9	5.4	6.6
21	0.9	—	0.5	3.9	4.0	5.8	8.2	4.8	6.1	7.4	4.4	5.3	5.8	3.7	5.3	6.6
22	− 0.6	—	0.3	3.8	4.0	5.7	8.0	4.7	6.1	7.2	4.4	5.2	5.8	3.7	5.2	6.6
23	4.0	● 3.3	0.3	3.7	4.0	5.6	7.8	4.5	5.9	7.0	4.2	5.2	5.8	3.7	5.1	6.4
24	0.9	—	0.3	3.7	4.0	5.6	7.8	4.6	5.8	7.0	4.1	5.1	5.8	3.6	5.1	6.4
25	− 2.5	—	0.1	3.5	4.0	5.6	7.7	4.2	5.7	6.8	4.0	5.0	5.8	3.5	5.0	6.4
26	− 1.3	—	− 0.1	3.1	4.0	5.6	7.6	4.0	5.7	6.8	3.8	5.0	5.6	3.3	4.8	6.2
27	5.4	● 0.1	0.7	2.9	3.8	5.2	7.6	3.8	5.5	6.8	3.7	4.7	5.6	3.3	4.8	6.2
28	5.7	—	1.5	3.7	3.8	5.0	7.4	3.7	5.3	6.6	3.6	4.8	5.5	3.3	4.8	6.0
29	5.6	—	2.1	3.9	3.8	4.8	7.4	3.7	5.3	6.7	4.0	4.8	5.6	3.4	4.8	6.0
30	4.7	● 1.6	2.7	4.7	3.8	4.6	7.2	3.8	5.1	6.5	4.0	4.7	5.4	3.1	4.6	6.0
31	5.5	● 12.6	3.3	5.5	4.6	4.8	7.0	4.1	5.1	6.5	4.2	4.7	5.4	3.5	4.6	6.0
		56.5														
Mittel	**2.10**	**✳ 22.6**	**1.97**	**5.19**	**5.45**	**6.85**	**8.64**	**5.82**	**7.06**	**7.61**	**5.18**	**6.01**	**6.21**	**4.93**	**6.16**	**6.89**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1887. **November.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	4.9	● 3.9	3.3	5.5	4.6	4.8	7.0	4.6	5.2	6.4	4.4	4.8	5.4	3.1	4.9	6.2
2	3.1	● 0.1	3.7	5.7	4.8	5.0	7.0	4.0	4.9	6.4	4.2	4.8	5.4	3.3	4.8	6.2
3	6.0	● 0.2	4.1	5.9	5.0	5.0	6.9	4.0	4.9	6.4	4.6	4.8	5.4	3.1	4.8	6.2
4	7.3	● 0.3	4.5	6.3	5.2	5.1	6.9	4.8	5.1	6.2	4.5	4.8	5.4	3.2	4.9	6.0
5	6.3	● 0.2	4.7	6.7	5.4	5.2	6.8	5.0	5.2	6.2	4.7	4.8	5.2	4.5	4.6	5.8
6	5.5	● 1.4	4.9	6.9	5.6	5.2	6.8	5.3	5.1	6.0	4.8	4.8	5.2	4.9	4.7	5.6
7	4.7	—	4.7	6.7	5.6	5.4	6.8	5.5	5.3	6.0	5.1	5.0	5.2	5.1	4.8	5.6
8	− 2.1	—	1.9	5.9	5.4	5.4	6.8	5.5	5.5	6.0	5.1	5.0	5.2	5.1	4.9	5.5
9	1.9	—	1.5	5.5	5.0	5.4	6.6	4.5	5.3	5.9	4.2	5.0	5.2	4.1	4.9	5.5
10	0.9	—	0.9	4.3	4.4	5.4	6.6	4.5	5.5	6.0	4.5	5.0	5.2	4.3	4.9	5.6
11	− 2.4	—	0.7	3.9	4.0	5.2	6.6	4.4	5.1	5.8	4.2	4.9	5.2	4.1	4.8	5.2
12	− 4.3	✱ 4.1	0.1	3.5	3.6	5.1	6.6	3.8	5.1	6.0	3.8	4.8	5.2	3.1	4.6	5.4
13	−13.9	✱ 0.4	− 0.1	3.1	3.4	5.0	6.5	3.4	4.9	5.8	3.4	4.6	5.1	3.1	4.4	5.5
14	−15.0	—	− 0.5	2.9	3.2	4.8	6.5	3.4	4.9	5.8	3.2	4.4	5.1	3.1	4.4	5.5
15	−14.1	—	− 0.7	2.7	2.2	4.5	6.4	3.2	4.7	5.8	3.2	4.4	5.1	3.1	4.4	5.5
16	− 5.0	—	− 1.1	2.7	2.8	4.4	6.4	3.1	4.5	5.8	3.0	4.3	5.1	2.7	4.2	5.4
17	0.4	✱ 0.2	− 0.9	2.5	2.6	4.2	6.3	3.0	4.5	5.8	3.0	4.2	5.0	2.7	4.2	5.5
18	2.8	—	− 0.7	2.6	2.4	3.9	6.2	*3.0*	*4.4*	*5.6*	*2.9*	*4.1*	*5.0*	*2.6*	*4.1*	*5.4*
19	0.6	✱ 1.6	− 0.5	3.5	2.4	4.0	6.2	3.0	4.3	5.5	2.8	4.1	5.0	2.6	4.1	5.4
20	2.4	✱ 0.9	− 0.5	2.7	2.4	3.8	6.1	2.9	4.3	5.5	2.8	4.0	5.0	2.3	4.0	5.4
21	− 7.7	—	− 0.6	2.5	2.3	3.7	6.0	2.8	4.1	5.5	2.6	3.8	5.0	2.5	3.9	5.2
22	−10.2	—	− 0.7	2.3	2.2	3.7	6.0	2.8	4.1	5.4	2.6	3.8	5.0	2.4	3.8	5.2
23	− 7.3	—	− 0.9	2.1	2.1	3.6	5.9	2.6	3.9	5.4	2.5	3.8	4.8	2.1	3.8	5.2
24	− 2.3	—	− 0.9	1.9	2.0	3.5	5.9	2.6	3.9	5.4	2.4	3.3	4.8	2.1	3.8	5.2
25	1.5	● 1.6	− 1.1	2.1	2.0	3.4	5.8	2.5	3.8	5.4	2.4	3.8	4.8	2.1	3.6	5.1
26	1.4	● 2.2	− 0.5	2.1	1.9	3.3	5.7	2.4	3.7	5.2	2.2	3.6	4.8	2.1	3.6	5.0
27	2.4	● 5.0	− 0.5	2.1	1.8	3.2	5.6	2.4	3.7	5.2	2.2	3.4	4.6	2.0	3.5	4.9
28	− 0.9	● 1.6	− 0.5	2.1	1.8	3.2	5.6	2.4	3.6	5.1	2.1	3.2	4.5	1.9	3.4	5.0
29	− 4.1	✱ 0.2	− 0.6	2.1	1.8	3.1	5.5	2.4	3.5	5.0	2.1	3.1	4.4	2.0	3.4	4.8
30	− 8.1	—	− 0.7	2.1	1.8	3.0	5.4	2.4	3.5	5.0	2.1	3.1	4.4	2.0	3.4	4.8
		23.9														
Mittel	**1.51**	✱ 7.4	**0.77**	**3.68**	**3.32**	**4.35**	**6.31**	**3.54**	**4.55**	**5.72**	**3.39**	**4.25**	**5.02**	**3.04**	**4.25**	**5.43**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1887. **December.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.					Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			127-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trockuerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.													
			0.15	0.30	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 4.2	✱ 8.0	−2.1	2.1	1.7	3.0	5.4	2.2	3.5	5.0	2.0	3.0	4.4	1.9	3.2	4.8
2	0.4	✱ 1.3	−1.3	2.1	1.6	3.0	5.3	2.2	3.3	4.8	2.0	3.0	4.3	1.9	3.2	4.8
3	2.0	✱ 2.0	−0.7	2.1	1.6	2.9	5.2	2.2	3.3	4.8	2.0	3.0	4.4	1.9	3.2	4.6
4	0.1	—	−0.7	2.1	1.6	*2.9*	5.2	2.2	3.3	4.8	2.0	3.0	4.4	1.9	3.2	4.6
5	− 7.4	✱ 1.2	−1.3	2.0	1.6	*2.8*	5.1	2.2	3.4	4.8	1.8	2.8	4.0	1.9	3.1	4.6
6	− 0.8	✱ 1.8	−1.5	1.9	1.6	*2.8*	5.0	2.2	3.2	4.8	1.8	2.8	4.0	1.7	3.1	4.8
7	− 0.9	—	−1.1	1.9	1.6	*2.7*	5.0	2.1	3.1	4.7	1.8	2.8	4.0	1.7	3.0	4.5
8	− 1.6	✱ 2.1	−0.9	1.9	1.5	*2.7*	4.9	2.1	3.1	4.6	1.8	2.8	4.0	1.7	3.0	4.5
9	− 1.3	✱ 2.4	−0.8	1.9	1.5	*2.6*	4.9	2.1	3.1	4.6	1.8	2.8	4.0	1.7	3.0	4.5
10	− 0.5	✱ 4.2	−0.7	1.7	1.4	*2.6*	4.8	2.1	3.1	4.6	1.7	2.6	3.9	1.7	3.0	4.4
11	− 6.9	✱ 0.4	−0.7	1.9	1.4	2.5	4.8	2.0	2.9	4.5	1.6	2.6	3.8	1.5	2.8	4.4
12	− 4.7	✱ 0.5	−0.8	1.9	1.4	2.4	4.7	2.0	2.9	4.5	1.6	2.6	3.8	1.5	2.8	4.4
13	− 9.2	—	−0.9	1.9	1.4	2.4	4.7	2.0	2.9	4.4	1.6	2.6	3.8	1.5	2.8	4.4
14	−11.1	—	−1.1	1.9	1.4	2.4	4.6	2.0	2.9	4.4	1.6	2.6	3.8	1.7	2.8	4.4
15	− 7.5	✱ 3.6	−1.3	1.8	1.4	2.4	4.6	2.0	2.9	4.2	1.5	2.6	3.8	1.7	2.8	4.2
16	− 5.3	—	−1.1	1.9	1.4	2.3	4.6	2.0	2.8	4.2	1.5	2.5	3.8	1.5	2.8	4.2
17	− 0.1	✱ 3.8	−0.9	1.9	1.4	2.3	4.5	1.9	2.8	4.2	1.5	2.4	4.0	1.5	2.8	4.1
18	1.0	✱ 0.9	−0.8	1.9	1.3	2.3	4.5	1.9	2.7	4.2	1.5	2.4	3.8	1.5	2.6	4.0
19	0.3	✱ 2.4	−0.7	1.9	1.3	2.2	4.5	1.9	2.8	4.2	1.4	2.5	3.8	1.5	2.6	4.0
20	0.1	✱ 2.1	−0.7	1.9	1.3	2.2	4.4	1.9	2.7	4.1	1.4	2.4	4.0	1.5	2.8	4.2
21	−12.1	✱ 0.2	−0.9	1.9	1.3	2.2	4.4	1.8	2.7	4.0	1.3	2.2	4.0	1.5	2.6	4.0
22	−10.0	✱ 0.6	−0.8	1.9	1.3	2.2	4.3	1.8	2.7	4.0	1.4	2.4	3.8	1.3	2.6	4.0
23	− 2.0	✱ 4.5	−0.9	1.9	1.3	2.2	4.3	1.8	2.7	4.0	1.3	2.4	3.6	1.3	2.3	4.0
24	− 5.0	✱ 0.8	−0.8	1.9	1.3	2.1	4.2	1.8	2.6	3.9	1.3	2.3	3.6	1.3	2.3	3.8
25	−13.1	✱ 7.5	−0.7	1.9	1.3	2.1	4.2	1.8	2.6	3.9	1.3	2.3	3.6	1.3	2.4	3.8
26	−23.7	—	−0.9	1.7	1.2	2.1	4.2	1.8	2.4	3.8	1.2	2.3	3.6	1.3	2.4	3.4
27	−21.2	—	−2.7	1.5	1.2	2.1	4.2	1.8	2.6	3.7	1.0	2.3	3.4	1.0	2.4	3.6
28	−12.3	✱ 1.2	−2.3	1.5	1.2	2.0	4.1	1.8	2.6	3.7	1.0	2.2	3.4	1.0	2.4	3.6
29	−17.6	✱ 0.3	−2.3	1.5	1.2	2.0	4.0	1.7	2.5	3.8	1.0	2.2	3.4	1.0	2.4	3.6
30	−18.4	—	−2.5	1.5	1.2	2.0	4.0	1.7	2.5	3.8	1.0	2.2	3.4	1.0	2.4	3.6
31	−17.2	—	−3.3	1.3	1.1	2.0	4.0	1.7	2.5	3.8	1.0	2.2	3.4	1.0	2.4	3.6
Mittel	− 6.78	✱ 51.8	**−1.23**	**1.84**	**1.39**	**2.40**	**4.60**	**1.96**	**2.87**	**4.28**	**1.51**	**2.54**	**3.84**	**1.50**	**2.75**	**4.17**
Jahresmittel	**467**	**473.3**	**4.33**	**6.46**	**5.85**	**5.51**	**5.70**	**5.50**	**5.20**	**4.94**	**3.96**	**3.95**	**3.96**	**4.51**	**4.38**	**4.66**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1888. **Januar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.2	2.0
1	− 3.9	—	1.1	2.0	4.0	1.8	2.7	4.0	1.4	2.2	3.6	1.1	2.4	3.6
2	− 3.4	✳ 0.5	1.1	2.0	4.0	1.8	2.7	4.0	1.3	2.2	3.6	1.1	2.4	3.6
3	− 3.9	✳ 0.2	1.1	1.9	3.9	1.8	2.7	4.0	1.3	2.4	3.4	1.1	2.4	3.6
4	− 0.6	✳ 0.2	1.1	1.9	3.9	1.7	2.4	3.6	1.1	2.2	3.4	1.1	2.3	3.6
5	− 0.2	—	1.1	1.9	3.9	1.6	2.3	3.6	1.1	2 2	3.4	1.1	2.2	3.6
6	− 0.9	✳ 0.3	1.0	1.8	3.8	*1.6*	*2.3*	*3.6*	*1.1*	*2.2*	*3.4*	*1.1*	*2.2*	*3.5*
7	− 0.3	—	1.0	1.8	3.8	1.6	2.3	3.5	1.0	2.0	3.4	1.1	2.2	3.5
8	− 1.2	—	1.0	1.8	3.8	1.6	2.3	3.5	1.0	2.0	3.2	0.9	2.2	3.4
9	− 14.5	✳ 1.7	1.0	1.8	3.8	1.5	2.2	3.5	1.0	1.8	3.1	0.9	2.2	3.5
10	0.7	—	1.0	1.8	3.8	1.6	2.3	3.5	1.0	1.9	3.0	0.9	2.2	3.5
11	− 2.3	—	1.0	1.7	3.8	1.6	2.2	3.4	0.9	1.8	3.0	0.9	2.1	3.4
12	− 11.0	—	0.8	1.7	3.8	1.6	2.3	3.5	1.0	1.8	3.0	0.7	2.2	3.5
13	− 16.9	—	0.8	1.7	3.6	1.5	2.2	3.4	0.9	1.8	3.0	0.6	2.1	3.4
14	− 6.2	—	0.8	1.7	3.6	1.6	2.2	3.4	0.9	1.8	2.9	0.5	2.1	3.4
15	− 10.1	✳ 0.1	1.0	1.6	3.6	1.6	2.2	3.4	0.9	1.8	2.9	0.5	2.1	3.4
16	− 2.1	—	1.0	1.6	3.6	1.4	2.1	3.4	0.8	1.7	3.0	0.6	2.0	3.4
17	− 2.0	—	1.0	1.6	3.6	1.5	2.1	3.4	0.8	1.7	3.0	0.6	2.0	3.4
18	− 8.0	—	1.0	1.6	3.5	1.5	2.1	3.4	0.8	1.6	2.8	0.6	2.0	3.4
19	− 3.6	✳ 1.6	1.0	1.6	3.5	1.4	2.1	3.4	0.7	1.6	2.8	0.5	2.0	3.4
20	− 10.6	—	0.9	1.6	3.4	1.4	2.1	3.4	0.8	1.7	2.8	0.4	2.0	3.4
21	− 13.6	✳ 1.1	0.9	1.6	3.4	1.4	2.1	3.4	0.8	1.7	2.8	0.4	2.0	3.4
22	− 19.8	—	0.8	1.6	3.4	1.4	2.1	3.4	0.8	1.6	2.8	0.3	2.0	3.4
23	− 16.8	—	0.8	1.6	3.3	1.4	2.1	3.3	0.7	1.6	2.8	0.2	2.0	3.3
24	− 11.1	✳ 5.6	0.8	1.6	3.3	1.4	2.1	3.2	0.7	1.6	2.8	0.1	1.9	3.2
25	− 5.9	✳ 0.8	0.8	1.5	3.3	1.4	2.1	3.2	0.7	1.6	2.8	0.1	1.8	3.2
26	− 6.5	✳ 1.1	0.8	1.5	3.3	1.4	2.1	3.2	0.7	1.6	2.8	0.1	1.8	3.2
27	− 16.7	✳ 1.0	0.8	1.5	3.2	1.4	2.1	3.2	0.7	1.6	2.8	0.1	1.9	3.2
28	− 20.1	✳ 0.6	0.8	1.5	3.2	1.3	2.0	3.1	0.7	1.4	2.8	0.2	1.9	3.1
29	**− 24.3**	—	0.8	1.5	3.2	1.3	2.0	3.1	0.7	1.4	2.8	0.2	1.9	3.1
30	− 21.9	—	0.7	1.4	3.2	1.2	1.9	3.0	0.5	1.4	2.8	− 0.1	1.7	3.0
31	− 8.6	—	0.7	1.4	3.2	1.2	1.9	3.0	0.5	1.4	2.5	− 0.1	1.8	3.0
Mittel	**− 8.59**	**✳ 14.8**	**0.92**	**1.67**	**3.57**	**1.50**	**2.20**	**3.42**	**0.88**	**1.78**	**3.01**	**0.57**	**2.06**	**3.37**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1888. **Februar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	−10.2	✳ 0.6	0.6	1.4	3.2	0.9	1.9	3.0	0.5	1.4	2.5	−0.2	1.6	3.1
2	−20.9	—	0.6	1.4	3.1	0.9	1.9	3.0	0.5	1.4	2.5	−0.3	1.6	3.1
3	−6.9	✳ 1.2	0.6	1.4	3.1	1.2	1.9	3.0	0.6	1.4	2.5	−0.3	1.6	3.1
4	−6.1	✳ 4.3	0.6	1.4	3.1	1.2	1.9	3.0	0.4	1.4	2.6	−0.2	1.6	3.0
5	−9.0	✳ 0.7	0.6	1.4	3.0	1.2	1.9	3.0	0.5	1.4	2.4	−0.1	1.6	3.0
6	−20.0	—	0.6	1.4	3.0	1.2	1.9	3.0	0.4	1.4	2.5	−0.1	1.6	3.0
7	−11.2	✳ 0.2	0.6	1.4	3.0	1.2	1.8	3.0	0.4	1.3	2.4	−0.2	1.6	3.0
8	−13.9	—	0.6	1.4	3.0	1.2	1.8	2.9	0.4	1.3	2.4	−0.2	1.6	2.9
9	−13.1	✳ 0.2	0.6	1.3	3.0	1.2	1.8	2.9	0.4	1.3	2.4	−0.2	1.5	2.9
10	−14.2	—	0.6	1.3	3.0	1.1	1.8	2.9	0.4	1.3	2.4	−0.3	1.5	2.9
11	−17.2	✳ 1.7	0.6	1.3	3.0	1.1	1.8	2.9	0.3	1.3	2.4	−0.4	1.5	2.9
12	−10.7	✳ 3.2	0.6	1.3	3.0	1.1	1.7	2.9	0.3	1.2	2.4	−0.4	1.5	2.9
13	−7.7	✳ 0.6	0.6	1.2	3.0	1.1	1.7	2.9	0.3	1.2	2.4	−0.4	1.5	2.9
14	−9.7	✳ 0.2	0.6	1.2	3.0	1.1	1.7	2.9	0.3	1.2	2.4	−0.4	1.5	2.9
15	−10.6	—	0.6	1.2	2.9	1.1	1.7	2.9	0.3	1.2	2.4	−0.1	1.4	2.9
16	−14.7	—	0.6	1.2	2.9	1.1	1.7	2.8	0.3	1.2	2.3	−0.2	1.4	2.8
17	−13.9	—	0.5	1.2	2.9	1.1	1.7	2.9	0.3	1.2	2.4	−0.1	1.4	2.9
18	−8.7	✳ 1.0	0.5	1.2	2.9	1.1	1.7	2.9	0.3	1.2	2.4	−0.1	1.4	2.9
19	−8.6	—	0.4	1.2	2.8	1.1	1.5	2.8	0.2	1.1	2.4	−0.1	1.3	2.8
20	−17.2	—	0.4	1.2	2.8	1.1	1.7	2.6	0.3	1.1	2.1	−0.3	1.4	2.6
21	−9.6	—	0.4	1.2	2.8	1.1	1.6	2.6	0.3	1.2	2.2	−0.2	1.4	2.6
22	−9.2	—	0.4	1.2	2.8	1.0	1.6	2.8	0.2	1.1	2.2	−0.4	1.3	2.6
23	−17.1	—	0.4	1.1	2.8	1.0	1.6	2.6	0.2	1.2	2.1	−0.4	1.4	2.6
24	−13.3	—	0.4	1.1	2.8	1.0	1.6	2.6	0.2	1.1	2.1	−0.3	1.3	2.6
25	−11.5	—	0.4	1.1	2.8	1.0	1.6	2.8	0.1	1.1	2.2	−0.3	1.2	2.8
26	−12.2	—	0.4	1.1	2.7	1.0	1.5	2.6	0.2	1.1	2.1	−0.3	1.2	2.6
27	−9.3	—	0.4	1.1	2.7	1.0	1.5	2.6	0.2	1.1	2.0	−0.4	1.2	2.6
28	−9.1	—	0.4	1.1	2.7	1.0	1.5	2.6	0.2	1.0	2.0	−0.4	1.2	2.6
29	−10.2	—	0.4	1.1	2.7	1.0	1.5	2.6	0.1	1.0	2.1	−0.4	1.2	2.6
Mittel	**−11.93**	**✳ 13.9**	**0.52**	**1.24**	**2.91**	**1.08**	**1.71**	**2.83**	**0.31**	**1.22**	**2.32**	**0.27**	**1.43**	**2.84**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1888. **Mars.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 3.9	✳ 1.6	0.4	1.1	2.6	1.0	1.5	2.6	0.2	1.0	2.1	− 0.5	1.2	2.6
2	− 12.6	—	0.4	1.0	2.6	1.0	1.5	2.6	0.1	1.0	2.0	− 0.4	1.1	2.6
3	− 16.8	—	0.4	1.0	2.6	1.0	1.5	2.6	0.1	1.0	2.0	− 0.4	1.0	2.6
4	− 17.4	—	0.4	1.0	2.6	1.0	1.5	2.6	0.1	1.0	2.0	− 0.5	1.0	2.6
5	− 22.9	—	0.4	1.0	2.6	0.9	1.5	2.6	0.0	1.0	2.0	− 0.5	1.0	2.6
6	− 20.4	—	0.3	1.0	2.6	0.8	1.5	2.6	0.0	1.0	2.0	− 0.8	1.0	2.6
7	− 16.8	—	0.3	1.0	2.6	0.9	1.5	2.5	− 0.2	1.0	2.0	− 0.9	1.0	2.5
8	− 17.7	—	0.3	1.0	2.6	0.9	1.4	2.4	− 0.2	1.0	2.0	− 1.0	1.0	2.4
9	− 15.4	—	0.2	1.0	2.6	0.9	1.4	2.4	− 0.3	0.9	2.0	− 1.0	1.0	2.4
10	− 17.6	—	0.2	1.0	2.6	0.9	1.4	2.4	− 0.4	1.0	2.0	− 1.3	1.0	2.4
11	− 20.3	—	0.2	1.0	2.5	0.8	1.4	2.4	− 0.4	1.0	1.9	− 1.4	1.0	2.4
12	− 17.3	—	0.1	1.0	2.5	0.8	1.4	2.4	− 0.4	0.9	1.9	− 1.5	0.9	2.4
13	− 20.3	—	0.0	1.0	2.5	0.9	1.4	2.4	− 0.4	0.9	2.0	− 1.4	1.0	2.4
14	− 17.7	—	− 0.1	0.9	2.5	0.6	1.3	2.4	− 0.6	0.9	1.9	− 1.7	0.9	2.4
15	− 14.5	—	− 0.2	0.9	2.5	0.7	1.3	2.4	− 0.6	0.8	1.9	− **1.9**	0.8	2.4
16	− 14.2	—	− 0.3	0.9	2.4	0.7	1.3	2.4	− **0.7**	0.9	1.9	− 1.8	0.8	2.4
17	− 14.0	—	− 0.4	0.9	2.4	0.7	1.3	2.4	− 0.6	0.8	1.8	− 1.8	0.7	2.4
18	− 9.1	—	− 0.4	0.8	2.4	0.7	1.3	2.3	− 0.6	0.8	2.0	− 1.8	0.7	2.3
19	− 10.1	—	− **0.4**	0.8	2.4	0.7	1.3	2.4	− 0.6	0.8	1.9	− 1.8	0.8	2.4
20	− 5.2	—	− 0.4	0.8	2.4	0.7	1.2	2.3	− 0.6	0.8	2.0	− 1.8	0.7	2.3
21	− 3.7	—	− 0.4	0.8	2.4	0.7	1.2	2.2	− 0.5	0.8	1.8	− 1.7	0.6	2.2
22	− 3.3	✳ 2.0	− 0.2	0.8	2.4	0.7	*1.2*	2.3	− 0.2	0.7	1.8	− 1.2	0.6	2.2
23	− 1.1	✳ 6.7	− 0.0	0.8	2.4	0.7	*1.2*	2.3	− 0.1	0.7	1.8	− 1.2	0.6	2.2
24	− 2.5	✳ 0.8	0.0	0.8	2.4	0.6	1.2	2.2	− 0.1	0.8	1.8	− 1.1	0.6	2.1
25	− 4.7	✳ 3.2	0.0	0.8	2.4	**0.5**	1.2	2.3	− 0.1	0.8	1.8	− 0.9	0.6	2.2
26	− 0.4	✳ 1.6	0.0	0.8	2.4	0.5	1.2	2.3	− 0.1	0.8	1.8	− 0.9	0.6	2.2
27	− 0.9	✳ 0.5	0.2	0.8	2.4	0.7	1.2	2.2	0.0	0.8	1.8	− 0.7	0.6	2.2
28	− 2.5	✳ 2.6	0.2	0.8	2.3	0.7	1.2	2.1	0.0	0.8	1.8	− 0.6	0.6	2.1
29	− 3.2	✳ 2.6	0.3	0.8	2.3	0.7	**1.0**	2.2	0.1	0.7	1.8	− 0.5	0.6	2.2
30	2.0	✳● 2.1	0.4	0.8	2.3	0.7	1.1	2.2	0.1	0.7	1.8	− 0.4	0.6	2.2
31	3.8	● 2.7	0.4	0.8	2.2	0.7	1.1	2.2	0.1	0.7	1.8	− 0.4	0.6	2.2
		26.4												
Mittel	**10.35**	✳ 22.7	**0.07**	**0.90**	**2.46**	**0.51**	**1.31**	**2.37**	**− 0.22**	**0.54**	**1.91**	**− 1.09**	**0.81**	**2.36**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1888. **April.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	0.8	●✳ 7.4	0.4	0.8	2.2	0.7	1.2	2.1	0.2	0.8	1.8	−0.3	0.6	2.1
2	0.7	✳ 1.1	0.4	0.7	2.2	0.7	1.1	2.1	0.2	0.7	1.8	−0.2	0.6	2.1
3	−2.4	✳ 0.1	0.4	0.7	2.2	0.7	1.2	2.1	0.2	0.7	1.8	−0.2	0.6	2.1
4	0.0	✳ 6.0	0.5	0.7	2.2	0.7	1.1	2.2	0.2	0.7	1.8	−0.1	0.6	2.1
5	−3.0	—	0.5	0.7	2.2	0.7	1.2	2.1	0.2	0.7	1.6	−0.1	0.6	2.0
6	−4.0	—	0.5	0.7	2.2	0.7	1.2	2.1	0.2	0.7	1.6	−0.1	0.6	2.0
7	−4.3	✳ 6.8	0.6	0.7	2.2	0.6	1.1	2.1	0.2	0.7	1.6	−0.1	0.6	2.0
8	0.2	—	0.6	0.7	2.2	0.6	1.1	2.1	0.2	0.7	1.6	−0.1	0.6	2.0
9	1.4	—	0.6	0.7	2.2	0 7	1.1	2.2	0.3	0.6	1.6	0.1	0.6	2.0
10	1.2	✳● 5.7	0.6	0.7	2.2	0.8	1.2	2.1	0.3	0.7	1.6	0.1	0.6	2.0
11	1.3	● 0.2	0.6	0.7	2.2	0.7	1.2	2.1	0.2	0.7	1.6	0.0	0.6	1.9
12	1.4	—	0.6	0.7	2.1	0.7	1.1	2.2	0.3	0.7	1.6	0.1	0.6	1.9
13	2.0	—	0.6	0.7	2.1	0.7	1.1	2.2	0.3	0.7	1.5	0.1	0.4	1.9
14	1.0	—	0.6	0.7	2.1	0.7	1.1	2.1	0.3	0.6	1.6	0.1	0.4	2.0
15	2.3	—	0.6	0.7	2.1	0.7	1.1	2 1	0.3	0.6	1.6	0.1	0.4	2.0
16	1.8	—	0.6	0.7	2.1	0.7	1.1	2.1	0.3	0.6	1.6	0.1	0.4	2.0
17	0.6	—	0.6	0.7	2.1	0.7	1.1	2.1	0.3	0.7	1.6	0.2	0.6	2.0
18	2.8	● 1.8	0.6	0.7	2.1	0.7	1.1	2.1	0.3	0.7	1.6	0.1	0.6	2.0
19	3.7	● 4.6	0.6	0.7	2.0	0.8	1.1	2.1	0.3	0.8	1.6	0.1	0.7	2.0
20	3.6	—	0.6	0.7	2.0	0.8	1.1	2.2	0.3	0.6	1.6	0.2	0.6	1.8
21	2.1	●✳ 15.0	0.6	0.7	2.0	0.7	1.2	2.1	0.3	0.7	1.6	0.2	1.0	2.1
22	1.8	—	0.6	0.7	2.0	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.6	0.2	0.6	1.9
23	1.7	—	0.6	0.7	2.0	0.7	1.1	2.1	0.3	0.7	1.5	0.2	0.6	2.0
24	−0.9	—	0.6	0.7	2.0	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.5	0.2	0.6	2.0
25	0.6	●✳ 0.3	0.6	0.7	2.0	0.8	1.2	2.1	0.3	0.7	1.5	0.2	0.6	2.0
26	−4.8	—	0.6	0.7	2.0	0.8	1.1	2.1	0.3	0.7	1.5	0.2	0.6	2.0
27	−2.0	—	0.6	0.7	2.0	0.8	1.1	2.0	0.2	0.7	1.6	0.2	0.7	1.8
28	1.5	✳ 1.4	0.6	0.7	2.0	0.8	1.1	2.0	0.2	0.6	1.6	0.1	0.7	1.8
29	−0.3	● 0.5	0.6	0.7	2.0	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.5	0.2	0.6	2.0
30	3.6	● 0.2	0.6	0.7	2.0	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.2	0.6	1.8
		51.3												
Mittel	**0.48**	**✳ 30.4**	**0.57**	**0.70**	**2.10**	**0.73**	**1.13**	**2.10**	**0.26**	**0.69**	**1.60**	**0.07**	**0.60**	**1.98**

Bodentemperatur 9ʰ a. m. C°

1888. **Mai.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	5.5	—	0.6	0.7	1.9	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.2	0.6	1.8
2	8.4	● 0.8	0.6	0.7	1.9	0.8	1.1	2.0	0.3	0.5	1.4	0.2	0.6	1.8
3	4.4	● 0.7	0.7	0.7	1.9	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.3	0.6	1.8
4	6.8	● 0.1	0.7	0.7	1.9	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.3	0.4	1.8
5	4.6	—	0.7	0.7	1.9	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.3	0.5	1.8
6	3.2	● 0.9	0.7	0.7	1.9	0.8	1.1	2.0	0.3	0.5	1.5	0.3	0.6	1.8
7	3.2	● 0.6	0.7	0.7	1.8	0.8	1.1	2.0	0.2	0.7	1.4	0.3	0.6	1.8
8	3.8	● 2.6	0.7	0.7	1.8	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.3	0.6	1.8
9	2.5	✳● 5.2	0.7	0.7	1.8	0.8	1.1	1.9	0.3	0.7	1.4	0.3	0.6	1.6
10	2.8	● 0.3	0.7	0.6	1.8	0.8	1.1	2.0	0.3	0.8	1.6	0.2	0.5	1.4
11	1.5	● 0.1	0.7	0.6	1.7	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.3	0.6	1.6
12	2.3	● 5.5	0.7	0.6	1.7	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.3	0.6	1.6
13	3.7	● 3.8	0.7	0.6	1.7	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.3	0.6	1.6
14	3.1	● 1.6	0.7	0.6	1.7	0.8	1.1	2.0	0.3	0.6	1.5	0.3	0.6	1.6
15	3.2	● 0.7	0.7	0.6	1.7	0.9	1.1	2.0	0.4	0.7	1.4	0.4	0.6	1.6
16	7.0	● 0.2	0.7	0.6	1.7	0.9	1.1	2.0	0.4	0.7	1.4	0.3	0.6	1.6
17	8.8	● 0.4	0.7	0.6	1.7	0.9	1.1	2.0	0.4	0.7	1.4	0.3	0.6	1.6
18	11.3	● 0.3	0.7	0.6	1.7	1.0	1.1	2.0	0.4	0.7	1.4	0.5	0.6	1.6
19	12.4	—	0.7	0.6	1.7	1.0	1.1	1.9	0.4	0.7	1.4	0.5	0.6	1.6
20	11.5	—	0.7	0.6	1.7	1.1	1.1	2.0	0.3	0.7	1.5	0.4	0.5	1.6
21	7.9	—	0.8	0.6	1.6	1.2	1.1	1.9	0.4	0.8	1.4	0.5	0.6	1.4
22	9.6	—	0.8	0.6	1.6	1.2	1.2	2.0	0.3	0.7	1.4	0.2	0.6	1.6
23	12.9	—	0.8	0.6	1.6	1.2	1.1	1.9	0.4	0.7	1.4	0.5	0.6	*1.6*
24	10.8	—	0.8	0.6	1.6	1.4	1.3	2.0	0.3	0.7	1.4	0.4	0.5	*1.6*
25	8.0	—	0.9	0.6	1.6	2.1	1.4	2.0	0.3	0.7	1.4	0.4	0.5	*1.6*
26	6.2	—	0.9	0.6	1.6	2.1	1.4	2.0	0.3	0.7	1.4	0.4	0.5	*1.6*
27	3.9	● 4.8	1.0	0.8	1.6	2.7	1.6	2.0	0.3	0.7	1.4	0.4	0.5	1.6
28	5.3	● 2.6	1.0	0.8	1.6	2.8	1.8	2.0	0.3	0.7	1.4	0.5	0.6	1.4
29	7.6	● 0.3	1.0	0.8	1.6	3.3	2.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.4	0.6	1.6
30	10.0	—	1.2	0.9	1.7	3.8	2.3	2.1	0.3	0.7	1.4	0.4	0.6	1.6
31	13.7	● 2.2	1.6	1.1	1.8	4.3	2.5	2.2	0.3	0.7	1.4	0.5	0.6	1.6
Mittel	**6.64**	**● 33.7**	**0.79**	**0.67**	**1.73**	**1.39**	**1.28**	**2.00**	**0.32**	**0.69**	**1.42**	**0.35**	**0.57**	**1.63**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1888. **Juni.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala.			Heinäis.								
			Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	10.6	● 8.3	2.0	1.2	1.9	5.0	2.9	2.1	0.3	0.7	1.4	0.8	0.7	1.6
2	7.8	● 2.6	2.6	1.8	2.0	5.5	3.2	2.2	0.3	0.7	1.4	0.8	0.8	1.6
3	7.0	—	3.4	2.2	2.0	6.0	3.5	2.4	0.4	0.6	1.4	0.9	0.9	1.6
4	7.7	● 4.0	4.2	2.6	2.2	6.2	3.9	2.4	0.3	0.6	1.4	0.7	1.0	1.8
5	7.8	● 12.2	4.8	3.0	2.2	6.0	4.1	2.6	0.3	0.6	1.4	1.0	1.2	1.8
6	10.4	—	6.0	3.8	2.4	6.0	4.2	2.6	0.3	0.7	1.4	1.9	1.2	1.8
7	12.1	—	6.6	4.2	2.6	6.2	4.3	2.6	0.4	0.7	1.2	2.9	1.4	1.8
8	13.6	—	7.2	4.8	2.6	6.5	4.5	2.8	0.3	0.6	1.4	3.3	1.6	2.0
9	14.6	—	8.0	5.0	2.8	6.9	4.7	2.8	0.3	0.7	1.4	4.8	1.9	2.0
10	13.4	—	8.8	5.3	2.9	7.3	4.9	3.0	0.3	0.7	1.4	4.4	2.1	2.0
11	16.1	—	9.6	5.6	3.0	7.8	5.2	3.0	0.3	0.7	1.4	5.0	2.3	2.1
12	13.3	—	10.0	6.0	3.2	8.3	5.5	3.2	0.3	0.7	1.4	5.5	2.6	2.2
13	14.5	● 0.3	10.4	6.6	3.3	8.6	5.7	3.2	0.3	0.7	1.4	5.8	2.8	2.3
14	8.2	● 0.2	10.2	6.8	3.4	8.8	6.0	3.4	0.3	0.7	1.4	6.0	3.0	2.4
15	10.1	—	10.1	7.0	3.6	9.2	6.2	3.4	0.4	0.7	1.4	5.8	3.2	2.4
16	11.2	● 0.1	9.8	7.1	3.8	8.5	6.5	3.4	0.4	0.7	1.4	5.7	2.9	2.4
17	13.0	● 0.4	9.7	7.2	4.0	8.5	6.4	3.6	0.4	1.1	1.4	5.6	3.4	2.8
18	15.6	● 0.4	10.0	7.3	4.0	8.8	6.4	3.7	0.4	0.7	1.4	6.7	3.5	2.8
19	16.0	—	10.8	7.4	4.2	9.9	6.4	3.8	0.4	0.7	1.4	6.5	3.7	2.8
20	16.6	—	11.2	7.6	4.3	9.9	6.5	3.9	0.4	0.7	1.4	6.7	3.9	3.0
21	18.8	—	11.4	7.8	4.4	9.9	6.6	4.0	0.4	0.8	1.4	6.9	3.9	3.0
22	12.6	—	11.8	8.0	4.6	10.0	6.7	4.0	0.6	0.8	1.4	7.3	4.2	3.0
23	14.0	—	12.0	8.4	4.7	10.2	6.9	4.2	0.6	0.8	1.4	7.3	4.2	3.0
24	17.0	—	12.2	8.6	4.8	10.1	6.9	4.3	0.6	0.8	1.5	7.2	4.3	3.2
25	18.0	—	12.4	8.8	4.9	10.4	7.1	4.4	0.8	0.8	1.8	7.3	4.4	3.2
26	13.7	—	12.6	9.0	5.0	10.5	7.3	4.6	1.0	0.9	1.6	7.7	4.6	3.5
27	16.2	—	12.8	9.2	5.2	10.6	7.5	4.6	1.0	0.9	1.6	7.7	4.6	3.6
28	13.7	—	13.0	9.3	5.3	10.6	7.7	4.6	1.2	1.0	1.5	7.7	4.8	3.4
29	12.4	—	13.1	9.4	5.4	10.8	7.7	4.6	1.2	1.0	1.6	7.9	4.8	3.4
30	11.5	—	13.2	9.6	5.6	10.6	7.7	4.6	1.6	1.2	1.8	7.7	4.8	3.6
Mittel	**12.92**	● **28.5**	**9.33**	**6.35**	**3.68**	**8.45**	**5.77**	**3.47**	**0.53**	**0.77**	**1.45**	**5.18**	**2.96**	**2.54**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1888. **Juli.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	14.5	—	13.0	9.8	5.7	10.5	7.9	5.0	2.3	1.6	1.8	7.6	4.9	3.8
2	13.1	● 2.5	12.8	9.8	5.8	10.8	7.9	5.0	2.6	1.9	2.0	7.7	4.8	3.8
3	12.0	● 0.1	12.7	9.8	5.9	10.6	8.0	5.1	3.1	2.2	1.8	7.6	5.1	4.0
4	11.0	—	12.8	9.8	6.0	10.5	8.0	5.1	3.5	2.5	2.0	7.6	5.1	3.8
5	15.5	—	12.8	9.9	6.0	10.5	8.0	5.2	3.8	3.1	2.4	7.5	5.1	4.0
6	18.4	—	13.5	9.9	6.2	10.8	8.0	5.2	4.3	3.0	2.2	8.1	5.2	4.0
7	13.6	—	13.4	10.0	6.3	11.1	8.0	5.4	4.8	3.2	2.1	8.3	5.2	4.0
8	14.2	● 0.3	13.5	10.1	6.3	11.6	8.2	5.4	5.2	3.4	2.2	8.5	5.4	4.0
9	12.8	● 26.2	13.5	10.2	6.4	11.4	8.3	5.4	5.6	3.3	2.2	8.6	5.4	4.0
10	13.4	● 0.6	13.6	10.4	6.6	11.4	8.5	5.6	5.8	3.9	2.4	8.8	5.6	4.2
11	15.2	● 1.5	13.7	10.5	6.7	11.5	8.6	5.6	6.1	4.1	2.4	8.8	5.6	4.4
12	15.5	—	13.8	10.6	6.8	11.6	8.7	5.7	6.4	4.4	2.7	8.9	5.8	4.2
13	13.2	● 5.8	13.7	10.8	6.9	11.7	8.8	5.8	6.5	4.5	3.0	9.0	6.0	4.4
14	13.8	● 4.0	13.6	10.9	7.0	11.6	8.8	5.8	6.6	4.6	3.1	9.0	5.9	4.4
15	12.8	● 6.1	13.6	11.0	7.1	11.7	8.9	6.0	6.7	4.7	3.1	9.1	6.0	4.4
16	15.2	—	13.8	11.0	7.2	11.6	9.1	6.0	6.9	4.9	3.4	9.2	6.0	4.4
17	13.5	● 0.4	13.8	11.0	7.3	11.7	9.0	6.0	7.0	5.0	3.4	9.4	6.2	4.6
18	17.9	—	14.6	11.0	7.4	11.9	9.1	6.1	7.2	5.0	3.4	9.3	6.2	4.6
19	18.5	—	14.2	11.2	7.4	11.9	9.1	6.1	7.3	5.2	3.4	9.5	6.4	4.8
20	**18.9**	—	14.4	11.2	7.5	12.0	9.2	6.2	7.4	5.4	3.4	9.7	6.4	4.8
21	17.0	●▲ 11.0	14.6	11.4	7.6	12.1	9.3	6.4	7.7	5.6	3.4	10.3	6.5	5.0
22	17.5	—	14.8	11.6	7.6	12.3	9.4	6.4	7.8	5.6	3.4	10.3	6.6	5.0
23	16.7	—	15.0	11.7	7.7	12.5	9.5	6.4	8.0	5.7	3.4	10.2	6.7	5.0
24	18.5	—	15.2	11.8	7.8	12.6	9.7	6.4	8.2	5.9	3.4	10.2	6.8	5.0
25	17.2	—	15.4	12.0	7.9	12.6	9.7	6.6	8.2	6.0	3.4	10.1	7.0	5.0
26	16.9	● 6.8	**15.4**	12.2	8.0	12.8	9.8	6.6	8.4	6.2	3.6	10.1	7.0	5.2
27	15.6	● 1.3	15.4	12.2	8.1	12.9	9.8	6.8	8.5	6.3	3.8	10.5	7.1	5.3
28	15.5	● 1.1	15.3	12.3	8.2	**12.9**	9.8	6.8	8.6	6.3	3.8	10.5	7.1	5.3
29	14.1	—	15.4	12.3	8.2	12.9	10.1	6.8	8.8	6.4	4.0	10.7	7.2	5.4
30	12.9	● 13.5	15.2	12.4	8.3	12.8	10.2	7.0	8.7	6.5	4.0	10.4	7.4	5.4
31	15.8	● 4.8	14.9	12.4	8.4	12.7	10.1	7.0	8.8	6.6	4.0	10.6	7.3	5.4
Mittel	**15.18**	**● 86.0**	**14.11**	**11.01**	**7.11**	**11.79**	**8.95**	**5.96**	**6.48**	**4.61**	**2.99**	**9.23**	**6.10**	**4.57**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1888. **Augusti.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala m.m.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	14.3	—	15.0	12.4	8.4	12.8	10.2	7.1	8.9	6.6	4.0	10.8	7.4	5.6
2	14.4	—	14.6	12.4	8.5	12.9	10.2	7.2	9.0	6.7	4.1	10.8	7.4	5.6
3	13.2	—	14.8	12.4	8.6	12.9	10.2	7.2	9.0	6.9	4.2	10.6	7.6	5.6
4	13.0	● 18.8	14.4	12.4	8.7	12.5	10.2	7.2	8.8	6.8	4.2	10.3	7.6	5.8
5	13.6	—	14.2	12.4	8.8	12.4	10.3	7.4	8.8	7.0	4.4	10.3	7.6	5.8
6	15.0	● 0.5	14.6	12.4	8.8	12.4	10.2	7.4	8.8	7.0	4.4	10.3	7.6	5.8
7	16.6	—	15.3	12.4	8.9	12.4	10.2	7.4	8.9	6.9	4.4	10.4	7.6	6.0
8	16.1	● 0.1	15.4	12.4	8.9	12.6	10.3	7.5	9.0	7.0	4.6	10.7	7.8	6.0
9	14.5	● 0.7	14.8	12.4	9.0	12.5	10.3	7.5	9.0	7.0	4.6	10.7	7.8	6.0
10	13.8	● 17.6	14.6	12.4	9.0	12.4	10.3	7.6	9.0	7.1	4.6	10.6	7.8	6.0
11	12.1	—	14.6	12.4	9.0	12.5	10.4	7.8	9.1	7.1	4.7	10.6	7.8	6.1
12	11.1	—	14.4	12.3	9.1	12.5	10.4	7.7	9.1	7.2	4.8	10.5	7.9	6.2
13	13.5	—	14.2	12.3	9.1	12.4	10.4	7.8	9.0	7.0	4.9	10.4	7.8	6.2
14	11.6	● 2.7	14.2	12.3	9.1	12.2	10.3	7.8	8.8	7.2	5.0	10.2	7.8	6.1
15	13.5	● 2.8	14.0	12.2	9.2	12.1	10.3	7.8	8.8	7.2	5.0	10.2	7.8	6.2
16	13.4	● 1.8	14.0	12.2	9.2	12.1	10.3	7.8	8.8	7.2	5.0	10.2	7.8	6.2
17	12.2	● 0.2	13.8	12.2	9.2	12.1	10.2	7.8	8.9	7.2	5.0	10.2	7.9	6.4
18	11.6	● 8.4	13.8	12.2	9.4	12.1	10.2	7.9	8.9	7.2	5.0	10.2	7.9	6.4
19	12.2	● 0.2	13.6	12.2	9.4	12.0	10.4	8.0	8.8	7.3	5.0	10.1	7.8	6.4
20	10.5	● 0.2	13.6	12.2	9.4	11.9	10.3	8.0	8.8	7.3	5.0	10.0	7.9	6.4
21	10.4	● 0.1	13.4	12.1	9.4	11.7	10.3	8.0	8.7	7.3	5.1	9.8	7.8	6.5
22	11.9	● 0.2	13.4	12.0	9.4	11.2	10.2	8.1	8.3	7.3	5.2	9.4	7.9	6.5
23	12.6	● 1.0	13.3	12.0	9.3	11.2	10.1	8.1	8.3	7.3	5.2	9.4	7.9	6.5
24	11.9	● 2.0	13.2	11.9	9.3	11.2	10.1	8.0	8.2	7.2	5.2	9.4	7.8	6.5
25	11.6	● 0.2	13.1	11.8	9.6	11.3	10.0	8.0	8.4	7.2	5.2	9.6	7.8	6.4
26	13.3	—	13.1	11.8	9.6	11.2	10.0	8.0	8.4	7.1	5.2	9.5	7.7	6.4
27	14.7	—	13.2	11.8	9.6	11.2	10.0	8.0	8.4	7.1	5.2	9.6	7.7	6.4
28	17.0	● 1.2	13.4	11.9	9.6	11.4	9.9	8.0	8.5	7.2	5.4	9.9	7.6	6.5
29	16.8	—	13.4	11.9	9.6	11.4	9.9	8.0	8.5	7.2	5.4	9.9	7.6	6.5
30	14.6	—	13.8	11.9	9.6	11.4	9.9	8.0	8.6	7.2	5.4	9.9	7.6	6.5
31	14.7	● 1.8	13.8	12.0	9.6	11.4	10.2	8.0	8.8	7.0	5.4	10.3	7.6	6.5
Mittel	**13.41**	**60.5**	**14.03**	**12.18**	**9.17**	**12.01**	**10.20**	**7.75**	**8.75**	**7.10**	**4.86**	**10.15**	**7.73**	**6.19**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1888. **September.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	14.5	● 0.6	13.8	12.0	9.6	11.9	10.1	8.1	9.2	7.3	5.4	10.6	7.9	6.4
2	13.6	⌓ 0.2	12.8	12.2	9.7	11.8	10.1	8.1	9.2	7.4	5.3	10.3	8.0	6.5
3	10.9	—	12.9	12.2	9.7	11.9	10.2	8.2	9.2	7.5	5.4	10.4	8.1	6.6
4	13.2	● 5.1	12.8	12.2	9.7	12.0	10.3	8.2	9.4	7.6	5.4	10.5	8.1	6.6
5	12.7	● 2.1	12.9	12.2	9.7	11.7	10.2	8.1	9.1	7.5	5.4	10.2	8.1	6.6
6	14.5	—	12.8	12.2	9.7	11.6	10.2	8.1	9.1	7.5	5.4	10.2	8.1	6.7
7	14.4	● 2.2	13.6	12.2	9.8	11.7	10.2	8.3	9.1	7.6	5.4	10.3	7.7	6.8
8	15.8	● 2.0	13.4	12.0	9.8	11.7	10.1	8.2	9.2	8.0	5.4	10.4	8.1	6.8
9	5.6	⌓ 0.1	13.0	11.9	9.8	11.8	10.1	8.2	9.3	7.7	5.6	10.5	8.2	6.8
10	8.0	⌓ 0.1	12.6	11.7	9.8	11.6	10.2	8.4	9.2	7.6	5.6	10.2	8.1	6.8
11	15.1	⌓ 0.1	12.4	11.6	9.8	10.6	10.1	8.1	8.4	7.6	5.8	9.0	8.2	7.0
12	13.4	● 3.2	12.2	11.5	9.8	11.0	10.2	8.4	8.8	7.7	5.6	9.5	8.1	7.0
13	12.7	● 1.0	12.0	11.4	9.8	10.6	10.0	8.3	8.4	7.6	5.8	9.2	7.9	7.0
14	8.7	⌓ 0.1	11.9	11.4	9.8	10.7	10.1	8.3	8.4	7.6	5.8	9.2	7.9	7.0
15	6.9	—	11.8	11.4	9.8	10.6	9.9	8.4	8.6	7.6	6.0	9.3	8.0	7.0
16	3.8	—	11.6	11.2	9.8	10.6	9.9	8.4	8.6	7.6	6.0	9.3	8.0	7.0
17	3.2	—	11.2	11.0	9.7	9.5	9.6	8.4	7.9	7.5	6.0	8.2	7.8	7.0
18	6.6	● 0.3	10.6	10.6	9.7	9.0	9.3	8.3	7.6	7.4	5.9	7.9	7.6	7.0
19	8.5	—	10.4	10.4	9.7	8.5	9.2	8.2	7.1	7.1	5.8	7.3	7.5	7.0
20	8.5	—	10.2	10.2	9.7	8.8	9.0	8.3	7.1	7.0	5.8	7.5	7.4	7.0
21	9.5	⌓ 0.2	9.8	9.9	9.6	8.6	8.9	8.2	7.2	6.8	6.0	7.5	7.2	7.0
22	8.5	—	9.7	9.7	9.6	*8.7*	*8.9*	*8.2*	*7.2*	*6.8*	*5.9*	*7.6*	*7.2*	*6.9*
23	10.7	—	9.7	9.6	9.4	8.7	8.8	8.2	7.2	6.8	5.8	7.7	7.1	6.8
24	8.5	—	9.7	9.6	9.4	8.8	8.5	8.0	7.3	6.8	5.8	7.9	7.2	6.8
25	3.6	—	9.6	9.5	9.4	*8.6*	*8.6*	*8.0*	*7.3*	*6.8*	*5.8*	*7.7*	*7.2*	*6.8*
26	5.2	● 1.2	9.4	9.4	9.4	8.4	8.6	8.0	7.2	6.8	5.8	7.5	7.1	6.8
27	7.5	⌓ 0.2	9.3	9.3	9.3	8.2	8.5	8.0	7.0	6.8	6.0	7.1	7.0	6.8
28	2.8	△ 0.5	9.2	9.2	9.3	8.4	8.5	8.0	7.0	6.6	5.8	7.3	6.4	6.8
29	2.4	⌓ 0.1	7.8	*8.9*	9.2	7.8	7.9	7.9	6.4	6.8	5.8	7.3	6.4	6.8
30	8.1	● 11.1	7.4	8.6	9.2	7.8	7.9	7.9	6.4	6.3	5.8	6.7	6.4	6.8
Mittel	**9.25**	**31.2**	**11.22**	**10.84**	**9.62**	**10.05**	**9.47**	**8.18**	**8.10**	**7.26**	**5.71**	**8.81**	**7.60**	**6.83**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1888. **October.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	7.8	● 1.7	7.4	8.4	9.2	7.3	7.9	7.8	6.1	6.3	5.8	6.4	6.6	6.8
2	5.0	● 0.5	7.4	8.2	9.0	7.5	7.8	7.7	6.3	6.0	5.6	6.7	6.6	6.6
3	3.6	● 3.5	7.4	8.3	9.0	7.2	7.7	7.7	6.2	6.1	5.6	6.4	6.5	6.7
4	4.6	● 1.5	7.4	8.0	8.8	6.9	7.6	7.7	6.0	6.2	5.6	6.1	6.5	6.7
5	7.1	● 1.7	7.4	8.0	8.8	6.8	7.5	7.6	6.0	6.2	5.6	5.9	6.4	6.6
6	5.8	● 5.9	7.4	7.8	8.6	6.8	7.4	7.6	5.9	6.0	5.5	6.0	6.4	6.4
7	4.6	⌓ 0.2	7.2	7.8	8.6	6.9	7.3	7.4	6.1	6.0	5.6	6.1	6.3	6.0
8	3.7	⌓ 0.2	7.0	7.6	8.4	6.8	7.3	7.6	5.8	6.0	5.4	5.9	6.4	6.4
9	5.4	⌓ 0.1	6.7	7.6	8.4	6.8	7.3	7.6	5.8	6.0	5.4	5.9	6.3	6.4
10	1.6	● 4.2	6.6	7.4	8.4	6.2	7.1	7.4	5.6	6.0	5.4	6.1	6.2	6.0
11	4.4	● 1.4	6.4	7.4	8.3	6.1	7.0	7.4	5.5	5.7	5.4	5.3	6.0	6.0
12	3.8	● 5.0	6.4	7.2	8.3	6.2	6.9	7.2	5.4	5.4	5.4	5.4	6.0	6.0
13	5.1	● 4.1	6.2	7.0	8.2	6.1	6.8	7.0	5.0	5.5	5.4	5.3	5.9	6.0
14	3.0	⌓ 0.3	6.1	6.9	8.1	6.2	6.7	7.4	5.4	5.6	5.2	5.4	5.8	5.8
15	2.2	● 5.8	6.0	6.8	8.0	6.0	6.6	7.2	5.3	5.5	5.4	5.2	5.8	5.9
16	1.1	✱ 1.8	5.8	6.6	8.0	5.8	6.5	7.2	5.0	5.5	5.4	4.9	5.8	5.8
17	0.2	✱ 0.2	5.6	6.4	7.9	5.5	6.4	7.0	4.9	5.4	5.3	4.6	5.6	5.8
18	– 1.1	⌓ 0.1	5.0	6.3	7.8	5.3	6.4	7.0	4.7	5.3	5.3	4.4	5.6	5.8
19	– 1.4	—	4.6	6.1	7.8	4.9	6.2	6.8	4.4	5.1	5.3	4.1	5.5	5.7
20	1.5	● 3.4	4.2	5.9	7.7	5.0	6.0	6.8	4.0	5.1	5.2	3.9	5.4	5.8
21	4.6	● 1.1	4.0	5.7	7.6	5.2	5.7	6.6	4.2	4.8	5.0	4.3	5.1	5.4
22	0.4	—	3.9	5.5	7.5	4.5	5.7	6.6	3.9	4.9	5.1	4.1	5.1	5.6
23	– 1.3	—	3.8	5.3	7.4	4.4	5.7	6.5	3.8	4.8	5.0	3.5	5.0	5.4
24	1.9	● 1.6	3.6	5.2	7.3	4.2	5.6	6.4	3.8	4.8	5.0	3.5	4.9	5.4
25	2.7	—	3.4	5.1	7.2	3.9	5.5	6.6	3.5	4.6	5.0	3.3	4.8	5.6
26	– 1.9	✱ 10.8	3.3	5.0	7.2	3.8	5.3	6.4	3.6	4.5	5.0	3.3	4.7	5.3
27	– 2.9	✱ 2.8	3.2	4.8	7.1	3.4	4.9	6.0	3.2	4.2	5.0	2.7	4.4	5.4
28	3.2	✱● 8.5	3.1	4.6	7.0	3.6	4.7	6.2	3.8	4.3	5.0	2.9	4.4	5.6
29	3.6	● 8.0	3.0	4.5	6.8	3.6	4.9	6.2	3.4	4.4	5.0	2.9	4.4	5.6
30	– 1.2	—	2.9	4.4	6.7	3.7	5.3	6.4	3.4	4.4	5.0	3.2	4.6	5.6
31	– 5.3	—	2.8	4.2	6.6	3.4	4.9	6.0	3.1	4.1	4.8	2.7	4.2	5.4
		74.4												
Mittel	**2.32**	**✱ 19.8**	**5.33**	**6.45**	**7.93**	**5.48**	**6.41**	**7.00**	**4.81**	**5.31**	**5.28**	**4.72**	**5.59**	**5.92**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1888. **November.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	– 3.9	—	2.6	4.0	6.5	3.4	4.5	5.8	3.0	4.0	4.7	2.5	4.1	5.4
2	– 3.6	—	2.5	3.9	6.4	3.2	4.6	5.8	3.0	4.0	4.8	2.3	3.6	5.2
3	– 3.2	✱ 6.5	2.4	3.8	6.3	3.1	4.5	5.8	2.9	3.9	4.6	2.5	4.0	5.2
4	– 9.6	—	2.3	3.7	6.2	3.0	4.5	5.8	2.8	3.8	4.6	2.5	3.9	5.2
5	– 6.5	—	2.2	3.6	6.1	2.8	4.3	5.8	2.8	3.8	4.6	2.5	3.8	5.2
6	– 2.3	—	2.2	3.5	6.0	2.8	4.3	5.8	2.7	3.8	4.6	2.5	3.8	5.2
7	– 2.0	—	2.1	3.4	5.9	2.8	4.1	5.6	2.6	3.6	4.5	2.3	3.8	5.0
8	– 6.5	—	2.0	3.3	5.8	2.8	4.1	5.5	2.5	3.6	4.4	2.3	3.7	5.0
9	– 7.8	—	2.0	3.2	5.8	2.6	4.0	5.5	2.4	3.6	4.4	2.1	3.6	5.0
10	4.4	—	1.9	3.1	5.7	2.6	3.9	5.4	2.4	3.4	4.2	2.1	3.6	4.8
11	– 5.7	—	1.9	3.1	5.6	2.6	3.9	5.4	2.4	3.4	4.2	2.1	3.6	5.0
12	– 4.7	—	1.9	3.0	5.6	2.7	3.7	5.2	2.3	3.4	4.2	1.9	3.5	4.8
13	– 1.4	—	1.8	3.0	5.5	2.4	3.7	5.2	2.2	3.3	4.2	1.9	3.4	4.8
14	– 0.2	—	1.8	2.9	5.4	2.4	3.7	5.2	2.2	3.2	4.2	1.9	3.4	4.8
15	1.0	● 0.4	1.7	2.8	5.3	2.4	3.6	5.0	2.1	3.2	4.0	1.9	3.4	4.8
16	2.7	● 6.3	1.7	2.8	5.2	2.4	3.5	5.1	2.0	3.2	4.0	1.9	3.4	4.8
17	5.0	● 1.8	1.6	2.7	5.2	2.4	3.5	5.0	2.0	3.1	4.0	1.5	3.3	4.5
18	1.6	—	1.6	2.7	5.1	2.3	3.5	4.9	2.0	3.1	4.0	1.6	3.2	4.6
19	0.7	● 12.8	1.6	2.6	5.0	2.3	3.4	4.8	2.0	3.0	4.0	1.5	3.2	4.5
20	1.5	✱ 1.6	1.6	2.6	5.0	2.2	3.3	4.8	2.0	3.0	4.0	1.4	3.1	4.4
21	– 4.0	—	1.6	2.5	4.9	2.2	3.3	4.8	1.8	2.8	4.0	1.3	3.0	4.4
22	– 2.9	✱ 1.2	1.6	2.5	4.8	2.2	3.3	4.8	1.8	2.6	4.0	1.7	3.0	4.4
23	0.4	—	1.6	2.4	4.8	2.2	3.2	4.6	1.8	2.8	4.0	1.7	3.0	4.2
24	– 0.9	● 0.2	1.6	2.4	4.7	2.2	3.1	4.6	1.8	2.8	3.8	1.7	2.8	4.4
25	– 3.1	✱ 1.2	1.6	2.4	4.7	2.2	3.1	4.6	1.8	2.8	3.8	1.7	2.8	4.4
26	1.3	✱ ● 1.6	1.6	2.4	4.6	2.1	3.3	4.5	1.8	2.8	3.9	1.7	2.9	4.2
27	– 1.2	✱ ● 2.9	1.6	2.4	4.6	2.2	3.1	4.6	1.6	2.6	3.8	1.7	2.8	4.4
28	– 3.7	✱ 1.5	1.5	2.3	4.5	2.2	2.9	4.4	1.6	2.6	3.6	1.7	2.8	4.2
29	– 1.8	✱ 4.1	1.5	2.3	4.5	2.2	2.9	4.4	1.6	2.6	3.6	1.7	2.8	4.2
30	– 3.6	—	1.4	2.2	4.4	2.2	2.9	4.4	1.6	2.6	3.6	1.7	2.8	4.2
		42.1												
Mittel	**– 2.00**	**✱ 18.3**	**1.83**	**2.92**	**5.34**	**2.50**	**3.66**	**5.10**	**2.18**	**3.21**	**4.14**	**1.93**	**3.34**	**4.71**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1888. **December.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			128-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 1.4	—	1.4	2.2	4.4	2.0	2.9	4.2	1.6	2.6	3.5	1.7	2.8	4.0
2	0.7	—	1.4	2.2	4.3	2.0	2.9	4.2	1.6	2.6	3.5	1.7	2.8	4.0
3	0.5	—	1.4	2.2	4.3	2.0	2.9	4.2	1.6	2.6	3.5	1.7	2.8	4.0
4	1.3	● 2.1	1.4	2.1	4.2	2.0	2.9	4.2	1.6	2.6	3.4	1.7	2.8	4.0
5	2.7	● 0.4	1.4	2.1	4.2	2.0	2.9	4.2	1.6	2.6	3.4	1.7	2.8	4.0
6	3.7	● 3.4	1.4	2.1	4.2	2.0	2.9	4.0	1.6	2.4	3.4	1.7	2.6	3.9
7	1.4	● 0.8	1.4	2.0	4.1	2.0	2.7	4.0	1.6	2.4	3.4	1.7	2.6	3.9
8	2.3	—	1.4	2.0	4.1	2.0	2.7	4.0	1.6	2.4	3.4	1.5	2.6	3.8
9	0.2	—	1.4	2.0	4.0	2.0	2.7	4.0	1.6	2.4	3.4	1.5	2.6	3.8
10	− 2.7	✳ 0.2	1.4	2.0	4.0	1.8	2.7	4.0	1.4	2.4	3.4	1.1	2.6	3.8
11	− 12.3	—	1.4	2.0	4.0	1.8	2.5	4.0	1.4	2.4	3.2	1.3	2.4	3.8
12	− 12.7	—	1.3	2.0	4.0	1.8	2.5	4.0	1.4	2.3	3.2	1.3	2.4	3.8
13	− 2.4	—	1.3	2.0	3.9	1.8	2.5	4.0	1.4	2.2	3.4	1.3	2.4	3.8
14	− 0.8	—	1.3	2.0	3.9	1.7	2.5	3.8	1.4	2.2	3.1	1.3	2.5	3.6
15	− 3.3	—	1.2	2.0	3.9	1.6	2.5	3.8	1.2	2.2	3.0	1.1	2.0	3.8
16	− 5.5	✳ 0.6	1.2	2.0	3.8	1.6	2.5	3.8	1.2	2.2	3.0	1.1	2.2	3.7
17	− 9.9	✳ 0.5	1.2	1.9	3.8	1.6	2.5	3.8	1.2	2.2	3.1	1.1	2.4	3.6
18	1.2	—	1.1	1.9	3.8	1.5	2.4	3.6	1.2	2.2	3.0	1.1	2.4	3.5
19	− 1.6	—	1.1	1.8	3.7	1.6	2.5	3.8	1.2	2.2	3.1	1.1	2.4	3.6
20	− 4.1	✳ 0.8	1.1	1.8	3.7	1.6	2.5	3.8	1.2	2.2	3.1	1.1	2.3	3.6
21	− 7.2	✳ 0.7	1.0	1.7	3.7	1.6	2.5	3.8	1.2	2.2	3.1	1.1	2.2	3.6
22	− 8.3	✳ 0.4	1.0	1.7	3.6	1.4	2.5	3.8	1.2	2.2	3.0	0.9	2.4	3.6
23	− 12.1	✳ 0.4	1.0	1.6	3.6	1.4	2.3	3.6	1.0	2.0	3.0	0.9	2.0	3.4
24	− 11.9	✳ 1.6	1.0	1.6	3.6	1.4	2.3	3.6	1.0	2.0	3.0	0.9	2.0	3.4
25	− 9.5	—	1.0	1.6	3.6	1.4	2.2	3.6	1.0	2.0	3.0	0.9	2.0	3.4
26	− 9.9	—	0.9	1.6	3.5	1.4	2.1	3.6	1.0	2.0	3.0	0.9	2.0	3.4
27	− 8.7	—	0.9	1.6	3.5	1.4	2.3	3.4	1.0	2.0	3.0	0.7	2.0	3.4
28	− 1.5	—	0.9	1.6	3.4	1.4	2.3	3.4	1.0	1.8	3.0	0.7	2.0	3.4
29	− 2.7	✳ 0.6	0.8	1.6	3.4	1.4	2.1	3.4	1.0	1.8	2.9	0.7	2.0	3.2
30	− 6.7	—	0.8	1.5	3.4	1.2	2.1	3.4	0.8	1.8	3.0	0.5	2.0	3.2
31	− 8.7	—	0.8	1.5	3.4	1.1	2.1	3.2	1.0	1.8	2.8	0.6	2.0	3.2
		12.5												
Mittel	− 4.18	✳ 5.8	**1.17**	**1.87**	**3.84**	**1.66**	**2.51**	**3.81**	**1.28**	**2.22**	**3.17**	**1.18**	**2.35**	**3.65**
Jahres mittel	**2.13**	**475.3**	**5.01**	**4.75**	**4.96**	**4.78**	**4.56**	**4.51**	**2.82**	**2.96**	**3.16**	**3.42**	**3.43**	**3.89**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1889. **Januar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 7.2	—	0.8	1.4	3.4	1.1	2.1	3.3	0.9	1.8	2.9	0.6	2.0	3.2
2	− 2.5	⚹ 1.0	0.8	1.4	3.4	1.2	2.1	3.4	0.8	1.8	3.0	0.7	2.0	3.2
3	− 0.3	—	0.8	1.4	3.3	1.2	2.1	3.4	0.8	1.8	3.0	0.5	2.0	3.2
4	1.3	⚹ 0.4	0.8	1.4	3.3	1.2	2.1	3.4	0.7	1.8	3.0	0.5	1.8	3.1
5	1.8	—	0.8	1.4	3.2	1.1	2.0	3.2	0.9	1.6	2.8	0.6	1.8	3.0
6	1.2	—	0.8	1.4	3.2	1.2	2.1	3.2	0.7	1.8	3.0	0.5	1.8	3.0
7	0.9	—	0.8	1.4	3.2	1.1	1.9	3.0	0.6	1.8	3.0	0.5	1.8	3.0
8	− 0.7	⚹ 1.9	0.8	1.4	3.0	1.1	1.9	3.0	0.6	1.8	3.0	0.5	1.8	3.0
9	− 1.9	⚹ 0.8	0.8	1.4	3.0	1.2	1.9	3.2	0.6	1.8	3.0	0.5	1.8	3.0
10	− 5.6	—	0.8	1.4	3.0	1.2	1.9	3.2	0.6	1.8	3.0	0.5	1.8	3.0
11	− 4.5	—	0.8	1.4	3.0	1.2	1.9	3.2	0.8	1.6	2.8	0.5	1.8	3.0
12	− 4.8	⚹ 2.2	0.8	1.3	3.0	1.2	1.9	3.2	0.8	1.6	2.8	0.5	1.8	3.0
13	− 8.3	—	0.8	1.3	3.0	1.2	1.9	3.0	0.8	1.5	2.6	0.6	1.8	3.0
14	− 9.7	—	0.6	1.2	3.0	1.2	1.9	3.0	0.8	1.5	2.6	0.5	1.8	3.0
15	− 10.1	—	0.6	1.2	3.0	1.2	1.9	3.0	0.8	1.5	2.4	0.5	1.8	3.0
16	− 9.1	⚹ 0.6	0.5	1.2	3.0	1.2	1.9	3.0	0.8	1.5	2.4	0.5	1.8	3.0
17	− 5.8	⚹ 0.6	0.5	1.2	3.0	1.2	1.9	3.0	0.8	1.4	2.4	0.5	1.8	3.0
18	− 3.2	⚹ 1.2	0.5	1.2	2.9	1.2	1.9	3.0	0.8	1.5	2.4	0.5	1.8	3.0
19	− 0.3	⚹ 1.5	0.5	1.2	2.9	1.2	1.9	3.0	0.8	1.5	2.6	0.3	1.6	3.0
20	− 3.4	—	0.5	1.2	2.9	1.2	1.9	3.0	0.8	1.4	2.4	0.5	1.6	2.8
21	− 7.5	⚹ 0.4	0.5	1.1	2.9	1.2	1.7	2.8	0.6	1.4	2.4	0.3	1.6	2.8
22	− 11.7	—	0.4	1.1	2.9	1.2	1.7	2.8	0.6	1.4	2.2	0.3	1.6	2.8
23	− 11.1	⚹ 1.4	0.4	1.1	2.9	1.0	1.7	2.8	0.6	1.4	2.0	0.5	1.6	2.6
24	− 4.2	⚹ 0.4	0.3	1.0	2.8	1.0	1.7	2.8	0.6	1.4	2.0	0.1	1.6	2.8
25	− 1.7	⚹ 1.1	0.4	1.0	2.8	1.0	1.7	2.8	0.6	1.4	2.0	0.1	1.5	2.6
26	− 6.5	⚹ 0.2	0.4	1.0	2.8	1.2	1.7	2.8	0.8	1.4	2.2	0.5	1.6	2.6
27	− 8.4	—	0.3	1.0	2.8	1.0	1.7	2.8	0.6	1.4	2.2	0.3	1.6	2.6
28	− 8.8	⚹ 0.1	0.2	1.0	2.7	1.0	1.7	2.8	0.6	1.3	2.1	0.1	1.4	2.6
29	− 15.1	⚹ 1.2	0.2	1.0	2.7	1.0	1.7	2.6	0.6	1.2	2.0	− 0.1	1.4	2.6
30	− 4.6	⚹ 4.2	0.0	1.0	2.7	1.0	1.7	2.6	0.6	1.2	2.0	− 0.1	1.4	2.6
31	− 4.4	⚹ 1.1	0.0	0.9	2.7	1.0	1.7	2.6	0.6	1.2	2.0	− 0.1	1.4	2.6
Mittel	**− 5.04**	**⚹ 20.3**	**0.55**	**1.21**	**2.98**	**1.14**	**1.86**	**3.00**	**0.71**	**1.53**	**2.52**	**0.39**	**1.71**	**2.89**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1889. **Februar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwald.			129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 9.3	✱ 0.1	0.2	0.9	2.6	1.0	1.6	2.5	0.5	1.2	2.0	− 0.1	1.4	2.5
2	−12.2	✱ 0.1	0.2	0.9	2.6	1.0	1.6	2.5	0.5	1.2	2.0	− 0.1	1.4	2.5
3	−17.4	✱ 0.7	0.1	0.8	2.6	0.6	1.5	2.6	0.4	1.2	2.0	0.1	1.4	2.6
4	−15.7	✱ 0.5	0.0	0.8	2.6	1.0	1.4	2.5	0.5	1.2	2.0	− 0.1	1.4	2.5
5	−12.2	✱ 0.3	0.0	0.8	2.6	1.0	1.4	2.5	0.4	1.2	2.0	− 0.1	1.4	2.5
6	− 8.0	—	0.0	0.8	2.6	0.9	1.4	2.5	0.4	1.2	2.0	− 0.3	1.2	2.4
7	−11.5	✱ 0.4	0.0	0.7	2.6	0.9	1.5	2.5	0.4	1.2	2.0	− 0.3	1.2	2.4
8	−15.2	✱ 0.8	− 0.1	0.7	2.5	0.9	1.5	2.5	0.4	1.2	2.0	− 0.3	1.2	2.4
9	−12.9	✱ 0.6	− 0.1	0.7	2.5	0.9	1.5	2.5	0.4	1.2	2.0	− 0.3	1.2	2.4
10	−15.5	✱ 0.1	− 0.1	0.6	2.5	0.9	1.5	2.6	0.4	1.0	2.0	− 0.3	1.2	2.6
11	−16.0	—	− 0.2	0.6	2.4	0.9	1.5	2.4	0.4	1.1	2.0	− 0.4	1.2	2.5
12	**−20.7**	—	− 0.2	0.6	2.4	1.0	1.5	2.6	0.4	1.0	1.8	− 0.5	1.2	2.6
13	− 8.3	✱ 0.4	− 0.2	0.6	2.4	1.0	1.5	2.6	0.4	1.0	2.0	− 0.4	1.2	2.6
14	− 4.7	✱ 5.2	− 0.2	0.6	2.4	0.8	1.5	2.6	0.2	1.0	2.0	− 0.6	1.0	2.4
15	− 4.6	✱ 3.1	− 0.2	0.6	2.4	0.8	1.5	2.4	0.2	1.0	2.0	− 0.5	1.0	2.4
16	− 6.4	—	− 0.1	0.5	2.4	0.8	1.3	2.4	0.4	1.0	2.0	− 0.5	1.2	2.4
17	−13.7	—	0.0	0.5	2.4	0.8	1.3	2.4	0.3	1.0	2.0	− 0.3	1.0	2.4
18	−10.9	✱ 1.9	0.0	0.5	2.4	0.8	1.3	2.4	0.2	1.0	2.0	− 0.3	1.0	2.4
19	− 5.5	✱ 7.8	0.0	0.5	2.3	0.8	1.3	2.4	0.2	1.0	2.0	− 0.4	1.0	2.4
20	−10.0	✱ 1.4	0.0	0.4	2.3	0.8	1.3	2.4	0.2	1.0	2.0	− 0.4	1.0	2.4
21	−11.0	✱ 0.3	0.0	0.4	2.3	0.8	1.3	2.4	0.2	1.0	2.0	− 0.3	1.0	2.4
22	−10.6	—	0.0	0.4	2.2	0.8	1.3	2.4	0.3	1.0	1.8	− 0.3	1.0	2.2
23	−11.0	✱ 2.4	− 0.1	0.4	2.2	0.8	1.3	2.4	0.2	1.0	2.0	− 0.3	1.0	2.0
24	− 5.4	✱ 0.4	− 0.2	0.4	2.2	0.8	1.3	2.4	0.2	1.0	2.0	− 0.3	1.0	2.0
25	− 6.2	—	− 0.2	0.4	2.2	0.8	1.3	2.4	0.2	1.0	2.0	− 0.3	1.0	2.0
26	− 8.3	✱ 1.7	− 0.2	0.4	2.2	0.8	1.3	2.4	0.2	1.0	2.0	− 0.3	1.0	2.0
27	− 6.3	—	− 0.2	0.4	2.1	1.0	1.3	2.3	0.2	1.0	2.0	− 0.2	1.0	2.1
28	− 8.0	—	− 0.2	0.4	2.1	0.8	1.3	2.2	0.3	0.9	1.8	− 0.2	1.0	2.1
Mittel	**−10.63**	**✱ 28.2**	**− 0.07**	**0.58**	**2.39**	**0.86**	**1.40**	**2.45**	**0.32**	**1.06**	**1.98**	**− 0.30**	**1.14**	**2.36**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1889. **Mars.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 10.3	✳ 0.1	− 0.2	0.4	2.1	0.8	1.3	2.2	0.2	0.9	1.8	− 0.2	1.0	2.0
2	− 12.0	—	− 0.2	0.4	2.1	0.8	1.3	2.2	0.2	0.9	1.8	− 0.3	1.0	2.0
3	− 11.0	—	− 0.2	0.4	2.1	0.8	1.3	2.2	0.2	0.9	1.8	− 0.3	1.0	2.0
4	− 16.9	—	− 0.2	0.4	2.1	0.8	1.3	2.2	0.2	0.9	1.8	− 0.4	1.0	2.0
5	− 19.9	—	− 0.4	0.4	2.0	0.8	1.3	2.2	0.2	0.8	1.8	− 0.5	0.8	2.0
6	− 16.4	—	− 0.5	0.4	2.0	0.8	1.3	2.2	0.0	0.8	1.6	− 0.6	0.8	2.0
7	− 9.0	—	− 0.6	0.3	2.0	0.8	1.3	2.2	0.0	0.8	1.6	**− 0.7**	0.9	2.0
8	− 7.3	—	**− 0.7**	0.3	2.0	0.8	1.3	2.2	0.0	0.8	1.6	− 0.7	0.9	2.0
9	− 6.0	—	− 0.6	0.3	2.0	0.8	1.2	2.2	0.2	0.8	1.6	− 0.5	0.9	2.0
10	− 5.7	✳ 2.2	− 0.4	0.3	2.0	0.8	1.3	2.1	0.1	0.8	1.8	− 0.6	0.8	2.0
11	− 2.6	✳ 5.3	− 0.3	0.3	2.0	0.8	1.3	2.1	0.1	0.8	1.8	− 0.6	0.8	2.0
12	− 3.0	✳ 5.2	− 0.1	0.3	1.9	0.8	1.4	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.5	0.8	2.0
13	− 5.0	✳ 0.2	− 0.2	0.2	1.9	0.8	1.2	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.3	0.8	2.0
14	− 12.5	—	− 0.2	0.2	1.9	0.8	1.2	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.3	0.8	2.0
15	− 17.0	—	− 0.2	0.2	1.9	0.8	1.2	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.3	0.8	2.0
16	− 6.0	✳ 5.6	− 0.2	0.2	1.9	0.8	1.2	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.5	0.8	2.0
17	− 7.1	—	− 0.2	0.2	1.9	0.8	1.2	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.5	0.8	2.0
18	− 13.7	—	− 0.2	0.2	1.8	0.7	1.1	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.3	0.8	2.0
19	− 8.8	—	− 0.2	0.2	1.8	0.7	1.1	2.0	0.1	0.8	1.5	− 0.5	0.8	2.0
20	− 5.4	✳ 2.2	− 0.2	0.2	1.8	0.7	1.1	2.0	0.1	0.8	1.4	− 0.5	0.8	2.0
21	− 6.5	✳ 2.7	− 0.2	0.2	1.8	0.7	1.1	2.0	0.1	0.8	1.4	− 0.5	0.8	2.0
22	− 6.9	—	− 0.2	0.2	1.8	0.8	1.1	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.4	0.8	2.0
23	− 8.7	—	*− 0.2*	*0.2*	*1.8*	0.8	1.1	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.4	0.8	2.0
24	− 8.0	✳ 0.6	*− 0.2*	*0.2*	*1.8*	0.7	1.1	2.1	0.1	0.8	1.6	− 0.4	0.8	2.0
25	− 3.9	✳ 0.9	− 0.2	0.2	1.8	0.7	1.1	2.1	0.1	0.8	1.4	− 0.4	0.8	2.0
26	− 0.7	—	− 0.2	0.2	1.8	0.7	1.1	2.0	**0.1**	0.8	1.4	− 0.4	0.8	2.0
27	− 0.1	—	− 0.1	0.2	1.7	**0.6**	1.1	2.0	0.1	0.8	1.4	− 0.3	0.8	2.0
28	− 3.6	—	− 0.1	0.2	1.7	0.7	1.1	2.1	0.1	0.8	1.4	− 0.2	0.8	2.0
29	− 1.6	✳ 0.1	0.0	0.2	1.7	0.7	1.1	2.0	0.2	0.8	1.6	− 0.1	0.6	1.9
30	− 4.0	—	0.0	0.2	1.7	0.8	1.1	2.0	0.2	0.8	1.4	− 0.1	0.8	2.0
31	− 8.1	—	0.0	0.2	1.7	0.8	1.1	2.0	0.2	1.0	1.6	− 0.1	0.8	2.0
Mittel	**− 7.99**	**✳ 25.1**	**− 0.24**	**0.26**	**1.89**	**0.76**	**1.19**	**2.07**	**0.15**	**0.82**	**1.60**	**− 0.40**	**0.83**	**2.00**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1889. **April.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwald.			Heinäis. 129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	– 9.6	—	0.0	0.2	1.7	0.6	1.1	2.0	0.2	0.8	1.4	– 0.3	0.8	2.0
2	– 4.1	—	0.0	0.2	1.7	0.6	1.1	2.0	0.4	0.8	1.4	– 0.3	1.0	2.0
3	– 3.3	—	0.0	0.2	1.7	0.7	1.1	2.0	0.2	0.8	1.4	– 0.3	0.8	2.0
4	2.0	—	0.0	0.2	1.6	0.7	1.1	2.0	0.2	0.8	1.4	– 0.3	0.8	1.8
5	2.6	—	0.1	0.2	1.6	0.8	1.1	2.0	0.4	0.8	1.4	0.1	1.0	2.0
6	1.2	✳● 1.0	0.1	0.2	1.6	0.7	1.1	1.8	0.2	0.8	1.4	– 0.1	0.8	1.8
7	1.4	—	0.2	0.2	1.6	0.7	1.1	1.8	0 2	0.8	1.4	– 0.1	0.8	1.8
8	1.7	—	0.3	0.2	1.6	0.7	1.1	1.8	0.2	0.8	1.4	0.0	0.8	1.8
9	2.6	—	0.3	0.2	1.6	0.8	1.1	1.8	0.2	0.8	1.4	0.0	0.8	1.8
10	0.5	—	0.3	0.2	1.6	0.8	1.1	1.8	0.2	0.8	1.4	0.1	0.8	1.8
11	– 1.7	—	0.4	0.2	1.6	0.8	1.1	1.8	0.3	0.8	1.4	0.1	0.8	1.8
12	– 1.4	—	0.4	0.2	1.5	0.8	1.1	1.8	0.3	0.7	1.4	0.1	0.7	1.8
13	1.0	—	0.4	0.2	1.5	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.4	0.1	0.7	1.8
14	3.8	✳● 1.6	0.5	0.2	1.5	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.4	0.3	0.8	1.8
15	– 0.2	✳ 0.2	0.5	0.2	1.5	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.4	0.1	0.7	1.8
16	– 1.1	—	0.5	0.2	1.4	0.8	1.1	1.8	0.5	0.7	1.4	0.3	0.7	1.8
17	– 0.1	—	0.5	0.2	1.4	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.4	0.2	0.7	1.8
18	2.4	—	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	2.0	0.3	0.7	1.4	0.3	0.6	1.8
19	3.5	—	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	1.8	0.3	0.7	1.4	0.3	0.6	1.8
20	3.6	—	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	1.8	0.3	0.7	1.4	0.3	0.6	1.8
21	3.1	—	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	2.0	0.6	0.8	1.4	0.3	0.6	2.0
22	3.4	● 1.6	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	2.0	0.4	0.8	1.4	0.3	0.6	2.0
23	4.3	≡ 0.1	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	1.8	0.3	0.7	1.2	0.3	0.6	1.8
24	4.4	—	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	2.0	0.4	0.8	1.4	0.3	0.6	1.8
25	4.7	—	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.8
26	5.0	—	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.4	0.3	0.6	1.8
27	4.4	—	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.8
28	6.5	—	0.6	0.2	1.4	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.4	0.4	0.6	1.8
29	6.7	—	0.6	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.4	0.3	0.6	1.8
30	4.8	● 0.1	0.6	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.5	0.6	1.6
		4.6												
Mittel	**1.74**	✳ **2.0**	**4.10**	**0.20**	**1.49**	**0.77**	**1.10**	**1.86**	**0.34**	**0.75**	**1.37**	**0.14**	**0.71**	**1.83**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1889. **Mai.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	6.5	—	0.6	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.4	0.3	0.6	1.8
2	7.2	—	0.6	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.6
3	9.5	—	0.7	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.3	0.8	1.2	0.3	0.6	1.8
4	10.8	—	0.7	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.6
5	10.7	● 0.1	0.7	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.8
6	5.6	—	0.7	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.8
7	5.4	✳● 7.0	0.7	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.8
8	7.3	⌂ 0.1	0.7	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.6
9	12.3	● 0.1	0.8	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.6
10	15.5	● 0.1	0.8	0.2	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.6
11	14.8	● 1.0	1.0	0.3	1.3	0.9	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.8
12	11.6	● 0.5	1.0	0.3	1.3	1.0	1.1	1.6	0.4	0.7	1.2	0.4	0.6	1.6
13	15.1	● 1.4	1.1	0.3	1.3	0.8	1.1	1.8	0.4	0.7	1.2	0.3	0.6	1.6
14	10.9	● 4.6	1.3	0.4	1.2	1.0	1.1	1.8	0.4	0.7	1.3	0.5	0.6	1.5
15	11.7	● 2.2	1.4	0.4	1.2	1.1	1.2	1.8	0.4	0.7	1.2	0.5	0.6	1.5
16	4.3	● 0.1	1.5	0.4	1.2	1.2	1.2	1.8	0.4	0.7	1.2	0.5	0.6	1.5
17	6.5	—	1.6	0.4	1.2	1.6	1.3	1.8	0.4	0.7	1.2	0.4	0.6	1.6
18	9.3	—	1.8	0.4	1.2	1.8	1.3	1.8	0.4	0.7	1.4	0.4	0.6	1.6
19	6.5	—	2.0	0.4	1.2	1.6	1.5	1.8	0.4	0.7	1.2	0.5	0.6	1.5
20	8.8	—	2.2	0.4	1.2	2.0	1.7	1.8	0.4	0.7	1.2	0.5	0.6	1.5
21	13.0	● 0.2	2.5	0.4	1.2	3.4	1.9	1.9	0.4	0.8	1.4	0.5	0.6	1.6
22	17.1	—	2.9	0.4	1.2	4.0	2.1	1.8	0.4	0.7	1.1	0.5	0.6	1.5
23	17.0	—	3.8	0.4	1.2	5.0	2.5	1.8	0.4	0.7	1.1	0.7	0.6	1.5
24	14.2	—	4.4	0.6	1.2	5.8	2.9	2.0	0.4	0.7	1.1	0.7	0.6	1.5
25	18.8	—	5.6	0.8	1.2	7.0	3.9	2.4	0.4	0.7	1.1	1.3	0.8	1.6
26	19.6	—	6.6	1.2	1.2	7.7	4.1	2.4	0.4	0.7	1.1	1.3	0.8	1.6
27	18.9	● 0.4	7.6	2.0	1.2	8.3	4.4	2.4	0.4	0.7	1.2	1.5	0.9	1.6
28	18.5	● 2.4	8.4	2.8	1.3	8.4	4.3	2.6	0.4	0.7	1.1	1.9	1.2	1.8
29	18.5	—	9.2	3.2	1.4	8.8	4.7	2.5	0.4	0.8	1.0	1.9	1.0	1.6
30	21.2	● 12.8	9.8	3.8	1.5	9.4	5.1	2.6	0.4	0.7	1.1	2.6	1.2	1.8
31	17.4	● 7.2	10.8	4.8	1.6	10.0	5.5	2.8	0.4	0.7	1.1	3.9	2.1	1.6
Mittel	12.40	40.2	3.02	0.85	1.27	3.19	2.10	2.00	0.40	0.71	1.19	0.78	0.72	1.63

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1889. **Juni.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	13.5	—	11.2	5.8	1.8	10.2	5.9	3.0	0.6	1.0	1.0	5.4	1.8	2.0
2	12.9	—	11.4	6.2	2.0	10.4	6.1	3.0	0.6	0.7	1.0	5.9	2.4	2.0
3	12.7	—	11.8	6.8	2.4	10.6	6.1	3.0	0.6	0.8	1.2	6.3	2.6	2.0
4	12.8	—	12.2	7.4	2.5	10.8	6.5	3.4	0.8	0.8	1.0	6.7	3.0	2.2
5	12.0	—	12.4	7.6	2.8	10.6	6.7	3.6	1.2	0.7	1.2	6.3	3.4	2.4
6	13.8	—	12.6	7.9	3.0	11.0	7.1	3.8	1.1	0.7	1.1	7.3	3.6	2.6
7	10.5	● 14.2	12.8	8.2	3.2	11.2	7.3	3.8	1.4	0.7	1.2	7.7	3.7	2.6
8	7.2	—	13.2	8.6	3.5	11.4	7.5	4.0	2.4	0.8	1.2	7.7	3.8	3.0
9	7.5	● 0.4	13.4	9.0	3.8	11.8	7.7	4.2	2.8	0.9	1.2	7.7	4.2	3.4
10	6.1	● 8.2	13.4	9.4	4.0	12.4	7.7	4.4	2.8	0.9	1.2	7.9	4.6	3.6
11	13.2	● 0.2	13.4	9.8	4.2	11.8	7.9	4.4	4.2	2.0	1.4	7.9	4.6	3.6
12	14.9	● 0.2	13.4	10.0	4.4	12.0	8.3	4.5	4.6	2.4	1.4	8.1	4.8	3.4
13	14.8	—	13.4	10.0	4.6	11.8	8.3	4.6	4.8	2.8	1.6	7.9	4.8	3.4
14	19.3	⌓ 0.1	13.2	9.8	4.8	11.8	8.3	4.8	5.1	3.0	1.6	7.9	4.8	3.4
15	19.7	⌓ 0.1	13.6	9.9	5.0	11.8	8.5	4.8	5.4	3.4	1.6	8.1	5.0	3.6
16	19.8	—	14.0	10.4	5.2	12.0	8.8	5.0	6.0	3.6	1.8	8.5	5.1	3 6
17	17.4	● 33.0	14.4	10.4	5.4	12.2	8.7	5.0	6.2	3.8	2.0	8.7	5.2	3.6
18	17.3	—	14.5	10.4	5.5	12.4	8.9	5.2	7.0	4.0	2.0	9.9	5.4	3.8
19	22.1	—	14.4	10.8	5.6	12.4	8.9	5.2	7.4	4.4	2.1	8.3	5.3	4.0
20	19.0	● 0.1	14.6	10.8	5.8	12.8	9.3	5.2	7.2	4.6	2.2	9.9	5.8	4.0
21	16.2	—	14.8	11.0	6.0	13.2	9.3	5.4	8.2	5.0	2.4	10.1	5.9	4.0
22	13.1	—	14.4	11.2	6.2	13.8	9.3	5.5	8.6	5.2	2.5	10.3	6.2	4.0
23	13.7	—	14.2	11.3	6.3	*13.7*	*9.3*	*5.6*	*8.5*	*5.4*	*2.6*	*10.4*	*6.3*	*4.0*
24	17.4	—	14.2	11.4	6.4	13.6	9.3	5.8	8.4	5.6	2.7	10.5	6.4	4.0
25	18.3	—	14.2	11.6	6.6	12.6	9.5	6.0	7.6	5.8	2.6	9.5	6.4	4.4
26	14.1	—	14.4	11.6	6.8	12.8	9.7	6.2	8.0	5.6	3.0	9.7	6.4	4.6
27	15.8	—	14.4	11.6	6.9	12.8	9.7	6.2	8.1	5.8	3.0	9.7	6.4	4.6
28	16.7	—	14.6	11.7	7.0	12.8	9.7	6.2	8.0	5.8	3.0	9.7	6.4	4.6
29	14.6	—	14.6	11.8	7.1	12.8	9.9	6.4	8.0	6.0	3.2	9.5	6.6	4.8
30	17.3	—	14.7	11.8	7.2	12.8	9.9	6.6	8.0	5.8	3.4	9.7	6.6	4.8
Mittel	**14.79**	**56.5**	**13.59**	**9.81**	**4.87**	**12.08**	**8.34**	**4.83**	**5.12**	**3.27**	**1.91**	**8.44**	**4.92**	**3.53**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1889. **Juli.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala.			Heinäis.								
			Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	19.9	—	14.8	11.9	7.3	*12.9*	*10.0*	*6.7*	*8.2*	*6.0*	*3.5*	*9.8*	*6.7*	*4.9*
2	18.0	—	14.8	12.0	7.4	*13.0*	*10.0*	*6.8*	*8.4*	*6.1*	*3.6*	*10.0*	*6.8*	*4.9*
3	13.6	● 1.4	14.9	12.0	7.5	*13.0*	*10.1*	*6.9*	*8.6*	*6.3*	*3.6*	*10.1*	*7.0*	*5.0*
4	19.2	—	15.0	12.1	7.6	*13.1*	*10.2*	*6.9*	*8.9*	*6.4*	*3.7*	*10.3*	*7.0*	*5.0*
5	20.2	—	15.0	12.2	7.6	*13.2*	*10.3*	*7.0*	*9.1*	*6.5*	*3.7*	*10.5*	*7.1*	*5.1*
6	**23.7**	● 5.1	15.0	12.2	7.7	*13.2*	*10.3*	*7.0*	*9.3*	*6.6*	*3.8*	*10.7*	*7.2*	*5.1*
7	16.1	● 1.8	15.1	12.3	7.8	*13.3*	*10.4*	*7.1*	*9.5*	*6.7*	*3.8*	*10.9*	*7.3*	*5.2*
8	16.4	● 0.6	15.2	12.3	7.9	*13.4*	*10.4*	*7.1*	*9.7*	*6.8*	*3.9*	*11.1*	*7.4*	*5.3*
9	15.9	—	**15.2**	12.4	8.0	*13.4*	*10.5*	*7.2*	*9.9*	*6.9*	*4.0*	*11.3*	*7.5*	*5.3*
10	15.6	—	15.2	12.4	8.1	*13.5*	*10.6*	*7.2*	*10.0*	*6.9*	*4.0*	*11.4*	*7.5*	*5.4*
11	16.3	● 4.7	15.1	12.5	8.2	*13.4*	*10.6*	*7.3*	*10.0*	*7.0*	*4.1*	*11.3*	*7.5*	*5.4*
12	12.1	● 0.9	15.0	12.5	8.3	*13.2*	*10.6*	*7.3*	*9.8*	*7.0*	*4.1*	*11.0*	*7.6*	*5.5*
13	8.8	—	14.6	12.4	8.4	*13.0*	*10.6*	*7.4*	*9.6*	*7.0*	*4.2*	*10.8*	*7.6*	*5.5*
14	12.9	—	14.4	12.4	8.5	*12.7*	*10.6*	*7.4*	*9.3*	*7.0*	*4.2*	*10.6*	*7.6*	*5.6*
15	14.6	—	13.8	12.2	8.6	*12.5*	*10.5*	*7.4*	*9.1*	*7.0*	*4.3*	*10.4*	*7.6*	*5.6*
16	13.2	—	13.9	12.2	8.7	*12.5*	*10.5*	*7.5*	*9.2*	*7.0*	*4.3*	*10.4*	*7.6*	*5.7*
17	14.4	● 2.8	14.0	12.2	8.8	*12.6*	*10.5*	*7.5*	*9.2*	*7.0*	*4.4*	*10.5*	*7.7*	*5.7*
18	14.2	● 8.8	14.0	12.1	8.8	*12.8*	*10.6*	*7.6*	*9.4*	*7.0*	*4.4*	*10.5*	*7.7*	*5.8*
19	14.0	● 3.1	14.2	12.1	8.9	*12.9*	*10.6*	*7.6*	*9.5*	*7.1*	*4.5*	*10.6*	*7.8*	*5.8*
20	15.3	● 0.2	14.2	12.2	8.9	*12.9*	*10.7*	*7.7*	*9.5*	*7.2*	*4.5*	*10.7*	*7.8*	*5.9*
21	16.3	—	14.2	12.2	9.0	*12.8*	*10.7*	*7.7*	*9.6*	*7.3*	*4.5*	*10.8*	*7.9*	*5.9*
22	14.5	● 17.4	14.0	12.2	9.0	*12.8*	*10.8*	*7.8*	*9.7*	*7.4*	*4.6*	*10.9*	*7.9*	*6.0*
23	13.4	● 6.3	14.1	12.2	9.1	*12.9*	*10.8*	*7.8*	*9.7*	*7.4*	*4.6*	*10.9*	*8.0*	*6.0*
24	14.1	● 1.1	14.2	12.3	9.1	*12.9*	*10.9*	*7.9*	*9.8*	*7.5*	*4.7*	*11.0*	*8.1*	*6.0*
25	14.2	● 8.8	14.2	12.3	9.2	*13.0*	*10.9*	*7.9*	*9.9*	*7.6*	*4.7*	*11.2*	*8.2*	*6.1*
26	14.4	● 1.1	14.2	12.4	9.2	*13.1*	*11.0*	*7.9*	*9.9*	*7.7*	*4.8*	*11.3*	*8.3*	*6.1*
27	16.1	● 5.8	14.3	12.5	9.2	*13.2*	*11.0*	*8.0*	*10.0*	*7.8*	*4.8*	*11.3*	*8.4*	*6.2*
28	18.1	● 0.5	14.4	12.6	9.3	*13.3*	*11.1*	*8.0*	*10.1*	*7.9*	*4.9*	*11.4*	*8.4*	*6.2*
29	20.3	—	14.6	12.7	9.3	*13.4*	*11.1*	*8.0*	*10.1*	*8.0*	*4.9*	*11.5*	*8.5*	*6.3*
30	17.0	● 13.2	14.8	12.8	9.4	*13.5*	*11.2*	*8.1*	*10.2*	*8.0*	*5.0*	*11.6*	*8.5*	*6.3*
31	12.7	● 1.1	15.0	12.9	9.4	*13.6*	*11.2*	*8.1*	*10.2*	*8.1*	*5.0*	*11.6*	*8.6*	*6.4*
Mittel	**15.66**	**84.7**	**14.56**	**12.31**	**8.52**	**13.06**	**10.62**	**7.06**	**9.53**	**7.10**	**4.29**	**10.85**	**7.70**	**5.65**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1889. **Augusti.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.2	2.0
1	13.8	—	14.8	12.9	9.4	13.7	11.3	8.2	10.2	8.2	5.1	**11.6**	8.6	6.4
2	14.9	—	15.0	13.0	9.4	13.8	11.3	8.2	10.1	8.2	5.1	11.3	8.6	6.4
3	16.2	● 0.2	15.0	13.0	9.5	13.4	11.3	8.4	9.8	8.0	5.4	11.1	8.4	6.6
4	15.7	● 4.5	14.9	13.0	9.5	13.1	11.3	8.4	9.8	8.0	5.4	11.1	8.4	6.6
5	15.2	● 15.5	15.0	13.0	9.6	13.8	11.3	8.4	10.0	8.2	5.4	11.3	8.4	6.6
6	16.1	● 0.7	15.2	13.1	9.6	13.8	11.3	8.4	10.2	8.2	5.4	11.3	8.4	6.6
7	15.7	—	**15.2**	13.1	9.7	**14.0**	11.5	8.4	10.4	8.2	5.5	11.5	8.6	6.6
8	15.0	● 4.2	15,2	13.2	9.8	14.0	11.5	8.5	**10.4**	8.3	5.5	11.5	8.6	6.6
9	13.2	● 4.4	15.0	**13.2**	9.9	13.8	**11.5**	8.6	10.3	8.4	5.5	11.5	8.8	6.6
10	12.3	● 5.5	14.8	13.2	9.9	13.6	11.5	8.6	10.2	8.4	5.6	11.3	8.8	6.8
11	13.1	—	14.5	13.2	10.0	13.2	11.5	8.6	10.0	8.4	5.8	10.9	8.8	6.8
12	14.7	● 7.6	14.4	13.0	10.0	12.8	11.3	8.8	9.6	8.4	5.8	11.1	8.6	6.8
13	13.2	● 6.8	14.2	12.7	10.0	13.0	11.3	8.8	9.8	8.2	5.8	10.7	8.8	6.8
14	13.2	● 10.2	14.2	12.8	10.0	13.2	11.3	8.8	9.8	8.2	5.8	10.9	8.8	6.8
15	12.7	● 0.4	14.1	12.8	10.1	13.2	11.3	8.8	10.0	8.3	6.0	10.9	8.6	6.8
16	12.7	● 0.9	14.2	12.8	10.1	13.2	11.3	8.8	10.0	8.3	6.0	11.1	8.8	7.0
17	13.2	● 5.7	14.1	12.8	10.2	13.2	11.3	8.8	10.0	8.4	6.0	11.1	8.8	7.0
18	14.1	● 0.8	14.0	12.7	10.2	13.2	11.3	8.8	10.0	8.4	6.0	11.1	8.8	7.0
19	13.1	●, 0.4	14.0	12.7	10.2	13.2	11.3	8.8	10.0	8.4	6.0	11.1	8.8	7.0
20	13.7	● 0.1	14.0	12.6	10.2	13.0	11.3	9.0	10.0	8.4	6.0	11.1	8.8	7.0
21	13.8	● 2.5	13.9	12.6	10.3	12.7	11.3	9.0	9.8	8.4	6.0	10.7	8.8	7.0
22	14.5	● 2.3	13.9	12.6	10.3	12.7	11.3	9.0	9.8	8.4	6.0	10.7	8.8	7.0
23	13.5	● 5.8	13.8	12.5	10.3	13.0	11.2	9.0	10.0	8.4	6.0	10.9	8.8	7.2
24	13.9	⌓ 0.1	13.8	12.4	10.4	12.8	11.3	9.0	10.0	8.2	6.0	10.9	8.8	7.2
25	12.7	● 0.3	13.8	12.4	10.4	12.8	11.3	9.0	10.0	8.0	6.0	10.9	8.8	7.2
26	11.9	● 4.7	13.8	12.4	10.4	12.8	11.3	9.0	10.0	8.2	6.0	10.9	8.8	7.2
27	12.2	● 0.9	13.7	12.4	10.4	12.8	11.3	9.0	9.8	8.4	6.0	10.9	8.8	7.2
28	12.3	● 0.1	12.7	12.3	10.4	12.6	11.1	9.0	9.8	8.4	6.0	10.7	8.8	7.4
29	13.4	● 0.2	13.6	12.3	10.4	12.6	11.1	9.0	9.8	8.4	6.1	10.7	8.8	7.4
30	14.8	● 1.2	13.5	12.3	10.4	12.6	11.1	9.0	9.8	8.4	6.1	10.7	9.0	7.4
31	13.9	● 2.4	13.4	12.2	10.4	12.6	11.1	9.0	9.8	8.3	6.1	10.7	9.0	7.4
Mittel	**13.83**	**88.4**	**14.28**	**12.75**	**10.05**	**13.17**	**11.30**	**8.75**	**9.97**	**8.29**	**5.79**	**11.04**	**8.72**	**6.92**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1889. **September.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	9.9	● 0.2	13.4	12.2	10.4	12.8	11.1	9.0	10.0	8.4	6.2	10.9	9.2	7.4
2	9.2	● 1.4	13.2	12.1	10.4	12.4	11.1	9.0	9.8	8.6	6.2	10.9	9.2	7.4
3	10.2	● 0.2	12.8	12.0	10.4	12.4	11.1	9.0	9.4	8.4	6.2	10.2	8.8	7.4
4	8.3	● 0.3	12.4	12.0	10.4	12.4	10.9	9.0	9.2	8.3	6.2	10.0	8.8	7.4
5	9.9	● 0.6	12.2	11.8	10.4	12.3	10.8	9.0	9.0	8.2	6.2	9.9	8.6	7.4
6	9.2	● 0.2	12.2	11.8	10.4	11.2	10.7	9.0	8.9	8.1	6.2	9.6	8.6	7.4
7	12.4	● 0.1	12.4	11.8	10.4	11.2	10.7	9.0	8.8	8.0	6.2	9.5	8.6	7.4
8	11.9	● 0.1	12.4	11.7	10.4	11.2	10.7	9.0	8.8	8.0	6.2	9.5	8.6	7.4
9	12.6	—	12.3	11.7	10.4	11.4	10.7	9.0	8.8	8.0	6.2	9.7	8.6	7.4
10	13.7	● 3.7	12.4	11.6	10.3	11.6	10.5	9.0	9.1	8.0	6.2	9.9	8.5	7.4
11	5.0	● 0.8	11.8	11.4	10.3	11.6	10.5	9.0	9.2	8.0	6.2	9.9	8.5	7.4
12	4.1	—	11.4	11.2	10.3	11.4	10.5	9.0	9.2	8.0	6.2	9.9	8.5	7.5
13	5.2	● 0.6	11.0	11.0	10.2	11.4	10.6	9.0	8.3	7.9	6.2	8.9	8.4	7.4
14	3.2	● 0.8	10.4	10.8	10.2	10.7	10.2	9.0	8.0	7.6	6.4	8.5	8.0	7.6
15	4.4	● 0.4	10.1	10.5	10.2	*10.3*	*10.0*	9 0	7.8	7.6	6.4	8.7	8.0	7.6
16	5.0	● 0.2	10.0	10.4	10.1	9.8	9.9	9.0	7.6	7.4	6.4	7.9	7.8	7.4
17	7.7	● 0.1	10.0	10.2	10.1	9.4	9.9	9.0	7.2	7.4	6.4	8.1	7.8	7.4
18	8.6	● 0.1	10.2	10.1	10.0	9.2	9.9	9.0	7.2	7.4	6.4	7.7	7.8	7.6
19	9.3	—	10.0	10.0	10.0	9.2	9.9	9.0	7.2	7.4	6.4	7.7	7.8	7.6
20	7.3	● 8.1	9.8	9 8	9.9	9.2	9.9	8.8	7.2	7.4	6.4	7.7	7.6	7.6
21	7.2	● 4.0	9.9	9.7	9.9	9.2	9.7	8.8	7.2	7.2	6.2	7.7	7.6	7.4
22	7.2	● 7.6	9.6	9.6	9.8	9.0	9.3	8.6	7.3	7.1	6.2	7.7	7.6	7.2
23	6.0	● 2.0	9.6	9.6	9.8	9.0	9.2	8.4	7.2	7.0	6.2	7.7	7.5	7.1
24	5.8	● 3.5	9.6	9.5	9.7	9.0	9.1	8.4	7.2	7.0	6.2	7.7	7.4	7.0
25	8.5	● 0.9	9.5	9.4	9.6	8.8	8.9	8.4	7.0	7.0	6.2	7.5	7.4	7.0
26	10.2	● 10.6	9.5	9.4	9.6	8.8	8.9	8.4	7.2	7.0	6.2	7.5	7.4	7.0
27	8.6	● 5.1	9.4	9.3	9.5	9.0	8.9	8.4	7.2	6.8	6.0	7.9	7.4	7.0
28	8.7	● 10.4	9.4	9.4	9.4	9.0	8.9	8.4	7.3	6.8	6.0	7.9	7.4	7.0
29	9.2	● 0.2	9.4	9.4	9.4	9.4	8.9	8.4	7.4	6.8	6.0	8.1	7.4	7.0
30	9.5	● 2.3	9.4	9.4	9.4	9.4	8.9	8.4	7.6	6.8	6.0	8.3	7.4	7.0
Mittel	8.27	64.5	10.86	10.63	10.04	10.39	10.01	8.81	8.11	7.59	6.22	8.77	8.07	7.33

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1889. **October.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala.			Heinäis.								
			Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	11.2	● 0.1	9.6	9.4	9.4	9.4	8.9	8.2	7.6	7.0	6.0	8.3	7.4	7.0
2	13.5	● 1.7	9.8	9.4	9.3	9.6	8.9	8.2	7.8	7.0	6.0	8.5	7.4	7.0
3	14.2	● 0.1	10.3	9.4	9.3	9.8	8.9	8.2	8.0	7.0	6.0	8.7	7.6	7.0
4	11.4	● 0.1	10.6	9.6	9.2	10.1	8.9	8.2	8.2	7.0	6.0	8.9	7.6	7.0
5	9.3	● 0.1	10.6	9.6	9.2	10.0	9.1	8.2	8.4	7.1	6.0	8.9	7.8	7.0
6	10.0	—	10.5	9.7	9.2	9.6	9.1	8.2	8.2	7.2	6.0	8.9	7.8	7.0
7	10.5	● 0.1	10.4	9.7	9.2	9.4	9.1	8.0	8.2	7.2	6.0	8.7	7.8	7.0
8	11.1	● 8.0	10.2	9.7	9.2	9.5	8.9	8.0	8.2	7.2	6.0	8.7	7.8	7.0
9	9.7	● 4.4	10.2	9.7	9.2	9.7	8.9	8.0	8.2	7.2	6.0	8.9	7.8	7.0
10	10.8	● 0.1	10.2	9.7	9.2	9.6	8.9	8.0	8.2	7.2	6.0	8.9	7.8	7.0
11	11.2	● 0.6	10.4	9.7	9.2	9 8	8.9	8.0	8.2	7.2	6.0	8.9	7.8	7.0
12	9.8	—	10.4	9.7	9.2	9.8	8.9	8.2	8.4	7.4	6.0	8.7	7.4	7.0
13	11.3	● 0.1	10.4	9.7	9.2	9.8	8.9	8.2	8.4	7.4	6.0	8.9	7.8	7.0
14	9.9	● 0.2	10.2	9.6	9.2	9.8	8.9	8.0	8.2	7.2	6.0	8.9	7.8	7.0
15	10.0	● 0.1	10.2	9.6	9.2	9.6	8.9	8.0	8.2	7.4	6.0	8.7	7.8	7.0
16	7.5	—	10.0	9.4	9.2	9.4	8.9	8.0	8.0	7.4	6.0	8.5	7.8	7.0
17	3.3	● 0.3	9.6	9.4	9.2	8.9	8.9	8.0	8.0	7.4	6.0	8.1	7.8	7.0
18	4.8	● 0.6	9.2	9.2	9.2	8.4	8.9	8.0	7.6	7.4	6.0	7.9	7.6	7.1
19	7.2	● 0.1	8.8	9.2	9.2	8.2	8.7	8.0	7.4	7.3	6.0	7.5	7.5	7.6
20	5.9	—	8.5	9.0	9.2	7.8	8.5	8.0	7.2	7.2	6.0	7.1	7.4	8.0
21	4.3	—	8.2	8.8	9.1	7.8	8.3	8.0	7.1	7.0	6.2	7.2	7.2	7.8
22	1.1	—	7.8	8.6	9.1	7.8	8.3	8.0	7.1	7.0	6.2	7.2	7.0	7.6
23	− 1.0	—	7.4	8.4	9.0	7.2	7.9	8.0	6.8	7.0	6.2	6.3	7.1	7.2
24	− 1.4	—	6.8	8.2	9.0	7.0	7.9	8.0	6.6	6.8	6.2	5.9	7.0	7.0
25	− 5.6	✱ 0.2	6.2	8.0	8.9	6.2	7.8	7.8	5.6	6.6	6.0	5.6	6.8	7.2
26	− 3.0	—	5.7	7.6	8.9	5.4	7.5	7.8	5.2	*6.6*	6.0	5.1	6.6	7.0
27	− 1.6	—	5.2	7.2	8.8	5.2	7.3	7.8	5.0	6.2	6.0	4.9	6.4	7.0
28	6.8	—	4.8	6.7	8.7	4.8	7.0	7.6	4.5	6.0	6.0	4.5	6.2	7.1
29	2.0	✱● 3.3	4.6	6.4	8.6	4.6	6.8	7.6	4.4	6.0	6.0	4.4	6.0	7.2
30	4.2	● 0.9	4.4	6.2	8.5	4.4	6.5	7.4	4.2	6.0	5.8	4.3	5.8	7.0
31	6.1	—	4.2	5.8	8.4	4.4	6.3	7.2	4.0	6.0	5.8	4.1	5.8	7.0
		21.1												
Mittel	**6.60**	**✱ 1.8**	**8.56**	**8.78**	**9.08**	**8.16**	**8.37**	**7.96**	**7.13**	**6.95**	**6.01**	**7.42**	**7.05**	**7.12**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1889. **November.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	2.6	—	4.6	5.8	8.3	4.8	5.9	7.0	4.4	5.4	5.8	3.9	5.4	7.0
2	0.6	✱ 1.4	4.4	5.8	8.2	4.8	6.1	7.2	4.4	5.4	5.8	3.9	5.4	7.0
3	0.1	✱ 0.2	4.4	5.7	8.0	4.8	6.0	7.0	4.3	5.2	5.6	3.9	5.3	7.0
4	3.3	● 2.0	4.4	5.6	7.9	4.8	5.9	7.0	4.2	5.2	5.6	3.9	5.2	7.0
5	3.3	● 1.8	4.4	5.5	7.8	5.0	5.9	6.8	4.4	5.0	5.4	4.1	5.0	6.8
6	4.9	● 2.0	4.6	5.4	7.7	4.8	5.9	6.8	4.2	5.2	5.4	4.1	5.0	6.8
7	1.1	—	4.8	5.4	7.6	5.0	5.9	6.8	4.4	5.0	5.4	4.3	5.0	6.6
8	0.6	✱ 7.4	4.6	5.4	7.5	5.0	5.9	6.6	4.4	5.0	5.4	4.3	5.0	6.6
9	0.4	✱ 1.0	4.4	5.3	7.4	5.0	5.9	6.6	4.4	5.0	5.4	3.9	5.0	6.4
10	0.0	✱ 1.1	4.2	5.2	7.3	5.0	5.9	6.8	4.2	5.0	5.4	3.9	5.0	6.2
11	− 2.3	✱ 0.1	4.0	5.0	7.2	5.0	5.9	6.8	4.2	5.0	5.2	3.9	5.0	6.2
12	1.1	● 0.2	3.8	5.0	7.1	4.4	5.7	6.6	3.9	4.8	5.2	3.7	4.8	6.0
13	2.0	● 0.1	3.7	4.8	7.1	4.2	5.5	6.4	3.6	4.8	5.2	3.7	4.8	6.0
14	− 0.2	✱ 0.2	3.6	4.7	7.0	4.0	5.3	6.4	3.6	4.6	5.2	3.5	4.8	6.0
15	0.7	✱ 0.2	3.6	4.5	6.9	4.0	5.3	6.4	3.6	4.4	5.2	3.3	4.6	5.8
16	2.0	● 0.1	3.5	4.6	6.8	3.8	5.3	6.2	3.4	4.4	5.0	3.3	4.6	5.8
17	2.5	—	3.4	4.4	6.8	3.8	5.0	6.2	3.4	4.4	5.0	3.3	4.6	6.0
18	3.3	—	3.4	4.3	6.7	3.7	4.9	6.0	3.4	4.4	5.0	3.3	4.4	6.0
19	4.8	—	3.5	4.3	6.6	3.6	4.7	6.0	3.4	4.4	5.0	3.1	4.4	6.0
20	5.9	● 0.2	3.6	4.4	6.6	3.6	4.9	6.0	3.4	4.2	5.0	3.1	4.4	6.0
21	4.0	● 0.2	3.8	4.3	6.5	3.6	4.7	6.0	3.4	4.2	5.0	3.1	4.2	5.8
22	2.5	—	3.8	4.3	6.4	3.8	4.5	6.0	3.4	4.4	5.0	3.1	4.2	5.8
23	4.5	● 3.3	3.9	4.4	6.3	3.8	4.5	6.0	3.6	4.4	5.0	3.1	4.2	5.8
24	3.3	—	4.0	4.4	6.3	3.8	4.7	5.8	3.8	4.4	5.0	3.1	4.2	5.8
25	3.7	● 1.5	4.0	4.4	6.2	3.8	4.7	5.8	3.8	4.4	5.0	3.1	4.0	6.0
26	2.6	● 8.2	4.0	4.4	6.2	3.8	4.7	5.8	3.8	4.4	5.0	3.1	4.0	6.0
27	1.6	● 1.2	4.0	4.4	6.1	4.2	4.7	5.6	3.8	4.4	4.8	3.3	4.0	6.0
28	− 2.0	—	3.8	4.3	6.1	4.0	4.7	5.6	3.8	4.4	4.8	3.3	4.0	5.8
29	− 4.2	✱ 0.4	3.6	4.2	6.0	3.8	4.7	5.6	3.8	4.4	4.8	3.3	4.0	5.4
30	− 5.0	0.1	3.4	4.2	6.0	3.8	4.3	5.6	3.4	4.4	4.6	3.1	4.0	5.2
		32.9												
Mittel	**1.59**	**✱ 12.0**	**3.97**	**4.81**	**6.95**	**4.25**	**5.27**	**6.38**	**3.86**	**4.69**	**5.17**	**3.53**	**4.62**	**6.16**

Bodentemperatur 9ʰ a. m. C⁰

1889. **December.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala.			Heinäis.								
			Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			129-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 7.0	—	3.0	4.1	6.0	3.4	4.1	5.6	3.2	4.2	4.8	2.9	4.0	5.2
2	− 6.8	—	2.9	4.0	5.9	3.4	4.1	5.6	3.2	4.2	4.8	2.9	4.0	5.2
3	− 5.6	—	2.8	3.9	5.8	3.4	4.1	5.6	3.2	4.2	4.8	2.9	4.0	5.2
4	− 4.0	—	2.7	3.8	5.8	3.0	4.3	5.4	3.0	4.2	4.8	2.7	3.8	5.4
5	− 6.1	—	2.6	3.6	5.7	3.0	4.3	5.4	3.0	4.2	4.8	2.7	3.8	5.4
6	− 6.4	—	2.4	3.5	5.7	2.8	4.1	5.2	2.8	4.0	4.8	2.5	3.6	5.2
7	− 2.6	—	2.4	3.4	5.6	2.6	3.9	5.2	2.6	3.8	4.8	2.3	3.6	5.2
8	− 6.8	⁎ 0.5	2.2	3.4	5.6	2.6	3.9	5.2	2.6	3.6	4.6	2.5	3.6	5.0
9	− 0.6	⁎ 0.5	2.2	3.3	5.5	2.6	3.9	5.2	2.2	3.6	4.4	2.3	3.4	5.0
10	− 1.9	⁎ 2.3	2.1	3.2	5.4	2.4	3.7	5.1	2.2	3.4	4.2	2.3	3.4	5.0
11	− 0.6	⁎ 6.4	2.1	3.2	5.4	2.4	3.7	5.0	2.2	3.4	4.2	2.1	3.4	5.0
12	− 0.4	⁎ 0.4	2.0	3.0	5.3	2.4	3.7	5.0	2.2	3.4	4.2	2.3	3.4	5.0
13	− 0.8	⁎ 4.6	2.0	3.0	5.3	2.4	3.5	4.8	2.0	3.4	4.2	2.1	3.4	5.0
14	−14.4	⁎ 2.6	1.9	2.9	5.2	2.4	3.5	4.8	2.0	3.2	4.0	2.1	3.2	5.0
15	− 3.5	⁎ 0.9	1.9	2.8	5.2	2.4	3.3	4.8	2.0	3.2	4.0	2.1	3.2	5.0
16	− 7.4	⁎ 1.4	1.8	2.8	5.1	2.4	3.3	4.6	2.0	3.1	4.0	2.1	3.2	5.0
17	− 0.9	⁎ 3.8	1.8	2.8	5.0	2.4	3.3	4.6	2.0	3.2	4.0	2.1	3.2	5.0
18	1.1	● 6.4	1.8	2.7	5.0	2.2	3.3	4.6	1.8	3.0	4.0	1.9	3.0	5.0
19	1.1	● 2.6	1.8	2.6	4.9	2.2	3.3	4.6	1.8	3.0	4.0	2.0	3.0	5.0
20	1.5	● 0.2	1.8	2.6	4.9	2.2	3.3	4.6	1.8	3.0	4.0	2.1	3.0	5.0
21	1.8	● 0.5	1.8	2.6	4.8	2.2	3.3	4.6	1.8	3.0	4.0	2.1	3.0	4.8
22	− 0.1	⁎ 2.7	1.8	2.6	4.8	2.2	3.1	4.5	1.7	2.8	4.0	1.9	3.0	4.8
23	− 1.6	—	1.8	2.6	4.7	2.2	3.1	4.4	1.8	2.8	4.0	2.0	3.0	4.8
24	− 4.0	—	1.8	2.5	4.7	2.2	3.1	4.4	1.8	2.8	4.0	2.0	*2.8*	4.8
25	− 4.0	—	1.7	2.5	4.6	2.2	3.1	4.4	1.8	2.8	4.0	1.9	*2.8*	4.6
26	− 3.4	—	1.7	2.4	4.6	2.2	3.1	4.4	1.8	2.8	3.8	1.9	*2.8*	4.6
27	− 1.9	—	1.7	2.4	4.5	2.2	3.1	4.2	1.8	2.8	3.8	1.7	*2.8*	4.4
28	− 2.2	—	1.6	2.4	4.5	2.2	3.1	4.2	1.8	2.8	3.8	1.7	*2.8*	4.4
29	− 4.3	—	1.6	2.4	4.4	2.2	2.9	4.1	1.6	2.6	3.6	1.9	*2.6*	4.2
30	− 9.8	—	1.6	2.4	4.4	2.2	2.9	4.1	1.6	2.6	3.6	1.9	*2.6*	4.2
31	− *7.1*	⁎ 0.8	1.6	2.4	4.4	2.2	2.9	4.0	1.6	2.6	3.6	1.7	*2.6*	4.4
		36.6												
Mittel	**− 3.68**	**⁎ 26.9**	**2.03**	**2.96**	**5.12**	**2.48**	**3.49**	**4.78**	**2.15**	**3.28**	**4.18**	**2.18**	**3.23**	**4.90**
Jahresmittel	**4.05**	**503.1**	**6.00**	**5.46**	**5.41**	**5.89**	**5.45**	**5.01**	**4.01**	**3.86**	**3.53**	**4.43**	**4.14**	**4.37**

Bodentemperatur 9^h a. m. C⁰

1890. **Januar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 0.3	—	1.4	2.3	4.3	2.0	2.9	4.1	1.6	2.6	3.8	1.7	*2.6*	4.5
2	1.7	● 1.3	1.4	2.3	4.3	2.0	2.9	4.0	1.6	2.6	3.8	1.7	*2.6*	4.4
3	0.6	⚹ 0.2	1.2	2.2	4.2	2.0	2.9	4.0	1.4	2.6	3.6	1.7	*2.4*	4.4
4	− 0.2	⚹ 0.4	1.2	2.2	4.2	2.0	2.9	4.0	1.4	2.6	3.6	1.7	*2.4*	4.4
5	1.6	—	1.2	2.2	4.2	2.0	2.9	4.0	1.4	2.5	3.5	1.7	*2.4*	4.4
6	1.4	● 0.2	1.1	2.1	4.1	2.0	2.7	4.0	1.4	2.4	3.4	1.7	*2.4*	*4.2*
7	1.0	● 2.2	1.1	2.1	4.1	2.0	2.7	4.0	1.4	2.4	3.4	1.7	*2.4*	*4.2*
8	3.1	● 0.1	1.1	2.0	4.0	2.0	2.7	3.8	1.4	2.4	3.4	1.7	2.2	*4.2*
9	0.7	● 3.0	1.1	2.0	4.0	2.0	2.7	3.8	1.4	2.4	3.4	1.7	2.2	*4.2*
10	0.9	● 1.2	1.1	2.0	4.0	2.0	2.7	3.8	1.4	2.4	3.2	1.7	2.2	4.0
11	− 2.1	● 1.4	1.1	2.0	4.0	2.0	2.7	3.8	1.4	2.4	3.2	1.7	2.2	4.0
12	− 8.1	● 0.4	1.0	2.0	3.9	2.0	2.7	3.8	1.3	2.3	3.1	1.7	2.2	4.0
13	− 7.8	—	1.0	2.0	3.9	2.0	2.7	3.6	1.3	2.2	3.0	1.7	2.2	4.0
14	− 2.7	⚹ 2.4	1.0	2.0	3.9	2.0	2.7	3.6	1.2	2.2	3.0	1.7	2.0	4.0
15	− 0.6	⚹ 2.1	1.0	2.0	3.8	2.0	2.5	3.6	1.2	2.2	3.0	1.7	2.0	4.0
16	− 1.2	⚹ 0.6	1.0	2.0	3.8	1.8	2.5	3.6	1.2	2.2	3.0	1.7	2.0	4.0
17	− 3.6	—	1.0	1.9	3.8	1.8	2.5	3.6	1.2	2.2	3.0	1.7	2.0	4.0
18	− 7.1	—	1.0	1.9	3.8	1.8	2.5	3.6	1.2	2.2	3.0	1.7	2.0	4.0
19	− 11.2	⚹ 0.2	1.0	1.9	3.7	1.8	2.5	3.6	1.2	2.2	3.0	1.5	2.0	4.0
20	− 9.2	⚹ 0.4	0.9	1.9	3.7	1.8	2.5	3.6	1.2	2.2	3.0	1.5	2.0	4.0
21	− 6.6	⚹ 2.8	0.9	1.8	3.7	1.8	2.5	3.6	1.2	2.2	3.0	1.5	2.0	4.0
22	− 7.4	⚹ 2.3	0.9	1.8	3.6	1.8	2.5	3.6	1.2	2.2	3.0	1.5	1.8	4.0
23	− 9.1	—	0.9	1.8	3.6	1.8	2.5	3.6	1.2	2.2	3.0	1.5	1.8	4.0
24	− 6.3	—	0.8	1.8	3.6	1.8	2.5	3.6	1.2	2.0	3.0	1.5	1.8	3.8
25	− 2.2	⚹ 0.4	0.8	1.8	3.6	1.8	2.3	3.4	1.0	2.0	3.0	1.5	2.0	3.8
26	− 3.3	●⚹ 3.2	0.8	1.7	3.5	1.8	2.3	3.4	1.0	2.0	3.0	1.5	1.8	3.8
27	0.4	●⚹ 0.7	0.8	1.7	3.5	1.8	2.3	3.4	1.0	2.0	3.0	1.5	1.8	3.8
28	− 4.1	⚹ 0.1	0.8	1.7	3.5	1.8	2.3	3.4	1.0	2.0	3.0	1.5	1.8	4.0
29	− 7.6	—	0.8	1.6	3.4	1.8	2.3	3.4	1.0	2.0	3.0	1.5	1.8	4.0
30	− 12.0	—	0.8	1.6	3.4	1.8	2.3	3.4	1.0	2.0	3.0	1.3	1.8	4.0
31	− 14.1	—	0.8	1.6	3.4	1.8	2.3	3.4	1.0	2.0	2.8	1.3	1.8	4.0
		25.6												
Mittel	**− 3.72**	**⚹ 13.8**	**0.98**	**1.93**	**3.82**	**1.89**	**2.58**	**3.36**	**1.25**	**2.25**	**3.17**	**1.60**	**2.08**	**4.07**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1890. **Februar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwald.			Heinäis. 130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 1.9	—	0.8	1.6	3.4	1.8	2.3	3.4	1.0	1.8	2.8	1.3	1.8	4.0
2	0.6	●✳ 3.8	0.8	1.6	3.4	1.7	2.3	3.2	1.0	1.8	2.8	1.3	1.8	3.8
3	0.2	✳ 0.2	0.8	1.6	3.4	1.7	2.3	3.2	1.0	1.8	2.6	1.3	1.6	3.8
4	1.1	—	0.8	1.6	3.3	1.7	2.3	3.2	1.0	1.8	2.6	1.3	1.6	3.8
5	− 1.5	—	0.8	1.6	3.3	1.7	2.3	3.2	1.0	1.8	2.6	1.3	1.6	3.8
6	− 6.7	—	0.8	1.6	3.3	1.7	2.3	3.2	1.0	1.8	2.6	1.3	1.6	3.8
7	− 1.0	—	0.8	1.6	3.2	1.7	2.3	3.2	1.0	1.8	2.6	1.3	1.6	3.8
8	− 3.5	—	0.8	1.6	3.2	1.6	2.3	3.2	1.0	1.8	2.6	1.3	1.6	3.6
9	− 1.6	—	0.8	1.6	3.2	1.6	2.1	3.2	1.0	1.8	2.4	1.1	1.8	3.2
10	− 8.5	—	0.6	1.5	3.2	1.6	2.1	3.2	1.0	1.8	2.4	1.2	1.6	3.4
11	−10.7	—	0.6	1.5	3.2	1.5	2.1	3.0	0.8	1.8	2.4	1.1	1.6	3.2
12	− 8.1	—	0.6	1.5	3.1	1.5	2.1	3.0	0.8	1.8	2.4	1.0	1.6	3.1
13	− 7.9	—	0.6	1.5	3.1	1.5	2.1	3.0	0.8	1.6	2.4	1.0	1.6	3.1
14	− 7.3	—	0.6	1.4	3.1	1.5	2.1	3.0	0.8	1.6	2.4	1.0	1.6	3.1
15	− 4.9	—	0.6	1.4	3.1	1.4	2.1	3.0	0.8	1.6	2.4	0.9	1.6	3.1
16	− 5.7	✳ 0.2	0.6	1.4	3.1	1.4	2.1	3.0	0.8	1.6	2.4	0.9	1.6	3.1
17	− 6.2	✳ 0.2	0.5	1.4	3.0	1.4	2.1	3.0	0.8	1.4	2.4	0.9	1.4	3.0
18	− 5.6	✳ 0.3	0.5	1.4	3.0	1.4	2.1	3.0	0.8	1.4	2.4	0.9	1.4	3.0
19	− 9.5	—	0.5	1.3	3.0	1.4	2.1	3.0	0.6	1.4	2.4	0.9	1.4	3.0
20	− 9.0	—	0.5	1.3	3.0	1.4	2.0	3.0	0.6	1.4	2.4	0.9	1.4	3.0
21	− 9.0	—	0.4	1.3	3.0	1.4	1.9	3.0	0.6	1.4	2.4	0.7	1.2	3.0
22	− 7.9	—	0.4	1.2	3.0	1.4	1.9	3.0	0.6	1.4	2.2	0.7	1.4	3.0
23	− 3.6	—	0.4	1.2	3.0	1.4	1.9	2.8	0.6	1.4	2.2	0.7	1.4	3.0
24	− 2.4	—	0.4	1.2	2.9	1.4	1.9	2.8	0.6	1.4	2.2	0.7	1.2	3.0
25	0.5	—	0.4	1.2	2.9	1.4	1.9	2.8	0.6	1.4	2.2	0.7	1.2	3.0
26	− 5.7	—	0.3	1.2	2.9	1.4	1.9	2.8	0.6	1.4	2.2	0.7	1.2	3.0
27	− 8.7	—	0.3	1.2	2.9	1.4	1.9	2.8	0.6	1.4	2.2	0.5	1.2	3.0
28	−11.8	—	0.3	1.2	2.9	1.4	1.9	2.8	0.6	1.4	2.2	0.5	1.2	3.0
		4.7												
Mittel	−4.80	✳ 2.8	0.58	1.41	3.11	1.51	2.10	3.04	0.80	1.60	2.42	0.98	1.49	3.28

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1890. **Mars.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	**— 15.2**	—	0.3	1.2	2.8	1.2	1.9	2.8	0.5	1.4	2.0	*0.5*	1.2	3.0
2	— 13.9	—	0.3	1.1	2.8	1.2	1.8	2.8	**0.4**	1.3	2.0	*0.5*	1.0	3.0
3	— 3.0	—	0.0	1.1	2.8	1.2	1.8	2.8	**0.4**	1.3	2.0	0.3	1.0	3.0
4	— 0.9	—	**0.0**	1.1	2.8	1.2	1.7	2.8	0.4	1.2	2.0	0.3	1.0	3.0
5	— 2.1	✱ 0.2	0.1	1.1	2.8	1.2	1.7	2.8	0.4	1.2	2.0	0.3	1.0	3.0
6	— 5.8	✱ 0.3	0.1	1.0	2.8	1.2	1.7	2.8	0.4	1.2	2.0	0.3	1.0	3.0
7	— 6.3	✱ 1.6	0.1	1.0	2.7	1.2	1.7	2.6	0.4	1.2	2.0	0.3	1.0	3.0
8	— 5.4	—	0.1	1.0	2.7	1.2	1.7	2.6	0.4	1.2	2.0	**0.3**	1.0	3.0
9	— 1.7	✱ 8.6	0.2	1.0	2.7	1.2	1.7	2.6	0.4	1.2	2.0	0.3	1.0	3.0
10	— 2.7	✱ 1.0	0.2	1.0	2.7	1.2	1.7	2.6	0.4	1.2	2.0	0.3	1.0	3.0
11	— 1.6	✱ 8.2	0.2	1.0	2.6	1.2	1.7	2.6	0.4	1.2	2.0	0.3	1.0	3.0
12	0.7	✱ 0.9	0.2	1.0	2.6	1.2	1.7	2.6	0.4	1.1	2.0	0.3	1.0	3.0
13	3.8	—	0.2	0.9	2.6	1.2	1.7	2.6	0.4	1.1	2.0	0.5	1.0	3.0
14	2.0	—	0.2	0.9	2.6	1.2	1.7	2.6	0.4	1.1	2.0	0.5	1.0	3.0
15	1.5	—	0.2	0 8	2.6	1.2	1.7	2.6	0.4	1.1	2.0	0.5	1.0	3.0
16	1.4	—	0.2	0.8	2.6	1.2	1.7	2.6	0.4	1.1	2.0	0.5	1.0	3.0
17	1.4	—	0.2	0.8	2.5	1.2	1.7	2.6	0.4	1.1	2.0	0.5	1.0	3.0
18	0.5	—	0.2	0.8	2.5	1.2	1.7	2.6	0.4	1.1	2.0	0.5	0.9	3.0
19	0.8	—	0.2	0.8	2.5	**1.2**	1.7	2.6	0.4	1.1	2.0	0.5	0.8	3.0
20	0.9	✱ 0.2	0.2	0.8	2.5	1.2	1.7	2.6	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
21	1.4	● 0.4	0.2	0.8	2.4	1.2	1.7	2.6	0.4	1.0	1.8	0.5	0.8	3.0
22	1.4	● 0.3	0.2	0.8	2.4	1.2	1.6	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
23	2.3	● 0.1	0.2	0.8	2.4	1.2	1.6	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
24	1.4	● 6.0	0.2	0.8	2.4	1.2	1.6	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
25	2.4	● 3.9	0.2	0.8	2.4	1.2	1.5	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
26	2.5	● 1.5	0.2	0.8	2.4	1.2	1.5	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
27	2.2	● 1.8	0.2	0.8	2.4	1.2	1.5	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
28	1.1	● 1.3	0.2	0.8	2.4	1.2	1.5	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
29	1.0	—	0.2	0.8	2.4	1.2	1.5	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
30	— 0.2	✱ 8.4	0.2	0.8	2.3	1.2	1.5	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
31	— 0.9	✱ 0.1	0.2	0.8	2.3	1.2	1.5	2.4	**0.4**	1.1	1.8	0.5	0.8	3.0
		44.8												
Mittel	**— 1.00**	✱ **29.5**	**0.18**	**0.90**	**2.56**	**1.20**	**1.69**	**2.57**	**0.40**	**1.15**	**1.92**	**0.44**	**0.92**	**3.00**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1890. **April.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 1.2	✳ 0.1	0.2	0.8	2.3	1.2	1.5	2.4	0.4	1.1	1.8	0.5	0.9	3.0
2	− 1.3	—	0.2	0.8	2.2	1.2	1.5	2.4	0.4	1.1	1.8	0.6	1.0	2.8
3	2.6	—	0.2	0.8	2.2	1.2	1.3	2.4	0.4	1.1	1.8	0.6	1.0	2.8
4	3.4	—	0.2	0.8	2.2	1.2	1.3	2.4	0.4	1.1	1.8	0.6	1.0	2.8
5	4.0	● 0.2	0.2	0.8	2.2	1.2	**1.3**	2.4	0.4	1.1	1.8	0.6	1.1	2.8
6	3.7	—	0.2	0.8	2.2	1.2	1.3	2.4	0.4	1.1	1.6	0.6	1.0	2.8
7	4.5	—	0.2	0.8	2.2	1.2	1.4	2.4	0.4	1.1	1.6	0.6	1.0	2.8
8	5.7	● 0.2	0.2	0.8	2.2	1.2	1.4	2.4	0.4	1.1	1.6	0.6	1.1	2.8
9	7.4	—	0.2	0.8	2.1	1.3	1.4	2.4	0.4	1.1	1.6	0.6	1.0	2.8
10	5.3	● 4.1	0.2	0.8	2.1	1.3	1.5	2.4	0.4	1.1	1.6	0.6	1.0	2.8
11	4.7	—	0.2	0.7	2.1	1.4	1.5	2.3	0.4	1.0	1.6	0.7	**0.8**	2.8
12	2.6	● 0.5	0.2	0.7	2.1	1.4	1.5	**2.3**	0.4	1.0	1.6	0.7	0.8	2.8
13	1.9	—	0.2	0.7	2.1	1.4	1.5	2.4	0.4	1.0	1.8	0.7	1.0	2.8
14	3.2	—	0.2	0.7	2.1	1.4	1.5	2.4	0.4	1.0	1.8	0.7	1.0	2.8
15	4.0	● 1.0	0.2	0.7	2.1	1.4	1.5	2.4	0.4	1.0	1.8	0.7	1.0	2.8
16	3.5	✳● 1.5	0.2	0.7	2.1	1.4	1.5	2.4	0.4	1.0	1.8	0.7	1.0	2.8
17	− 0.2	—	0.2	0.7	2.1	1.4	1.5	2.4	0.4	1.0	1.8	0.7	1.0	2.8
18	0.0	✳ 0.9	0.2	0.7	2.0	1.6	1.5	2.4	0.4	1.0	1.8	0.7	1.0	2.8
19	1.5	—	0.2	0.7	2.0	1.8	1.7	2.4	0.4	1.0	1.6	0.7	1.0	*2.6*
20	3.0	—	0.2	0.7	2.0	1.8	1.7	2.4	0.4	1.0	1.6	0.7	1.0	*2.6*
21	2.5	● 1.6	0.3	0.6	2.0	1.8	1.7	2.4	0.4	1.0	1.6	0.7	1.0	*2.6*
22	3.6	● 2.4	0.3	0.6	2.0	1.8	1.9	2.4	0.4	1.0	1.6	0.7	1.0	*2.6*
23	5.3	● 0.2	0.3	0.6	2.0	2.4	1.9	2.4	0.4	1.0	1.6	0.7	0.8	2.4
24	4.8	—	0.3	0.6	2.0	3.0	2.0	2.4	0.4	1.0	1.6	0.7	0.8	2.4
25	6.0	—	0.3	0.6	2.0	3.2	2.0	2.4	0.4	1.0	1.6	0.7	0.8	**2.4**
26	7.9	● 11.7	0.3	**0.6**	2.0	3.6	2.3	2.4	0.4	1.0	1.6	0.7	0.8	2.4
27	9.5	● 1.4	0.3	0.6	2.0	4.0	2.5	2.4	0.4	**1.0**	1.6	0.9	1.0	2.4
28	8.8	● 2.0	0.3	0.6	2.0	4.0	2.5	2.4	0.4	1.0	1.6	0.9	1.0	2.4
29	10.6	—	0.3	0.6	2.0	5.2	2.9	2.6	0.5	1.0	1.6	0.9	1.0	2.4
30	14.0	—	0.4	0.6	2.0	5.3	3.3	2.6	0.5	1.0	1.6	1.1	1.4	2.6
		27.8												
Mittel	**4.04**	✳ **1.8**	**0.24**	**0.70**	**2.09**	**2.05**	**1.74**	**2.41**	**0.41**	**1.03**	**1.67**	**0.70**	**0.98**	**2.69**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1890. **Mai.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	17.8	—	0.5	0.7	1.9	6.4	3.7	2.8	0.4	1.0	1.6	2.9	1.8	2.4
2	19.8	⌓ 0.1	0.6	0.8	1.9	6.4	3.7	2.8	0.4	1.0	1.6	2.9	1.8	2.4
3	18.8	● 1.0	1.4	1.2	1.9	6.8	3.9	2.8	0.4	1.0	1.6	3.3	2.2	2.8
4	19.5	—	2.0	1.6	1.9	7.0	3.9	3.0	0.4	1.0	1.6	3.7	2.8	2.6
5	20.4	⌓ 0.1	3.2	2.0	1.9	7.1	4.5	3.0	0.5	1.0	1.6	4.5	3.0	2.6
6	19.1	—	4.4	2.6	1.9	7.4	4.6	3.0	0.5	1.0	1.6	4.7	3.0	2.8
7	15.4	—	5.6	3.2	2.0	7.6	5.1	3.2	0.5	1.0	1.6	4.9	3.2	2.8
8	16.8	—	5.8	3.6	2.1	7.6	5.1	3.2	0.5	1.0	1.6	4.9	3.2	2.8
9	16.9	—	5.8	4.0	2.2	7.2	5.1	3.2	0.5	1.0	1.6	4.9	3.4	3.0
10	17.9	—	6.0	4.2	2.3	7.2	5.1	3.2	0.5	1.0	1.6	4.9	3.4	3.0
11	6.0	—	6.0	4.5	2.4	7.0	5.2	3.4	0.5	1.0	1.6	4.7	3.6	3.2
12	9.5	—	6.4	4 6	2.5	6.8	5.3	3.6	0.7	1.0	1.6	4.5	3.6	3.2
13	12.1	—	6.6	4.8	2.6	7.0	5.1	3.6	0.8	1.0	1.6	4.7	3.6	3.4
14	13.2	—	6.8	5.0	2.9	7.2	4.9	3.8	1.0	1.2	1.6	4.9	3.6	3.6
15	14.3	—	7.0	5.2	2.9	7.2	4.7	3.8	1.4	1.3	1.6	5.1	3.7	3.6
16	15.5	—	7.2	5.4	3.0	7.8	4.9	3.8	2.0	1.3	1.6	5.7	3.8	3.8
17	12.8	—	7.4	5.6	3.2	8.4	5.5	4.0	2.6	1.4	1.6	5.9	4.2	3.8
18	15.5	—	7.6	6.0	3.3	8.8	5.9	4.0	3.2	1.4	1.6	6.3	4.4	3.8
19	18.0	—	8.8	6.6	3.4	9.0	6.1	4.2	3.2	1.6	1.8	6.3	4.6	4.0
20	19.9	—	9.0	6.8	3.5	9.2	6.5	4.2	3.8	2.0	1.8	6.3	4.6	4.0
21	16.2	—	9.4	7.0	3.6	9.4	6.7	4.2	4.2	2.3	1.8	6.3	4.6	4.0
22	16.7	● 5.2	9.8	7.2	3.9	9.8	6.9	4.4	4.8	2.3	2.0	6.8	4.8	4.0
23	11.7	—	10.0	7.4	4.0	10.2	6.9	4.4	5.2	2.8	2.0	7.5	5.0	4.0
24	13.6	—	10.2	7.6	4.2	10.2	7.1	4.6	5.2	3.0	2.0	7.5	5.2	4.0
25	7.0	● 9.2	10.0	7.4	4.3	9.8	7.1	4.6	5.2	3.4	2.2	7.2	5.2	4.0
26	1.7	● 14.2	9.8	7.2	4.4	9.8	7.3	4.8	5.2	3.4	2.2	7.1	5.2	4.0
27	5.0	✱● 13.1	8.2	7.2	4.5	8.8	7.1	5.0	4.8	3.6	2.4	6.3	5.1	4.0
28	6.1	● 3.2	8.2	7.2	4.6	8.6	7.2	5.0	4.6	3.6	2.4	6.1	5.0	4.2
29	8.7	● 5.0	8.2	7.2	4.7	8.4	7.1	5.2	4.4	3.6	2.6	5.9	5.0	2.2
30	9.0	● 1.2	8.2	7.3	4.9	8.6	7.1	5.0	4.6	3.6	2.6	5.9	5.0	4.2
31	8.6	● 12.4	8.2	7.2	5.0	8.6	7.0	5.2	4.8	3.7	2.6	6.1	4.9	4.4
		64.7												
Mittel	**13.34**	✱ **6.6**	**6.72**	**5.11**	**3.15**	**8.11**	**5.69**	**3.90**	**2.48**	**1.89**	**1.85**	**5.44**	**3.95**	**3.25**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1890. **Juni.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	6.2	● 1.9	8.2	7.2	5.0	9.2	7.1	5.2	5.1	3.8	2.6	6.5	5.0	4.6
2	8.2	● 0.7	8.2	7.3	5.1	9.2	7.1	5.3	5.1	3.8	2.7	6.5	5.0	4.6
3	10.6	—	8.4	7.4	5.2	9.0	7.1	5.4	5.0	3.8	2.8	6.5	5.0	4.8
4	12.2	—	8.4	7.4	5.2	9.2	7.2	5.4	5.3	3.8	2.8	6.7	5.2	4.8
5	15.5	—	*8.5*	*7.5*	*5.2*	9.6	7.3	5.4	5.6	4.0	2.8	6.8	5.2	4.8
6	16.9	—	*8.7*	*7.6*	*5.2*	10.2	7.5	5.4	6.6	4.1	3.0	7.4	5.4	5.0
7	19.4	—	*9.1*	*7.6*	*5.3*	10.8	7.5	5.4	6.6	4.2	3.0	7.7	5.6	5.0
8	19.9	● 3.6	*9.5*	*7.8*	*5.3*	10.9	7.5	5.4	6.8	4.2	3.0	7.8	5.8	5.0
9	13.2	● 17.2	*9.9*	*8.1*	*5.3*	11.0	7.7	5.4	7.2	4.4	3.2	8.1	6.0	5.0
10	10.7	● 0.2	*10.2*	*8.5*	*5.4*	11.6	8.1	5.6	7.6	4.8	3.0	8.5	6.2	5.0
11	14.2	—	*10.6*	*8.7*	*5.4*	11.6	8.5	5.6	7.8	5.2	3.0	8.7	6.4	5.0
12	13.2	● 4.2	*10.9*	*8.9*	*5.6*	11.8	8.7	6.0	8.0	5.4	3.2	8.9	6.6	5.0
13	18.8	● 0.6	*10.9*	*9.0*	*5.8*	11.8	8.7	6.0	8.0	5.4	3.2	9.3	6.6	5.0
14	10.9	● 0.4	*10.8*	*9.1*	*6.0*	11.8	8.7	6.0	8.0	5.4	3.4	8.9	6.6	5.1
15	9.8	—	*10.5*	*9.1*	*6.1*	11.4	8.9	6.0	7.8	5.6	3.6	8.7	6.8	5.1
16	13.2	● 3.9	*10.4*	*9.3*	*6.2*	11.2	8.9	6.0	7.6	5.8	3.6	8.7	6.6	*5.0*
17	14.1	—	*10.6*	*9.4*	*6.3*	11.4	8.9	6.2	7.4	5.8	3.8	8.5	6.8	5.0
18	15.1	—	*10.7*	*9.4*	*6.4*	11.6	9.1	6.4	7.6	5.8	3.8	8.5	6.8	5.0
19	17.1	—	*11.0*	*9.5*	*6.5*	11.8	9.1	6.4	8.0	5.8	3.8	8.7	6.8	5.2
20	15.1	—	*11.4*	*9.6*	*6.5*	12.2	9.1	6.4	8.0	5.8	3.8	8.9	6.8	5.4
21	12.3	● 2.6	*11.5*	*9.7*	*6.6*	12.2	9.2	6.4	8.0	5.9	3.9	8.9	6.9	5.4
22	14.8	—	11.5	9.8	6.6	12.0	9.3	6.2	8.0	6.0	4.0	8.9	7.0	5.4
23	14.5	● 1.4	11.6	9.9	6.6	12.0	9.3	6.2	8.0	6.0	4.0	8.9	7.0	5.4
24	14.2	● 6.8	11.7	10.0	6.7	12.0	9.3	6.2	8.0	6.0	4.0	8.9	7.0	5.4
25	14.9	● 0.9	11.8	10.2	6.7	12.2	9.5	6.4	8.0	6.2	4.2	9.1	7.2	5.6
26	13.7	● 0.8	12.0	10.3	6.8	12.2	9.5	6.4	8.2	6.2	4.4	9.1	7.3	5.6
27	14.3	● 0.2	12.1	10.4	6.9	12.2	9.7	6.6	8.4	6.4	4.6	9.3	7.4	5.8
28	14.2	● 3.0	12.2	10.6	7.0	12.2	9.7	6.6	8.4	6.4	4.6	9.3	7.4	5.8
29	12.4	—	12.2	10.6	7.0	12.4	9.7	6.8	8.6	6.6	4.6	9.5	7.6	6.0
30	13.3	● 0.3	12.3	10.6	7.1	12.6	10.1	7.2	8.8	6.8	4.6	9.5	7.6	6.0
Mittel	**13.76**	**48.7**	**10.53**	**9.02**	**6.03**	**11.30**	**8.60**	**6.00**	**7.38**	**5.31**	**3.34**	**8.39**	**6.45**	**5.24**

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1890. **Juli.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	14.9	● 0.6	12.3	10.6	7.2	12.6	10.1	7.2	8.8	6.8	4.6	9.5	7.6	*6.0*
2	12.4	● 12.6	*12.4*	10.6	7.2	12.4	10.1	7.4	8.8	6.8	4.8	9.5	7.8	*6.0*
3	14.6	● 0.3	*12.6*	10.7	7.3	12.4	10.2	7.4	8.8	6.8	4.8	9.5	7.8	*6.0*
4	15.6	● 0.1	*12.4*	10.7	7.4	12.6	10.2	7.4	9.0	6.8	4.8	9.7	7.8	*6.0*
5	15.2	● 5.9	*12.4*	10.8	7.4	12 6	10.3	7.4	9.1	7.0	4.8	9.7	7.8	*6.0*
6	15.2	● 7.6	*12.4*	10.8	7.6	12.8	10.3	7.4	9.1	7.1	4.6	9.9	7.8	*6.1*
7	13.3	—	12.4	10.8	7.6	12.8	10.3	7.6	9.2	7.2	5.0	10.3	8.2	*6.1*
8	14.1	—	12.6	10.9	7.7	12.8	10.3	7.6	9.2	7.2	5.0	10.3	8.2	*6.2*
9	14.2	—	12.6	11.0	7.8	12.8	10.3	7.4	9.2	7.2	5.0	10.3	8.2	*6.2*
10	17.4	—	12.6	11.0	7.8	12.8	10.3	7.4	9.4	7.3	5.1	10.3	8.2	*6.2*
11	14.8	● 5.0	12.8	11.0	7.9	12.8	10.3	7.5	9.4	7.4	5.0	10.3	8.2	*6.3*
12	14.6	● 1.8	12.8	11.0	8.0	13.0	10.3	7.5	9.4	7.4	5.0	10.3	8.2	*6.3*
13	10.3	● 1.2	12.8	11.1	8.0	13.2	10.5	7.4	9.6	7.4	5.0	10.3	8.2	*6.3*
14	15.2	● 0.1	12.8	11.2	8.0	13.2	10.5	*7.6*	9.6	7.4	5.0	10.3	8.2	*6.3*
15	16.7	● 2.2	13.0	11.2	8.1	13.4	10.7	*7.8*	9.8	7.6	5.0	10.5	8.6	*6.4*
16	16.3	—	13.0	11.2	8.2	13.4	10.7	*7.8*	9.8	7.6	5.0	10.7	8.6	*6.4*
17	17.4	—	13.0	11.3	8.2	13.4	10.7	8.0	9.8	7.6	5.0	10.7	8.6	*6.4*
18	13.9	● 6.0	13.0	11.4	8.3	13.4	10.7	8.0	9.8	7.6	5.0	10.7	8.6	*6.5*
19	13.0	● 1.4	13.2	11.5	8.3	13.4	10.7	8.0	9.8	7.6	5.2	10.7	8.6	*6.6*
20	14.6	—	13.2	11.6	8.4	13.6	10.7	8.2	9.8	7.8	5.4	10.3	8.8	*6.7*
21	17.1	—	13.0	11.8	8.4	13.6	10.9	8.2	9.8	7.8	5.4	10.3	8.8	*6.8*
22	20.8	● 2.6	13.0	11.9	8.5	13.6	11.1	8.4	10.0	8.0	5.6	10.7	9.0	*6.8*
23	13.8	● 19.5	13.2	12.0	8.5	13.6	11.1	8.4	10.0	8.0	5.6	10.7	9.0	*6.9*
24	12.3	● 0.6	13.2	12.0	8.6	13.4	11.1	8.4	9.8	8.0	5.8	10.7	8.8	*7.0*
25	13.3	● 0.4	13.0	12.0	8.6	13.2	11.1	8.4	9.8	8.0	5.8	10.6	8.8	*7.0*
26	12.1	● 2.8	13.4	12 0	8.7	13.2	11.1	8.4	9.8	8.0	5.8	10.5	8.8	*7.1*
27	15.0	● 1.3	13.0	12.0	8.7	13.2	11.3	8.6	9.8	8.0	5.8	10.5	8.8	*7.1*
28	16.3	● 3.6	13.2	12.0	8.8	13.4	11.3	8.8	10.0	8.1	6.0	10.9	8.8	*7.2*
29	16.5	—	13.4	12.0	8.8	13.4	11.3	8.8	10.0	8.1	6.0	10.9	8.8	*7.2*
30	14.5	● 9.5	13.5	12.0	8.8	13.6	11.3	8.8	10.2	8.1	6.0	11.1	8.8	*7.2*
31	15.7	—	13.6	12.0	8.9	13.6	11.3	8.8	10.0	8.1	6.0	11.1	8.8	*7.2*
Mittel	**14.87**	**84.1**	**12.90**	**11.36**	**8.12**	**13.14**	**10.68**	**7.94**	**9.25**	**7.54**	**5.25**	**10.38**	**8.43**	**6.53**

1890. # Bodentemperatur 9^h a. m. C^0 **August.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala m.m.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	15.7	● 3.3	13.0	12.0	8.9	13.6	11.3	8.8	10.2	8.2	6.0	11.1	9.0	*7.3*
2	15.8	● 3.2	13.0	12.0	9.0	13.8	11.3	8.8	10.2	8.4	6.2	11.1	9.2	*7.3*
3	14.3	—	13.0	12.1	9.0	14.0	11.4	9.0	10.4	8.3	6.0	11.3	9.2	*7.3*
4	17.3	● 1.3	13.4	12.1	9.1	14.0	11.5	8.8	10.4	8.4	6.0	11.3	9.2	*7.3*
5	16.7	—	13.6	12.2	9.1	14.0	11.5	8.8	10.6	8.4	6.2	11.5	9.4	*7.4*
6	18.2	—	13.9	12.2	9.1	**14.2**	11.7	8.8	10.4	8.6	6.0	11.5	9.6	*7.4*
7	13.7	● 9.2	13.8	12.5	9.1	14.0	11.7	8.8	10.6	8.6	6.1	11.5	9.6	*7.4*
8	14.5	—	13.8	12.6	9.3	13.8	11.7	9.0	10.8	8.6	6.2	11.5	9.6	7.4
9	13.7	● 0.1	13.8	12.6	9.3	13.6	11.7	9.0	10.6	8.6	6.2	11.3	9.6	7.6
10	14.3	● 0.6	13.9	12.7	9.4	13.4	11.7	9.0	10.4	8.6	6.2	11.1	9.6	7.6
11	13.8	● 0.4	14.0	12.7	9.4	13.6	11.5	9.2	10.2	8.8	6.4	11.0	9.6	7.4
12	16.2	● 0.7	14.1	12.8	9.5	13.8	11.5	9.4	10.2	8.6	6.4	11.5	9.6	7.4
13	17.6	0.2	14.2	12.8	9.5	14.0	11.7	9.4	**11.2**	8.8	6.6	**11.9**	9.8	7.8
14	16.8	0.2	14.2	12.8	9.6	13.8	11.5	9.4	10.8	8.6	6.4	11.7	9.8	7.8
15	15.7	● 24.3	14.3	12.8	9.6	13.6	11.5	9.2	10.8	8.6	6.4	11.5	9.6	7.8
16	16.4	—	14.2	12.8	9.7	14.0	11.7	9.2	11.0	8.8	6.4	11.3	9.8	7.6
17	15.9	● 3.4	14.2	12.8	9.7	14.1	11.7	9.4	11.1	8.9	6.6	11.2	9.8	7.8
18	17.1	● 0.8	14.4	12.8	9.8	14.0	11.7	9.4	11.0	8.9	6.8	11.6	9.8	7.8
19	15.0	● 3.9	**14.4**	12.8	9.8	13.6	11.9	9.4	11.0	9.0	*6.8*	11.5	**10.0**	8.2
20	14.4	—	14.3	12.8	9.9	13.8	11.9	9.4	11.0	9.0	*6.8*	11.7	9.8	8.0
21	12.9	● 3.4	14.2	13.0	9.9	13.8	**11.9**	9.4	11.0	9.0	*6.9*	11.7	9.8	8.0
22	12.5	● 4.3	14.2	13.0	10.0	13.6	11.9	9.7	10.8	9.2	*6.9*	11.8	9.9	8.0
23	11.7	●▲ 17.6	14.1	**13.0**	10.0	13.6	11.9	9.6	10.8	**9.2**	*6.9*	11.5	9.8	8.0
24	11.7	● 6.3	14.0	13.0	10.0	13.4	11.7	9.6	10.6	9.0	*7.0*	11.5	9.8	8.0
25	13.9	—	13.8	12.9	10.0	13.4	11.7	9.8	10.6	9.0	*7.0*	11.3	9.8	8.0
26	12.8	● 12.9	13.8	12.8	10.0	13.1	11.7	**9.9**	10.3	9.0	*7.0*	11.1	9.8	8.0
27	12.2	● 4.6	13.7	12.8	10.1	13.0	11.7	9.6	10.4	9.0	*7.0*	11.1	9.6	8.0
28	11.4	● 10.1	13.7	12.8	10.1	13.1	11.6	9.7	10.3	8.9	*7.0*	11.1	9.6	8.0
29	12.3	● 4.4	13.6	12.7	10.2	12.9	11.5	9.6	10.3	8.8	*7.1*	11.1	9.6	8.0
30	12.9	● 12.6	13.6	12.6	10.2	12.8	11.3	9.6	9.9	*8.8*	*7.1*	11.1	9.6	8.2
31	9.0	● 14.2	13.4	12.6	10.2	12.9	11.4	9.7	9.9	*8.8*	*7.1*	11.1	9.6	8.2
Mittel	**17.30**	**142.0**	**13.86**	**12.65**	**9.63**	**13.62**	**11.63**	**9.30**	**10.57**	**8.75**	**6.57**	**11.37**	**9.63**	**7.74**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1890. **September.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	10.2	● 0.4	13.2	12.4	10.2	12.8	11.3	9.6	9.8	8.9	7.1	10.7	9.5	8.4
2	11.5	⌓ 0.1	13.0	12.4	10.2	12.6	11.3	9.6	9.6	8.8	7.1	10.5	9.4	8.4
3	11.5	⌓ 0.2	12.8	12.3	10.2	12.6	11.3	9.6	9.6	8.8	7.2	10.3	9.4	8.4
4	11.1	⌓ 0.2	12.6	12.2	10.2	12.4	11.1	9.6	9.4	8.6	7.2	10.3	9.4	8.2
5	12.3	● 0.9	12.4	12.1	10.2	12.2	11.1	9.6	9.4	8.6	7.2	10.3	9.4	8.0
6	12.6	● 1.5	12.2	12.0	10.4	12.0	11.1	9.6	9.4	8.6	7.2	10.3	9.4	8.0
7	9.7	⌓ 0.3	12.0	12.0	10.4	12.0	11.1	9.6	9.4	8.6	7.2	10.3	9.2	8.2
8	10.2	● 0.7	12.0	11.9	10.4	11.8	10.9	9.6	9.4	8.6	7.2	10.3	9.2	8.2
9	8.3	● 0.1	11.8	11.8	10.4	11.2	10.6	9.4	9.2	8.4	7.2	9.9	9.0	8.4
10	9.8	● 1.4	11.6	11.8	10.4	11.0	10.5	9.4	8.9	8.4	7.3	9.5	9.0	8.4
11	10.2	● 10.4	11.5	11.7	**10.4**	11.0	10.5	9.4	8.8	8.4	**7.3**	9.5	8.9	**8.6**
12	10.4	⌓ 0.1	11.4	11.6	10.4	11.0	10.5	9.4	8.8	8.4	7.3	9.5	8.8	8.4
13	11.9	● 0.4	11.3	11.5	10.4	10.9	10.5	9.4	8.7	8.4	7.2	9.5	8.8	8.2
14	12.0	● 0.2	11.3	11.4	10.4	11.0	10.5	9.4	8.8	8.2	7.2	9.5	8.8	8.2
15	10.0	● 0.3	11.3	11.4	10.4	11.1	10.5	9.4	9.0	8.2	7.2	9.7	8.8	8.2
16	11.1	● 0.2	11.2	11.3	10.4	11.0	10.5	9.4	9.0	8.2	7.2	9.9	9.0	8.2
17	8.6	● 0.2	11.1	11.3	10.3	10.9	10.4	9.4	9.0	8.2	7.2	9.7	8.8	8.0
18	10.5	● 0.4	11.0	11.2	10.3	10.6	10.3	9.4	8.8	8.2	7.2	9.5	8.8	8.0
19	10.7	● 0.2	10.8	11.1	10.3	10.4	10.3	9.4	8.6	8.2	7.2	9.3	8.6	8.0
20	11.5	⌓ 0.1	10.7	11.0	10.3	10.4	10.3	9.4	8.6	8.2	7.2	9.3	8.6	8.0
21	12.5	● 0.3	10.6	11.0	10.3	10.2	10.2	9.4	8.6	8.0	7.1	9.3	8.6	8.0
22	12.3	● 0.2	10.6	10.9	10.3	10.8	10.2	9.4	9.0	8.2	7.1	9.5	8.6	8.0
23	13.6	—	10.6	10.9	10.3	10.6	10.2	9.4	9.2	8.2	7.1	9.7	8.8	8.0
24	14.1	● 0.7	10.7	10.8	10.3	10.4	9.9	9.3	9.1	8.0	7.1	9.7	8.8	8.0
25	12.6	● 0.5	10.8	10.7	10.3	10.8	10.0	9.2	9.2	8.0	7.0	9.7	8.8	8.0
26	11.8	● 8.4	10.9	10.6	10.3	11.0	10.1	9.2	9.6	8.2	7.0	9.9	8.6	8.0
27	7.9	—	10.9	10.6	10.2	11.0	10.1	9.2	9.6	8.2	7.0	9.9	8.6	8.0
28	6.5	● 8.4	10.8	10.5	10.2	10.6	10.1	9.2	9.2	8.2	7.0	9.5	8.8	8.0
29	6.4	● 0.4	10.7	10.4	10.2	10.6	10.1	9.2	9.1	8.2	6.9	9.3	8.8	8.0
30	7.9	● 9.8	10.5	10.2	10.2	9.8	9.9	9.0	8.4	8.2	6.9	8.9	8.4	8.0
Mittel	**10.66**	**14.0**	**14.41**	**11.37**	**10.31**	**11.16**	**10.51**	**9.41**	**9.11**	**8.34**	**7.14**	**9.77**	**8.92**	**8.15**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1890. **October.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	6.7	● 0.7	*10.2*	*10.1*	*10.1*	9.6	9.9	9.1	8.4	*8.0*	6.8	8.7	8.4	8.0
2	3.8	● 37.2	*9.8*	*9.9*	*10.1*	9.2	9.5	9.0	7.8	*8.0*	7.0	*8.3*	8.0	8.0
3	2.1	● 0.6	*9.4*	*9.7*	*10.1*	9.2	9.5	9.0	7.8	7.8	7.0	7.9	8.0	8.0
4	− 0.1	—	*8.8*	*9.4*	*10.1*	8.6	8.9	9.0	7.2	7.8	7.0	7.1	7.8	8.0
5	− 0.8	● 0.2	*8.0*	*9.1*	*10.0*	7.4	*8.9*	9.0	6.8	7.6	6.8	6.7	*7.6*	8.0
6	− 0.1	⚹ 15.2	7.2	8.8	10.0	6.4	*8.7*	9.0	6.4	7.4	6.8	6.5	*7.2*	*7.8*
7	− 2.1	—	6.6	8.8	9.9	6.2	8.7	8.8	5.4	7.0	6.8	6.1	7.0	*7.8*
8	− 2.0	—	6.6	8.6	9.9	6.2	*8.3*	8.6	5.2	7.0	6.8	5.9	*6.9*	*7.8*
9	− 2.2	—	6.4	8.6	9.8	6.0	*8.1*	8.6	5.0	6.6	6.8	5.7	*6.6*	*7.8*
10	− 3.3	—	6.4	8.4	9.8	5.8	7.9	8.6	4.6	6.4	6.6	4.7	*6.5*	*7.8*
11	2.8	● 8.2	6.2	8.4	9.7	5.8	7.9	8.6	4.4	6.0	6.6	4.3	*6.3*	*7.6*
12	2.4	● 0.4	6.2	8.2	9.7	5.4	7.5	8.4	4.2	5.8	6.4	4.3	*6.2*	*7.6*
13	2.8	● 2.3	6.0	8.0	9.6	5.4	7.3	8.4	4.2	5.8	6.4	4.1	*6.1*	*7.6*
14	7.4	● 0.5	5.8	8.0	9.6	6.0	7.1	*8.2*	*4.8*	5.6	6.2	*4.5*	*6.0*	*7.4*
15	7.3	● 0.2	5.8	7.8	9.5	6.0	6.9	8.0	4.6	5.6	6.4	4.7	*6.0*	*7.4*
16	7.2	● 0.2	5.6	7.6	9.4	6.0	6.9	8.0	4.6	5.6	6.4	4.7	*6.0*	*7.4*
17	7.5	● 0.2	5.4	7.4	9.2	6.2	6.9	8.0	4.8	5.8	6.2	4.7	*6.1*	*7.2*
18	7.6	● 1.4	5.2	7.4	9.0	6.8	7.3	7.6	5.8	6.0	6.0	5.5	*6.1*	*7.2*
19	− 0.9	● 2.1	5.0	7.2	9.0	7.4	7.3	7.6	6.2	6.0	6.0	6.3	*6.1*	*7.2*
20	− 3.7	—	4.8	7.2	8.8	7.4	7.3	7.6	6.2	6.0	6.0	6.3	*6.1*	*7.2*
21	− 6.0	—	4.6	6.0	8.6	7.2	7.3	7.6	6.2	6.0	6.0	5.9	*6.1*	7.0
22	− 1.6	●⚹ 6.6	4.4	6.0	8.4	6.4	6.9	7.4	5.0	5.8	6.0	5.5	*6.1*	7.0
23	2.9	0.2	4.4	6.2	8.2	6.0	6.7	7.4	4.8	5.4	5.8	4.9	*6.0*	7.0
24	4.3	● 0.9	4.4	6.1	8.1	5.4	6.5	7.4	4.4	5.4	5.8	4.7	*6.0*	7.0
25	5.6	● 2.6	4.2	6.0	8.0	5.0	6.5	7.4	3.8	5.4	5.8	4.5	*5.9*	7.0
26	2.3	⚹● 1.1	4.4	5.8	7.9	5.4	6.3	7.4	3.8	5.2	5.8	4.3	*5.7*	7.0
27	1.3	⚹ 4.4	4.6	5.6	7.8	5.4	6.3	7.2	4.0	5.1	5.8	4.3	*5.6*	*6.8*
28	1.2	⚹ 0.3	4.4	5.6	7.8	5.4	6.3	7.0	4.0	5.0	5.6	4.3	*5.5*	*6.8*
29	0.7	● 5.8	4.4	5.6	7.7	5.2	6.3	7.0	3.8	5.0	5.6	4.3	*5.4*	*6.8*
30	4.5	△● 6.4	4.2	5.6	7.6	5.0	6.2	7.2	3.8	4.9	5.4	4.1	*5.3*	*6.6*
31	1.7	—	4.2	5.6	7.6	5.0	6.2	7.0	3.8	4.8	5.4	4.1	*5.2*	*6.6*
		97.7												
Mittel	**1.91**	⚹ **23.7**	**5.92**	**7.51**	**9.06**	**6.40**	**7.49**	**8.04**	**5.22**	**6.12**	**6.26**	**5.42**	**6.38**	**7.37**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1890. **November.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trockner.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 0.2	● 3.2	4.2	5.6	7.5	4.6	6.0	7.0	3.9	4.8	5.4	4.3	5.2	6.4
2	1.8	● 0.6	4.4	5.6	7.4	4.4	5.9	7.0	3.6	4.8	5.4	3.9	5.2	6.4
3	3.7	● 0.5	4.4	5.6	7.4	4.3	5.7	6.8	3.6	4.8	5.4	3.2	5.2	6.4
4	4.6	● 3.3	4.4	5.6	7.3	4.6	5.7	6.6	3.8	4.6	5.4	4.1	5.1	6.6
5	5.5	● 2.7	4.4	5.4	7.2	4.8	5.7	6.6	4.0	4.6	5.2	4.1	5.1	6.6
6	4.8	● 2.3	4.6	5.4	7.2	5.2	5.7	6.6	4.4	4.6	5.2	4.5	5.1	6.6
7	3.8	● 5.3	4.6	5.4	7.1	5.4	5.7	6.4	4.6	4.6	5.3	4.6	5.0	6.4
8	3.1	● 1.2	4.6	5.4	7.0	5.4	5.7	6.4	4.6	4.6	5.2	4.7	5.0	6.4
9	3.5	● 0.1	4.8	5.4	7.0	5.4	5.7	6.4	4.4	4.7	5.2	4.7	5.0	6.4
10	2.0	● 0.6	4.8	5.4	6.9	5.4	5.9	6.4	4.4	4.8	5.4	4.7	5.1	6.4
11	0.0	● 0.6	4.8	5.3	6.9	5.2	5.7	6.4	4.3	4.8	5.2	4.6	5.1	6.4
12	0.5	● 1.0	4.6	5.2	6.8	4.9	5.7	6.4	4.1	4.8	5.2	4.4	5.1	6.2
13	2.3	● 3.2	4.6	5.2	6.8	4.8	5.7	6.2	3.8	4.8	5.0	4.3	5.1	6.2
14	4.4	● 1.4	4.6	5.0	6.8	4.8	5.7	6.0	3.8	4.7	5.0	4.2	5.1	6.2
15	3.5	● 4.9	4.4	5.0	6.7	4.8	5.5	6.0	4.4	4.6	5.0	4.3	5.1	6.2
16	3.2	● 4.4	4.4	4.8	6.7	5.0	5.5	6.0	4.2	4.6	5.0	4.5	5.1	6.2
17	1.2	●✱ 1.1	4.2	4.8	6.6	5.0	5.5	6.0	4.1	4.6	5.0	4.3	5.1	6.0
18	− 2.1	—	4.2	4.6	6.6	4.9	5.5	6.0	4.0	4.6	5.0	3.9	5.1	6.0
19	− 4.5	✱ 1.0	4.0	4.6	6.5	4.5	5.4	6.0	3.7	4.6	5.0	3.5	5.1	6.0
20	− 1.8	✱ 3.9	3.8	4.6	6.5	4.2	5.5	5.8	3.4	4.6	5.0	3.3	5.1	6.0
21	− 2.2	✱ 1.2	3.6	4.4	6.4	3.9	5.3	5.8	3.2	4.6	5.0	3.1	5.0	6.0
22	− 6.0	✱ 2.2	3.0	4.4	6.4	3.7	5.1	6.0	3.0	4.3	5.0	2.9	5.0	6.0
23	− 9.4	✱ 2.4	2.9	4.2	6.3	3.6	4.9	5.8	2.8	4.2	5.0	2.9	4.8	6.0
24	− 16.5	—	2.8	4.1	6.3	3.4	4.7	5.8	2.8	4.2	5.0	2.7	4.7	6.0
25	− 19.9	—	2.6	4.0	6.2	3.4	4.7	5.6	2.6	4.2	5.0	2.5	4.6	6.0
26	− 13.0	—	2.5	4.0	6.2	3.2	4.7	5.6	2.4	3.8	4.8	2.5	4.6	6.0
27	− 9.0	—	2.4	3.9	6.1	3.2	4.7	5.4	2.4	3.8	4.8	2.5	4.5	5.8
28	− 4.8	—	2.4	3.8	6.0	3.0	4.5	5.4	2.2	3.8	4.8	2.3	4.4	5.8
29	− 5.5	✱ 5.0	2.2	3.6	6.0	3.0	4.5	5.4	2.2	3.8	4.8	2.3	4.3	5.8
30	− 1.8	✱ 3.9	2.0	3.4	5.8	3.0	4.3	5.4	2.2	3.6	4.8	2.3	4.2	5.8
		56.0												
Mittel	**− 1.63**	**✱ 20.1**	**3.84**	**4.79**	**6.69**	**4.37**	**5.36**	**6.11**	**3.56**	**4.46**	**5.08**	**3.67**	**4.94**	**6.17**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1890. **December.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Mustiala. Offenes, mit Timotheegras bewachsenes Sandfeld.			Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			130-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.											
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.2	2.0
1	1.9	● 1.0	2.0	3.3	5.8	3.6	2.4	4.4	2.1	3.5	4.6	2.2	*4.1*	5.6
2	2.3	● 0.4	2.0	3.2	5.8	3.0	4.3	5.2	2.2	3.4	4.6	1.7	*4.0*	5.8
3	1.2	● 2.7	1.9	3.1	5.7	2.9	4.1	5.1	2.1	3.4	4.5	1.9	*4.0*	5.6
4	− 3.5	* 3.7	1.8	3.0	5.6	2.8	4.1	5.0	2.0	3.4	4.4	2.1	*3.9*	5.4
5	− 5.6	* 0.6	1.8	3.0	5.6	3.7	4.0	5.1	2.0	3.3	4.4	2.0	*3.8*	5.4
6	− 12.1	* 0.2	1.8	3.0	5.5	2.6	3.9	5.0	2.0	3.3	4.4	2.0	*3.7*	*5.4*
7	− 4.5	—	1.6	3.0	5.5	2.6	3.8	5.0	1.9	3.1	4.4	1.9	*3.7*	*5.2*
8	− 10.7	—	1.6	3.0	5.4	2.4	3.7	4.6	1.7	3.0	4.0	1.9	*3.7*	*5.2*
9	− 5.9	—	1.6	3.0	5.4	2.6	3.9	4.8	1.9	3.2	4.0	1.9	*3.6*	*5.2*
10	− 2.9	—	1.4	2.9	5.3	2.6	3.7	4.6	1.8	3.2	4.2	1.9	*3.5*	*5.2*
11	− 3.6	—	1.4	2.8	5.3	2.4	3.7	4.6	1.7	3.0	4.0	1.9	*3.4*	*5.0*
12	− 1.9	—	1.4	2.7	5.2	2.6	3.7	4.6	1.8	3.2	4.2	1.9	*3.4*	*5.0*
13	− 2.9	—	1.4	2.6	5.2	2.4	3.5	4.6	1.8	3.0	4.2	1.9	*3.3*	*5.0*
14	− 1.8	—	1.3	2.6	5.1	2.4	3.5	4.6	1.8	2.6	4.2	1.7	*3.3*	*4.8*
15	− 1.7	—	1.2	2.6	5.0	2.4	3.5	4.4	1.6	2.8	4.0	1.8	*3.2*	*4.8*
16	− 8.6	—	1.2	2.5	5.0	2.3	3.4	4.4	1.6	2.8	4.0	1.7	*3.1*	*4.8*
17	− 11.6	—	1.2	2.5	4.9	2.2	3.5	4.4	1.6	2.8	4.0	1.7	*3.1*	*4.6*
18	− 7.5	—	1.2	2.4	4.8	2.2	3.3	4.4	1.4	2.8	4.0	1.7	*3.1*	*4.6*
19	− 4.6	* 1.4	1.2	2.4	4.8	2.2	3.3	4.4	1.4	2.7	3.8	1.7	*3.0*	*4.6*
20	− 2.0	—	1.2	2.4	4.7	2.2	3.3	4.2	1.4	2.6	3.8	0.9	*3.0*	*4.6*
21	− 2.5	* 0.7	1.0	2.2	4.7	2.1	3.2	4.4	1.4	2.6	3.8	1.3	*2.9*	4.4
22	− 4.3	—	1.0	2.2	4.6	2.0	3.2	4.4	1.3	2.5	3.8	1.3	*2.9*	4.4
23	− 9.2	* 0.4	1.0	2.2	4.6	2.0	3.2	4.4	1.2	2.4	3.8	1.3	*2.8*	4.4
24	− 6.7	—	1.0	2.2	4.6	2.0	3.1	4.4	1.2	2.4	3.8	1.3	*2.7*	4.4
25	− 6.6	—	1.0	2.1	4.5	2.0	3.1	4.2	1.2	2.4	3.6	1.3	*2.7*	4.4
26	− 4.2	* 0.8	1.0	2.1	4.5	1.9	2.9	4.2	1.2	2.4	3.6	1.3	*2.7*	4.4
27	− 6.9	—	1.0	2.0	4.5	1.9	3.0	4.0	1.2	2.3	3.4	1.2	*2.7*	4.2
28	− 10.9	—	1.0	2.0	4.4	1.8	2.9	3.8	1.2	2.4	3.4	0.9	*2.6*	4.4
29	− 5.3	—	1.0	2.0	4.4	1.8	2.9	3.8	1.2	2.4	3.4	1.1	*2.6*	4.4
30	− 6.3	—	0.9	2.0	4.3	1.8	2.9	3.8	1.0	2.2	3.4	1.1	*2.6*	4.2
31	0.9	—	0.8	2.0	4.3	1.8	2.9	3.8	1.0	2.2	3.6	1.1	*2.6*	4.2
		11.9												
Mittel	**− 4.77**	* **7.8**	**1.32**	**2.55**	**5.00**	**2.36**	**3.48**	**4.47**	**1.58**	**2.82**	**3.98**	**1.60**	**3.22**	**6.28**
Jahres mittel	**5.11**	**655.0**	**6.01**	**5.80**	**5.81**	**6.46**	**5.98**	**5.59**	**4.35**	**4.29**	**4.08**	**5.01**	**4.80**	**5.35**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1891. **Januar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 0.6	—	*1.8*	*2.9*	*3.8*	*1.0*	*2.2*	*3.6*	*1.1*	*2.6*	*4.2*
2	− 3.5	—	*1.8*	*2.9*	*3.8*	*1.0*	*2.2*	*3.5*	*1.1*	*2.6*	*4.2*
3	− 11.5	⚹ 2.0	*1.7*	*2.8*	*3.7*	*1.0*	*2.2*	*3.5*	*1.1*	*2.6*	*4.2*
4	− 6.9	⚹ 3.2	*1.7*	*2.8*	*3.7*	*0.9*	*2.1*	*3.5*	*1.0*	*2.5*	*4.2*
5	− 17.0	—	*1.7*	*2.8*	*3.7*	*0.9*	*2.1*	*3.5*	*1.0*	*2.5*	*4.1*
6	− **25.8**	—	*1.7*	*2.8*	*3.7*	*0.9*	*2.1*	*3.5*	*1.0*	*2.5*	*4.1*
7	− 24.7	—	*1.7*	*2.7*	*3.7*	*0.9*	*2.1*	*3.5*	*1.0*	*2.5*	*4.1*
8	− 10.5	⚹ 1.1	*1.7*	*2.7*	*3.6*	*0.9*	*2.0*	*3.4*	*1.0*	*2.4*	*4.1*
9	− 5.2	⚹ 4.6	*1.6*	*2.6*	*3.6*	*0.9*	*2.0*	*3.4*	*0.9*	*2.4*	*4.1*
10	− 5.9	⚹ 0.2	*1.6*	*2.6*	*3.6*	*0.8*	*2.0*	*3.4*	*0.9*	*2.4*	*4.1*
11	− 3.8	⚹ 2.4	*1.6*	*2.6*	*3.6*	*0.8*	*1.9*	*3.4*	*0.8*	*2.4*	*4.1*
12	− 9.5	⚹ 0.4	*1.6*	*2.6*	*3.5*	*0.8*	*1.9*	*3.4*	*0.8*	*2.4*	*4.0*
13	− 1.7	⚹ 2.0	*1.6*	*2.5*	*3.5*	*0.7*	*1.9*	*3.4*	*0.8*	*2.3*	*4.0*
14	− 2.6	⚹ 1.6	*1.5*	*2.5*	*3.5*	*0.7*	*1.9*	*3.4*	*0.7*	*2.3*	*4.0*
15	− 10.9	⚹ 0.4	*1.5*	*2.5*	*3.5*	*0.7*	*1.8*	*3.4*	*0.7*	*2.3*	*4.0*
16	− 11.5	⚹ 1.4	*1.5*	*2.4*	*3.5*	*0.6*	*1.8*	*3.3*	*0.7*	*2.3*	*4.0*
17	− 18.0	—	*1.5*	*2.4*	*3.4*	*0.6*	*1.8*	*3.3*	*0.6*	*2.3*	*4.0*
18	− 15.3	—	*1.4*	*2.4*	*3.4*	*0.6*	*1.7*	*3.3*	*0.6*	*2.2*	*3.9*
19	− 13.9	⚹ 0.2	*1.4*	*2.3*	*3.4*	*0.6*	*1.7*	*3.3*	*0.5*	*2.2*	*3.9*
20	− 8.4	⚹ 0.2	*1.4*	*2.3*	*3.3*	*0.5*	*1.7*	*3.2*	*0.5*	*2.2*	*3.9*
21	− 6.7	⚹ 0.2	*1.4*	*2.3*	*3.3*	*0.5*	*1.6*	*3.2*	*0.5*	*2.2*	*3.9*
22	− 9.9	⚹ 2.0	*1.4*	*2.3*	*3.3*	*0.5*	*1.6*	*3.2*	*0.4*	*2.2*	*3.8*
23	− 9.5	—	*1.4*	*2.2*	*3.2*	*0.5*	*1.6*	*3.2*	*0.4*	*2.2*	*3.8*
24	− 8.9	—	*1.3*	*2.2*	*3.2*	*0.5*	*1.6*	*3.2*	*0.4*	*2.2*	*3.8*
25	− 9.2	⚹ 1.5	*1.3*	*2.2*	*3.2*	*0.5*	*1.5*	*3.2*	*0.3*	*2.1*	*3.7*
26	− 5.1	⚹ 1.0	*1.3*	*2.1*	*3.1*	*0.4*	*1.5*	*3.1*	*0.3*	*2.1*	*3.7*
27	− 3.1	⚹ 0.6	*1.3*	*2.1*	*3.1*	*0.4*	*1.5*	*3.1*	*0.3*	*2.1*	*3.6*
28	0.3	⚹ 2.4	*1.3*	*2.1*	*3.0*	*0.4*	*1.4*	*3.1*	*0.2*	*2.1*	*3.6*
29	0.2	⚹ 1.5	*1.3*	*2.1*	*3.0*	*0.4*	*1.4*	*3.1*	*0.2*	*2.1*	*3.5*
30	0.4	⚹ 0.9	*1.2*	*2.1*	*3.0*	*0.4*	*1.4*	*3.1*	*0.2*	*2.0*	*3.5*
31	− 0.1	⚹ 0.6	*1.2*	*2.0*	*3.0*	*0.3*	*1.3*	*3.1*	*0.1*	*2.0*	*3.4*
Mittel	− **8.35**	⚹ **30.4**	**1.50**	**2.45**	**3.42**	**0.66**	**1.79**	**3.32**	**0.65**	**2.30**	**3.92**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1891. **Februar.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwald.			131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 2.3	✳ 0.6	1.2	2.0	3.0	0.3	1.3	3.1	0.1	2.0	3.4
2	− 0.1	✳ 0.9	1.2	2.2	2.8	0.4	1.4	3.0	0.3	2.0	3.6
3	1.2	✳ 0.2	1.2	2.0	2.8	0.4	1.4	3.0	0.3	1.9	3.6
4	0.3	—	1.2	2.0	2.8	0.4	1.4	3.0	0.1	1.9	3.6
5	− 10.6	—	1.2	2.0	2.8	0.4	1.4	3.0	0.1	1.9	3.6
6	− 4.3	✳ 0.3	1.2	2.0	3.0	0.4	1.3	3.0	0.3	1.9	3.4
7	− 1.8	—	1.2	2.0	2.8	0.4	1.4	3.0	0.3	2.0	3.4
8	− 0.8	—	1.2	1.9	2.8	0.3	1.3	2.8	0.3	1.9	3.2
9	− 2.8	—	1.2	1.9	2.8	0.3	1.2	2.8	0.3	1.9	3.2
10	0.0	—	1.2	1.9	2.8	0.3	1.2	2.6	0.3	1.9	3.2
11	− 2.1	✳ 3.8	1.2	1.9	2.8	0.3	1.2	2.6	0.3	1.9	3.0
12	− 8.4	✳ 8.8	1.2	1.9	2.8	0.2	1.2	2.6	0.3	1.8	3.0
13	− 14.9	—	1.2	1.9	2.6	0.4	1.2	2.8	0.3	1.8	3.0
14	− 11.8	✳ 3.4	1.2	1.9	2.6	0.3	1.2	2.6	0.3	1.8	3.0
15	− 1.5	—	1.2	1.9	2.6	0.3	1.2	2.6	0.3	1.8	3.0
16	0.5	—	1.2	1.9	2.6	0.4	1.2	2.8	0.3	1.9	3.2
17	− 5.3	—	1.2	1.9	2.6	0.3	1.2	2.6	0.3	1.8	3.0
18	− 0.2	—	1.1	1.9	2.6	0.3	1.2	2.6	0.2	1.8	3.0
19	2.2	—	0.8	1.9	2.6	0.3	1.2	2.6	0.2	1.8	3.0
20	1.4	—	0.9	1.9	2.6	0.3	1.2	2.6	0.2	1.8	3.0
21	− 1.1	—	1.2	1.7	2.5	0.4	1.2	2.8	0.3	1.8	3.2
22	− 5.3	—	1.1	1.7	2.5	0.4	1.2	2.8	0.3	1.8	3.2
23	− 2.2	—	1.1	1.9	2.5	0.4	1.2	2.8	0.3	1.8	3.2
24	− 3.3	—	1.2	1.9	2.4	0.4	1.2	2.8	0.3	1.8	3.0
25	− 4.5	—	1.2	1.7	2.4	0.4	1.2	2.8	0.3	1.8	3.0
26	− 4.2	—	1.2	1.7	2.4	0.4	1.2	2.8	0.3	1.8	3.0
27	− 1.5	—	1.1	1.8	2.4	0.3	1.1	2.6	0.2	1.7	3.0
28	− 0.7	—	1.1	1.8	2.3	0.3	1.1	2.6	0.2	1.7	3.0
Mittel	**− 2.65**	**✳ 18.0**	**1.16**	**1.90**	**2.65**	**0.35**	**1.24**	**2.78**	**0.26**	**1.85**	**3.18**

Bodentemperatur 9^h a. m. C°

1891. **März.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			Heinäis. 131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Heinäis. Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	0.3	✱ 1.6	1.0	1.7	2.3	0.4	1.2	2.5	0.2	1.6	3.0
2	2.0	● 1.2	1.0	1.7	2.3	0.4	1.2	2.6	0.1	1.6	3.0
3	– 2.2	✱ 7.0	1.0	1.7	2.2	0.4	1.2	2.6	0.2	1.6	3.0
4	– 5.0	✱ 0.3	1.0	1.7	2.2	0.4	1.2	2.6	0.3	1.6	3.0
5	– 4.1	✱ 2.0	1.0	1.7	2.2	0.4	1.2	2.6	0.3	1.6	3.0
6	– 8.8	—	1.1	1.7	2.2	0.3	1.1	2.4	0.2	1.6	3.0
7	– 11.5	—	1.0	1.7	2.1	0.4	1.1	2.6	0.3	1.6	3.2
8	– 7.4	—	1.0	1.7	2.1	0.4	1.1	2.4	0.1	1.6	3.2
9	– 8.6	—	1.0	1.7	2.1	0.4	1.1	2.4	0.1	1.6	3.2
10	– 5.5	✱ 0.8	1.0	1.7	2.0	0.3	1.1	2.4	0.1	1.6	3.2
11	– 4.0	✱ 1.5	1.0	1.7	2.0	0.3	1.1	2.4	0.1	1.6	3.2
12	0.4	—	1.0	1.7	2.0	0.3	1.0	2.4	0.1	1.6	3.2
13	– 3.7	✱ 0.4	1.0	1.7	2.0	0.4	1.1	2.4	0.2	1.6	3.2
14	– 6.7	—	1.0	1.7	2.0	0.4	1.1	2.4	0.2	1.6	3.2
15	– 2.6	✱ 3.8	1.1	1.6	2.2	0.3	1.0	2.4	0.2	1.6	3.2
16	0.7	✱ 1.0	1.0	1.6	2.0	0.3	1.0	2.4	0.1	1.4	3.2
17	– 1.1	✱ 0.2	1.0	1.6	1.8	0.4	1.0	2.4	0.2	1.6	3.2
18	– 2.2	—	1.0	1.6	1.8	0.3	1.0	2.4	0.3	1.6	3.2
19	– 5.2	—	1.1	1.6	2.0	0.3	1.0	2.4	0.2	1.5	3.2
20	– 10.3	—	1.0	1.6	1.8	0.3	1.0	2.4	0.2	1.6	3.2
21	– 6.6	—	1.0	1.6	1.8	0.2	1.0	2.4	0.1	1.6	*3.0*
22	– 9.9	—	1.0	1.6	2.0	0.2	1.0	2.4	0.1	1.5	*3.0*
23	– 11.3	—	1.0	1.5	1.8	0.2	1.0	2.4	0.1	1.6	*3.0*
24	– 11.2	—	1.0	1.5	2.0	0.1	1.0	2.4	0.0	1.5	2.8
25	– 11.4	—	1.0	1.6	1.8	0.0	1.0	2.4	0.0	1.6	3.0
26	– 9.6	—	1.0	1.5	1.8	0.0	1.0	2.6	**–0.1**	1.5	3.0
27	– 3.9	✱ 1.6	0.9	1.5	1.7	0.1	1.0	2.4	0.3	1.4	2.8
28	– 0.1	—	0.9	1.5	2.0	0.0	0.9	2.4	0.2	1.4	2.8
29	– 1.5	✱ 0.9	**0.9**	1.5	2.0	**0.0**	1.0	2.4	0.2	1.4	2.8
30	– 1.1	✱ 3.4	0.9	1.5	2.0	0.0	1.0	2.4	0.1	1.4	2.8
31	– 1.9	✱ 2.4	0.9	1.5	2.0	0.1	0.9	2.4	0.0	1.4	2.8
		28.1									
Mittel	**– 4.97**	✱ **26.9**	**0.99**	**1.62**	**2.01**	**0.26**	**1.05**	**2.44**	**0.15**	**1.55**	**3.05**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1891. **April.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis.								
			Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	− 1.6	✳ 1.7	1.0	1.5	1.8	0.2	1.0	2.4	0.1	1.4	2.8
2	1.4	—	1.0	1.5	1.8	0.2	1.0	2.4	0.1	1.4	3.0
3	0.7	—	1.0	1.5	1.6	0.2	1.0	2.0	0.1	1.4	3.0
4	− 3.3	—	1.0	1.5	1.6	0.2	1.0	2.0	0.1	1.4	3.0
5	− 2.1	—	1.0	1.5	1.6	0.2	1.0	2.0	0.1	1.4	3.0
6	0.3	—	1.0	1.5	1.6	0.2	1.0	2.2	0.1	1.2	3.0
7	− 1.6	—	1.0	1.5	1.6	0.2	1.0	2.2	0.1	1.1	3.0
8	− 1.6	—	1.0	1.5	1.6	0.2	1.0	2.4	0.1	1.2	3.0
9	1.5	—	1.0	1.5	1.6	0.2	1.0	2.4	0.1	1.4	3.0
10	1.0	—	1.0	1.5	1.6	0.2	1.0	2.2	0.1	1.4	3.0
11	1.7	—	1.0	1.5	1.6	0.2	1.0	2.2	0.1	1.4	3.0
12	2.9	—	1.0	1.5	1.8	0.2	1.0	2.2	0.2	1.4	3.0
13	3.1	—	1.0	1.5	1.8	0.2	1.0	2.2	0.2	1.4	3.0
14	3.5	—	1.0	1.5	1.8	0.3	1.0	2.0	0.3	1.4	3.0
15	2.3	—	1.0	1.5	2.0	0.3	1.0	2.0	0.3	1.4	3.0
16	2.4	—	1.0	1.5	2.0	0.3	1.0	2.0	0.3	1.4	3.0
17	4.0	—	1.0	1.5	2.0	0.3	1.0	2.0	0.3	1.4	3.0
18	5.2	—	1.0	1.5	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	3.0
19	3.9	—	1.0	1.5	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	3.0
20	3.4	—	1.0	1.5	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	3.0
21	5.4	—	1.0	1.5	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	3.0
22	4.2	—	1.0	1.5	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	2.8
23	1.9	—	1.0	1.5	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	2.8
24	0.8	—	1.0	1.5	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	2.8
25	2.2	—	1.0	1.5	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	2.8
26	0.7	—	1.0	1.5	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	2.8
27	2.5	—	1.0	1.3	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	2.6
28	5.7	—	1.0	1.3	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	2.6
29	7.7	● 5.6	1.0	1.3	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	2.6
30	3.3	● 3.1	1.0	1.4	2.0	0.4	0.9	2.0	0.3	1.4	2.6
		10.4									
Mittel	2.05	✳ 1.7	1.00	1.48	1.84	0.30	0.96	2.09	0.22	1.38	2.91

Bodentemperatur 9^h a. m. C^0

1891. **Mai.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	6.0	● 3.4	1.0	1.5	2.0	0.0	0.9	2.0	0.3	1.2	2.6
2	7.3	● 2.0	1.0	1.5	2.0	0.0	0.9	2.0	0.3	1.2	2.6
3	8.2	● 4.4	1.0	1.5	2.0	0.0	0.9	2.0	0.3	1.2	2.6
4	1.7	● 2.8	1.0	1.5	2.0	0.0	0.9	2.0	0.3	1.2	2.6
5	0.0	—	1.2	1.5	2.0	0.0	0.9	2.0	0.3	1.2	2.6
6	3.9	—	1.4	1.5	2.0	0.0	0.9	2.0	0.3	1.2	2.6
7	5.4	● 0.3	1.5	1.7	2.0	0.0	0.9	1.8	0.3	1.2	2.6
8	7.0	—	1.6	1.7	2.3	0.2	0.8	1.8	0.3	1.0	2.4
9	8.7	—	1.6	1.7	2.3	0.2	0.9	1.8	0.3	1.1	2.4
10	9.0	—	1.8	1.9	2.2	0.4	0.9	1.8	0.3	1.2	2.4
11	7.9	—	3.3	2.1	2.2	0.4	0.9	2.0	0.4	1.2	2.4
12	10.1	—	3.2	2.3	2.2	0.4	0.9	2.0	0.3	1.2	2.4
13	11.9	● 0.3	3.2	2.3	2.2	0.4	0.9	2.0	0.3	1.2	2.4
14	4.5	● 11.1	3.2	2.3	2.3	0.4	0.9	2.0	0.3	1.2	2.4
15	6.5	—	4.4	2.9	2.4	0.4	0.9	2.0	0.3	1.2	2.4
16	5.5	▲● 1.6	4.8	3.3	2.4	0.4	0.8	2.0	0.4	1.2	2.4
17	5.3	● 0.4	5.4	3.5	2.6	0.4	0.8	2.0	0.5	1.4	2.4
18	6.9	● 3.2	5.4	3.5	2.6	0.4	0.9	2.0	0.5	1.4	2.4
19	6.5	● 0.6	5.6	3.6	2.8	0.4	0.8	1.8	0.5	1.2	2.4
20	8.5	● 3.4	5.8	3.6	2.8	0.4	0.8	1.8	0.7	1.3	2.4
21	8.5	—	6.0	4.3	3.0	0.4	0.8	1.8	0.7	1.4	2.4
22	13.1	● 0.3	6.0	4.3	3.0	0.4	0.8	1.8	0.7	1.4	2.4
23	15.0	● 5.4	6.8	4.3	3.0	0.4	1.0	2.0	1.0	1.8	2.8
24	11.8	—	7.8	4.5	3.0	0.4	0.8	2.0	1.7	1.9	2.8
25	10.2	—	8.0	4.5	3.4	0.4	0.8	1.8	3.1	2.0	2.4
26	13.9	● 0.7	9.0	5.3	3.4	0.4	0.8	1.8	4.9	2.8	2.8
27	15.6	● 4.2	9.9	5.5	3.6	0.4	0.8	1.6	6.0	3.0	2.6
28	18.2	—	10.0	5.7	3.6	0.4	0.8	1.6	6.5	3.2	2.8
29	17.3	—	10.2	5.9	3.6	0.5	0.9	1.6	6.9	3.4	3.0
30	16.3	—	10.6	6.5	3.6	0.5	0.9	1.6	7.3	4.4	3.0
31	16.6	—	10.8	6.5	4.0	0.5	0.9	1.6	7.3	3.9	3.0
Mittel	**9.27**	**44.1**	**4.92**	**3.31**	**2.66**	**0.40**	**0.86**	**1.87**	**1.72**	**1.72**	**2.54**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1891. **Juni.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	13.1	—	10.7	6.9	4.2	0.6	1.0	1.6	7.3	4.4	*3.2*
2	11.2	—	10.8	7.3	4.0	0.6	1.0	1.8	7.3	4.4	*3.4*
3	4.3	—	10.6	7.3	4.2	1.0	1.0	1.8	7.0	4.6	3.6
4	2.4	●▲✳2.7	9.6	7.5	4.4	1.2	1.0	2.0	6.3	4.6	*3.8*
5	3.7	●▲✳2.5	9.4	7.5	4.4	1.2	1.0	2.0	6.3	4.6	*3.8*
6	3.3	—	8.8	7.3	4.6	1.2	1.2	2.0	5.3	4.6	3.6
7	5.5	● 0.1	8.8	7.1	4.8	1.4	1.4	2.0	5.3	4.6	4.0
8	9.0	—	8.4	7.1	4.8	1.6	1.4	2.0	5.3	4.6	4.0
9	11.8	—	8.4	7.1	4.8	1.6	1.6	2.0	5.3	4.6	4.0
10	7.4	—	8.8	6.9	4.8	2.6	1.8	2.0	5.5	4.4	4.0
11	6.3	—	8.4	6.9	5.0	2.4	*1.9*	2.0	5.5	4.4	*4.0*
12	7.6	—	8.6	7.1	5.0	3.0	2.1	2.0	5.5	4.4	4.0
13	9.5	—	8.6	7.1	5.0	3.0	2.2	2.8	5.5	4.4	4.0
14	9.8	—	8.6	7.0	5.2	3.2	2.3	2.0	5.5	4.4	4.0
15	10.1	—	9.0	7.1	5.0	3.6	2.6	3.0	5.7	4.6	4.0
16	10.7	● 11.1	8.4	7.0	5.2	3.4	2.4	2.0	5.6	4.6	4.0
17	11.9	● 9.9	9.2	7.1	5.2	3.8	2.6	3.0	5.5	4.6	4.2
18	15.0	—	9.6	7.3	5.2	4.4	2.8	3.0	6.3	4.6	4.4
19	15.1	—	10.0	7.3	5.2	5.0	3.0	3.0	6.5	4.8	4.6
20	15.5	—	10.4	7.3	5.4	5.4	3.4	3.0	7.1	4.9	4.6
21	17.7	—	10.6	7.7	5.4	5.8	3.6	3.0	7.3	5.0	4.6
22	19.9	—	11.0	7.9	5.4	6.0	3.8	3.0	7.5	5.0	4.8
23	20.5	—	11.0	8.0	5.6	6.4	4.0	*3.2*	7.9	4.9	*4.8*
24	22.4	—	10.9	*8.5*	5.4	*7.4*	*4.6*	3.4	*8.5*	*5.2*	*4.8*
25	**23.0**	—	10.9	8.9	5.4	*8.0*	*5.0*	3.4	9.3	5.6	5.0
26	20.3	—	*11.8*	8.9	5.4	8.4	5.4	3.6	9.3	6.0	5.0
27	20.3	● 0.8	12.8	8.9	5.8	8.2	5.4	3.6	9.1	5.8	5.0
28	21.0	● 8.6	12.8	9.2	5.8	8.2	5.6	3.6	9.3	6.0	5.0
29	13.4	● 0.2	12.8	9.3	5.8	8.4	5.8	3.6	9.3	6.2	5.0
30	16.1	● 0.3	13.0	9.5	6.0	8.6	5.8	3.8	9.5	6.2	5.0
Mittel	**12.86**	**36.2**	**10.09**	**7.67**	**5.08**	**4.19**	**2.89**	**2.64**	**6.89**	**4.90**	**4.27**

Bodentemperatur 9h a. m. C⁰

1891. **Juli.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	17.4	—	12.8	9.5	6.2	8.6	6.0	3.8	9.3	6.4	5.0
2	16.1	—	13.2	9.7	6.4	8.8	6.0	3.8	9.3	6.4	5.0
3	18.9	—	13.0	9.8	6.4	8.8	6.0	4.0	9.5	6.6	5.0
4	17.3	—	12.8	10.0	6.6	8.8	6.0	4.0	9.5	6.4	5.0
5	15.7	● 0.7	12.7	10.0	6.8	8.9	6.2	4.0	9.6	6.4	5.0
6	15.0	—	13.2	10.0	6.8	9.0	6.4	*4.2*	9.7	6.7	*5.2*
7	15.2	—	13.2	10.0	6.8	9.0	6.4	*4.2*	9.5	6.8	*5.2*
8	13.8	—	13.2	10.1	7.0	9.0	6.4	*4.4*	9.7	7.0	*5.4*
9	15.8	● 0.8	13.2	10.1	7.0	9.0	6.4	*4.4*	9.7	7.0	*5.4*
10	14.1	● 0.3	13.0	10.1	7.2	8.8	6.6	*4.6*	9.5	7.0	*5.6*
11	14.0	● 0.7	12.8	10.1	7.2	8.8	6.6	*4.6*	9.5	7.0	*5.6*
12	14.0	● 0.3	12.8	10.2	7.4	*9.0*	6.6	*4.8*	9.5	7.0	*5.6*
13	18.2	—	13.0	10.2	7.4	9.0	6.7	*4.8*	9.7	7.0	*5.8*
14	21.7	—	13.4	10.3	7.4	9.2	6.8	5.0	10.0	7.0	*5.8*
15	21.5	● 5.7	13.6	10.3	7.4	9.6	6.9	5.0	10.3	7.2	6.0
16	22.6	—	13.5	10.5	7.4	9.8	6.8	5.0	10.1	7.2	6.0
17	19.1	—	13.6	10.7	7.4	9.8	6.8	5.0	10.5	7.2	6.0
18	19.7	—	13.8	10.9	7.6	10.0	7.2	5.0	11.0	7.2	6.0
19	21.1	—	13.8	11.0	7.8	10.1	7.4	5.0	10.9	7.4	6.0
20	21.1	—	13.8	11.0	7.6	10.1	7.4	5.0	10.9	7.4	6.0
21	21.2	—	13.8	11.1	7.6	10.2	7.4	5.4	11.0	7.6	6.2
22	21.7	● 1.5	14.0	11.0	7.8	10.2	7.6	5.4	11.0	7.6	6.2
23	21.6	● 9.0	14.4	11.1	7.8	10.4	7.8	5.4	11.0	7.9	6.2
24	21.4	● 0.7	14.4	11.0	8.0	10.6	7.8	5.4	10.9	7.9	6.2
25	17.7	● 0.7	14.5	11.3	8.2	10.6	7.8	5.6	11.0	8.0	6.2
26	13.8	● 10.0	14.5	11.4	8.4	10.6	8.2	5.6	11.4	8.2	6.4
27	16.0	—	14.6	11.5	8.4	**10.6**	8.2	5.8	**11.5**	8.2	6.4
28	16.6	● 1.6	**14.8**	11.5	8.2	10.6	8.2	5.8	11.5	8.3	6.4
29	15.0	● 5.0	14.2	11.7	8.4	10.6	8.2	5.8	11.3	8.4	6.4
30	15.6	—	14.3	**11.7**	8.4	10.5	8.2	5.8	11.4	8.4	6.4
31	17.0	● 0.2	14.4	11.7	8.4	10.4	8.2	5.8	11.4	8.4	6.6
Mittel	**17.74**	**37.2**	**13.62**	**10.63**	**7.46**	**9.66**	**7.07**	**4.92**	**10.36**	**7.33**	**5.81**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1891. **August.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde. Tiefe unter der Oberfläche in Metern. 0.5	1.0	2.0	131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe. 0.5	1.0	2.0	Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer. 0.5	1.0	2.0
1	16.5	—	14.2	11.6	8.6	10.4	8.3	*5.8*	11.2	8.4	*6.6*
2	16.2	—	14.0	11.7	8.6	10.4	8.4	6.0	11.3	8.4	7.0
3	14.2	—	14.1	11.6	8.8	10.4	8.3	6.0	11.2	8.5	6.8
4	15.7	—	13.4	11.5	8.8	10.0	8.2	6.0	10.9	8.4	7.2
5	13.3	● 9.3	13.5	11.6	8.8	10.0	8.2	6.0	10.8	8.4	*7.2*
6	12.7	● 1.4	12.8	11.5	8.8	9.7	8.3	6.0	10.7	8.4	7.3
7	12.9	● 0.4	12.8	11.2	8.6	9.6	8.3	6.4	10.7	8.1	7.6
8	12.8	—	12.8	11.0	8.6	9.6	8.3	6.4	10.5	8.2	7.4
9	11.3	—	12.8	11.0	8.6	9.7	8.3	6.4	10.5	8.4	7.2
10	10.9	—	12.8	11.2	8.6	9.4	8.3	6.0	10.2	8.4	7.1
11	12.4	● 1.4	12.8	11.3	*8.8*	9.2	8.0	6.0	10.1	8.4	7.0
12	12.5	—	12.8	11.2	*8.8*	9.2	8.0	6.0	10.1	8.3	7.0
13	14.6	● 0.5	12.5	11.1	*8.8*	9.2	7.9	6.0	10.1	8.4	7.0
14	15.2	● 0.6	13.2	11.5	*8.6*	9.6	8.0	6.4	10.5	8.4	7.0
15	15.3	—	13.2	11.1	*8.6*	9.8	8.0	6.4	10.5	8.4	7.0
16	14.6	—	13.3	11.1	9.0	9.8	8.0	6.2	10.6	8.2	7.0
17	13.7	—	12.9	11.1	8.6	9.6	8.0	6.2	10.3	8.4	7.0
18	11.9	—	*12.2*	*11.3*	8.8	9.4	8.0	6.4	10.3	**8.6**	7.2
19	11.2	● 7.3	11.8	*11.1*	8.6	9.2	8.0	6.2	10.5	8.4	7.0
20	11.1	—	12.3	11.1	*8.4*	9.2	8.0	6.2	11.1	8.4	7.0
21	9.2	—	12.2	11.0	*8.4*	9.2	8.0	6.2	10.9	8.4	7.0
22	10.7	● 1.9	12.5	11.0	*8.6*	9.2	7.9	6.6	10.7	8.4	7.2
23	10.8	● 5.5	12.4	10.7	*8.6*	9.2	7.8	6.6	10.7	8.3	7.2
24	11.5	● 0.2	12.5	10.4	*8.6*	9.4	7.8	6.6	10.7	8.3	7.3
25	12.0	● 2.6	12.2	10.7	*9.0*	9.5	7.8	6.4	10.5	8.3	7.2
26	15.0	● 4.4	12.2	10.5	*9.0*	9.5	7.7	6.6	10.5	8.3	7.3
27	17.5	● 0.2	12.2	10.6	9.2	9.5	7.7	6.4	10.2	8.4	7.2
28	18.1	—	12.3	10.7	9.2	9.5	*7.9*	6.5	10.3	8.4	7.0
29	13.4	—	12.2	10.7	**9.2**	9.5	*8.4*	6.5	10.3	8.4	7.0
30	13.0	● 0.4	12.2	10.7	9.2	9.5	*8.4*	6.8	10.3	8.3	7.0
31	11.5	—	12.1	10.7	9.2	9.7	**8.5**	*6.8*	10.3	8.3	7.5
Mittel	**13.28**	**36.1**	**12.75**	**11.08**	**8.77**	**9.58**	**8.09**	**6.29**	**10.56**	**8.36**	**7.11**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1891. **September.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde. Tiefe unter der Oberfläche in Metern. 0.5	1.0	2.0	131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe. 0.5	1.0	2.0	Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer. 0.5	1.0	2.0
1	13.2	● 7.4	11.8	10.9	9.0	9.4	8.2	6 6	10.3	8.6	7.8
2	14.6	● 1.7	12.0	10.9	9.0	9.4	8.0	6.8	10.3	8.6	7.8
3	12.6	● 1.1	11.4	10.4	9.0	9.0	7.8	7.0	9.6	8.2	7.6
4	9.4	● 14.9	11.8	10.1	9.0	9.5	8.0	7.0	10.3	8.4	7.4
5	9.8	● 0.2	11.6	10.3	8.7	9.3	8.1	6.6	10.0	8.4	7.4
6	7.9	● 0.1	11.6	10.3	8.6	9.2	8.1	6.6	10.0	8.5	7.7
7	9.6	● 5.1	11.4	10.4	9.2	9.3	8.2	7.0	9.9	8.2	7.7
8	9.7	● 9.4	11.4	10.4	9.2	8.5	8.2	7.0	9.3	8.4	7.4
9	9.8	—	11.0	10.4	9.0	8.6	7.8	6.8	9.3	8.3	7.4
10	11.5	● 4.9	11.0	10.4	9.0	8.6	7.8	6.6	9.3	8.3	7.3
11	9.5	● 0.4	11.0	10.4	9.0	8.6	7.8	6.6	9.3	8.3	7.2
12	8.4	—	11.0	10.2	9.2	8.7	7.7	6.6	9.3	8.3	7.4
13	12.4	—	11.0	10.2	9.2	8.6	7.7	6.6	9.3	8.3	7.4
14	10.9	—	10.8	10.1	9.2	8.6	7.7	6.8	9.3	8.3	7.4
15	11.1	● 0.6	10.7	10.0	9.2	8.5	7.7	7.0	9.3	8.3	7.5
16	9.7	● 3.4	10.6	9.9	8.8	8.6	7.7	7.0	9.2	8.3	7.8
17	7.8	● 9.5	10.6	9.9	8.6	8.8	7.8	7.2	9.2	8.2	7.4
18	6.8	● 1.5	10.6	9.8	8.5	9.2	8.0	7.2	9.2	8.2	7.2
19	6.8	● 8.6	10.1	9.8	9.0	8.2	7.6	6.8	8.7	8.1	7.4
20	6.1	● 0.2	9.7	9.8	8.8	7.9	7.5	7.0	8.7	8.1	7.5
21	7.3	● 0.1	9.4	9.6	8.6	7.6	7.4	7.0	8.1	8.0	7.6
22	3.9	● 0.9	10.0	9.5	8.6	7.4	7.4	7.0	7.9	8.0	7.8
23	2.7	—	9.6	9.3	8.6	7.2	7.2	7.0	7.5	7.8	7.8
24	4.3	● 0.1	8.2	9.1	8.6	6.8	7.2	6.8	7.1	7.8	7.8
25	7.6	● 4.0	7.8	8.9	8.4	6.4	7.0	6.8	6.7	7.6	7.8
26	10.1	● 1.1	7.8	8.7	8.6	6.5	6.8	6.4	6.7	7.2	7.2
27	10.6	● 2.7	8.2	8.6	8.4	7.0	6.8	6.8	7.1	7.2	7.4
28	10.1	● 0.5	8.7	8.6	8.4	7.3	6.8	6.8	7.7	7.2	7.3
29	10.7	● 0.5	8.9	8.6	8.2	7.4	6.8	7.0	7.7	7.2	7.2
30	12.2	● 0.2	9.4	8.5	8.2	7.6	6.8	7.0	7.9	7.4	7.4
Mittel	**9.24**	**79.1**	**10.30**	**9.80**	**8.79**	**8.26**	**7.59**	**6.85**	**8.81**	**8.06**	**7.50**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1891. **October.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	12.3	—	9.4	8.6	8.4	7.8	6.9	6.6	8.3	7.2	7.0
2	11.9	—	9.5	8.7	8.2	8.0	7.0	6.6	8.5	7.4	7.2
3	11.5	● 0.4	9.6	8.7	8.2	8.2	7.0	6.8	8.7	7.6	7.2
4	7.6	● 0.2	9.5	8.8	8.3	8.1	7.2	6.4	8.6	7.6	7.0
5	7.2	● 0.2	9.5	8.8	8.3	8.1	7.2	6.2	8.6	7.6	7.0
6	7.7	—	9.0	9.0	8.0	7.8	7.2	6.2	8 3	7.6	7.2
7	11.9	—	8.4	8.7	8.2	7.4	7.2	6.2	7.8	7.6	7.0
8	11.0	—	8.4	8.3	8.3	7.4	7.3	6.4	7.7	7.4	7.3
9	9.8	● 0.4	8.2	8.4	8.1	7.5	7.1	6.5	7.7	7.4	7.2
10	9.1	—	8.2	8.3	8.3	7.6	7.1	6.6	7.5	7.4	7.3
11	8.8	—	8.2	8.3	8.0	7.6	7.0	6.8	7.5	7.4	7.4
12	8.7	—	7.8	8.3	8.0	7.4	7.0	6.6	7.3	7.4	7.2
13	6.5	—	7.6	8.3	8.0	7.4	7.0	6.4	7.1	7.3	7.2
14	7.7	—	7.2	8.1	7.8	7.0	6.9	6.2	6.9	7.2	7.2
15	10.3	● 6.2	7.2	7.9	8.0	7.0	6.8	6.2	6.7	7.1	7.0
16	9.4	● 2.2	7.6	7.9	7.8	7.2	6.8	6.2	6.9	7.0	7.2
17	8.0	● 2.7	7.6	7.8	7.7	7.2	6.8	6.2	7.1	7.0	7.2
18	8.6	● 7.3	7.6	7.7	7.7	7.2	6.8	6.4	6.9	6.9	7.0
19	1.5	—	7.8	7.8	7.8	7.2	6.8	6.1	6.9	6.9	7.0
20	0.1	●✱ 6.4	7.6	7.7	7.7	6.9	6.8	6.4	6.7	6.9	7.1
21	− 1.6	✱ 3.8	6.4	7.6	7.5	6.4	6.8	6.4	6.4	6.8	7.1
22	− 1.4	✱● 16.4	6.4	7.5	7.8	5.6	6.5	6.0	5.6	6.7	7.0
23	8.2	● 2.6	6.1	7.5	7.6	5.2	6.3	6.4	5.9	6.5	7.2
24	8.0	—	5.9	7.3	7.4	5.3	6.1	6.4	5.2	6.3	7.1
25	2.8	—	5.9	7.3	7.4	5.3	5.8	6.3	5.1	6.3	7.1
26	0.3	✱ 2.2	5.8	7.0	7.4	5.3	5.9	6.0	4.7	6.0	7.0
27	0.1	—	5.6	6.9	7.2	5.2	5.8	6.0	4.5	5.8	7.0
28	− 2.6	—	5.6	6.7	7.2	5.0	5.8	6.4	4.5	5.8	7.0
29	− 4.0	—	5.2	6.7	7.2	4.6	5.7	6.4	4.3	5.7	6.8
30	− 1.4	—	4.7	6.5	7.1	4.4	5.6	6.2	4.2	5.6	6.6
31	5.0	—	4.5	6.3	7.1	4.1	5.5	6.2	4.0	5.5	6.5
		51.0									
Mittel	**5.90**	✱ **17.4**	**7.35**	**7.85**	**7.80**	**6.66**	**6.64**	**6.35**	**6.65**	**6.87**	**7.07**

Bodentemperatur 9h a. m. C°

1891. **November.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C°	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwald.			131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trocknerer.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	2.4	—	4.2	6.1	7.0	3.8	5.4	6.2	3.7	5.4	6.4
2	2.6	● 0.2	4.0	5.9	7.0	3.6	5.1	6.0	3.5	5.2	6.2
3	3.2	● 0.4	3.8	5.7	7.0	3.7	5.0	6.0	3.5	5.1	6.2
4	− 4.5	—	3.8	5.5	7.0	3.7	4.9	6.0	3.3	5.1	6.2
5	0.4	● 0.9	3.6	5.5	6.6	3.6	4.9	5.8	3.3	4.8	6.2
6	− 5.8	—	3.5	5.3	6.4	3.4	4.6	5.6	3.3	4.8	6.1
7	2.0	—	3.5	5.2	6.4	3.4	4.6	5.6	3.3	4.8	6.1
8	1.2	—	3.5	5.2	6.4	3.3	4.6	5.4	3.3	4.8	6.1
9	2.7	● 0.9	3.5	5.0	6.4	3.1	4.4	5.4	3.0	5.0	6.1
10	1.0	—	3.5	5.0	6.3	3.1	4.3	5.1	3.2	4.9	6.1
11	1.0	—	2.9	4.5	6.3	3.2	4.3	5.1	3.0	4.9	6.1
12	0.2	✳ 0.6	2.8	4.5	6.2	3.2	4.2	5.1	3.1	4.8	6.0
13	− 2.6	✳ 3.9	2.8	4.5	6.0	3.1	4.1	5.4	3.3	4.5	5.6
14	− 4.1	✳ 0.1	2.8	4.5	6.0	3.1	4.1	5.4	3.3	4.1	5.6
15	− 3.4	✳ 0.4	3.0	4.5	5.8	3.0	4.1	5.6	2.5	4.0	6.0
16	− 1.9	✳ 0.6	3.0	4.4	5.6	3.1	4.2	5.6	2.5	4.0	5.6
17	0.9	● 0.9	2.8	4.3	5.6	2.8	4.0	5.6	2.5	4.0	5.8
18	0.7	✳ 0.1	2.8	4.3	5.6	2.8	4.0	5.6	2.3	3.9	5.8
19	− 4.3	✳ 1.6	2.8	4.1	5.4	2.8	4.0	5.4	2.3	3.8	5.6
20	− 1.6	✳ 8.0	2.8	4.1	5.4	2.8	3.8	5.0	2.3	3.8	5.6
21	− 4.4	✳ 0.4	2.7	4.1	5.4	2.7	3.8	5.0	2.3	3.8	5.6
22	− 9.3	—	2.6	3.5	5.4	2.6	3.8	5.2	2.3	3.8	5.6
23	− 17.1	—	2.8	3.9	5.2	2.6	3.4	5.2	2.3	3.8	5.4
24	− 13.9	—	2.8	3.9	5.2	2.6	3.4	5.2	2.3	3.8	5.4
25	− 7.1	—	2.8	3.9	5.2	2.4	3.4	5.2	2.1	3.8	5.2
26	− 7.6	—	2.6	3.7	5.0	2.3	3.4	5.2	1.9	3.6	5.2
27	− 6.5	✳ 3.7	2.5	3.7	5.0	2.2	3.4	5.2	1.9	3.6	5.2
28	− 4.6	✳ 6.3	2.5	3.7	5.0	2.2	3.4	5.0	1.9	3.5	5.2
29	− 6.9	✳ 4.4	2.5	3.6	5.0	2.1	3.4	4.6	1.9	3.5	5.1
30	− 4.4	✳ 0.1	2.5	3.6	5.0	2.1	3.3	4.4	1.9	3.5	5.1
		33.5									
Mittel	− 2.72	✳ 30.2	3.06	4.52	5.86	2.95	4.11	5.37	2.71	4.28	5.75

Bodentemperatur 9^h a. m. C⁰

1891. **December.**

Datum.	Lufttemperatur in Mustiala C⁰	Niederschlag in Mustiala mm.	Heinäis. Offener Platz im nebenbei erwähnten Fichtenwalde.			131-jähriger Fichtenwald auf niedrig gelegenem, feuchtem Geschiebe.			Birkenwald in der Nähe des Fichtenwaldes. Boden trockner.		
			Tiefe unter der Oberfläche in Metern.								
			0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
1	−0.9	* 1.3	2.5	3.4	*4.8*	2.1	3.3	4.4	2.0	3.3	5.1
2	−2.4	* 0.4	2.5	2.4	*4.8*	1.7	3.3	4.3	2.0	3.3	5.1
3	−2.2	* ● 1.6	2.5	3.2	*4.6*	1.7	3.3	4.3	2.0	3.2	5.1
4	−1.9	* ● 3.1	2.5	3.2	*4.6*	1.7	3.3	4.4	2.0	3.2	5.1
5	2.7	● 1.0	2.5	3.2	*4.5*	1.7	3.3	4.4	2.0	3.2	5.1
6	1.3	—	2.5	3.4	*4.5*	1.7	3.3	4.4	2.0	3.2	5.1
7	−8.6	—	2.5	3.4	4.4	1.6	3.1	4.4	2.0	3.2	5.1
8	−10.8	—	2.3	3.4	4.4	1.6	3.1	4.3	2.0	3.2	5.1
9	−5.7	* 1.2	2.3	3.4	4.4	1.6	3.1	4.1	2.0	3.1	5.1
10	0.9	● 6.1	2.3	3.4	4.4	1.6	2.9	4.1	2.0	3.1	5.1
11	2.1	—	2.2	3.4	4.4	1.6	2.8	4.1	2.0	3.1	5.1
12	−1.9	—	2.3	3.4	4.4	1.6	2.8	4.0	1.7	3.0	5.0
13	−1.7	* 4.4	2.2	3.2	4.4	1.6	2.8	4.0	1.7	3.0	5.0
14	−1.0	* 2.5	2.2	3.2	4.2	1.6	2.8	4.0	1.7	3.0	4.8
15	−6.6	* 0.8	2.2	3.2	4.2	1.6	2.8	4.0	1.7	3.0	4.8
16	−12.1	—	2.2	3.2	4.2	1.6	2.6	4.0	1.7	3.0	4.8
17	−11.0	—	2.2	3.2	4.2	1.6	2.6	4.0	1.7	2.9	4.6
18	−14.4	—	2.2	3.2	4.2	1.4	2.6	4.1	1.7	2.9	4.6
19	−21.1	—	2.2	3.2	4.2	1.4	2.6	4.1	1.7	2.9	*4.4*
20	*−0.4*	—	2.2	2.9	4.2	1.3	2.5	4.1	1.7	2.8	*4.3*
21	*+2.5*	—	2.2	3.0	4.2	1.3	2.4	4.1	1.3	2.9	*4.3*
22	−1.1	—	2.2	3.0	3.8	1.3	2.4	4.1	1.3	2.9	*4.3*
23	−1.8	—	2.0	2.9	3.8	1.2	2.4	4.0	1.3	2.8	4.2
24	*−0.6*	—	2.0	2.9	3.8	1.2	2.4	4.0	1.3	2.8	4.2
25	−0.4	—	2.0	2.9	3.8	1.2	2.4	4.0	1.3	2.8	4.2
26	−0.8	—	2.0	2.9	3.8	1.2	2.4	4.0	1.3	2.4	4.4
27	0.1	—	2.0	2.9	3.8	1.2	2.4	4.0	1.3	2.4	4.4
28	1.5	—	2.0	2.9	3.8	1.2	2.4	4.0	1.3	2.4	4.2
29	−0.2	—	2.0	2.9	3.8	1.2	2.4	4.0	1.3	2.4	4.2
30	−0.3	* 22.6	2.0	2.9	3.8	1.2	2.2	4.0	1.3	2.6	4.2
31	−2.2	—	2.0	2.7	3.8	1.2	2.2	4.0	1.3	2.6	4.0
		45.0									
Mittel	**−3.19**	* **35.5**	**2.22**	**3.11**	**4.20**	**1.47**	**2.74**	**4.12**	**1.66**	**2.92**	**4.68**
Jahresmittel	**4.08**	**449.1**	**5.78**	**5.48**	**5.06**	**3.75**	**3.77**	**4.09**	**4.25**	**4.04**	**4.83**

II. Bearbeitung des Materials.

Kritik der Beobachtungsmethoden.

Ehe wir zur Zusammenstellung der angeführten Beobachtungsresultate übergehen, ist zu entwickeln mit welchem Grade von Genauigkeit die gegebenen Zahlen die tägliche Mitteltemperatur in den betreffenden Tiefen angeben. Hierbei ist zu beachten sowohl der Einfluss der täglichen Temperaturvariation als auch die Möglichkeit, dass die Temperatur in den Thermometerröhren infolge der ungleichen Wärmeleitung der Röhre und des Bodens selbst ein wenig von der Temperatur des umgebenden Bodenlagers abweicht.

Umfassende vergleichende Beobachtungen mit verschiedenen Bodenthermometern sind in diesen beiden Beziehungen von Leyst [1]) in Pawlowsk gemacht worden. In denselben Sandhügel, wo die regelmässigen Bodentemperaturbeobachtungen in den Tiefen 3.2, 1.6, 0.8, 0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02 und 0.01 Meter sowie an der Oberfläche geschehen, wurde im September 1887 eine Menge anderer gebräuchlicher Thermometer eingegraben und vom October 1887 bis zum Juni 1889 gleichzeitig abgelesen.

In 0.8 und 0.4 Meter Tiefe wurden neben anderen Thermometern auch solche von Hambergs Construction, wie die in Mustiala und Heinäis in den Tiefen von 1.0, 0.5, 0.30 und 0.15 Meter angewandten, beobachtet und in 0.8 Meter Tiefe auch ein in einem Messingrohr liegendes Thermometer. In Mustiala und Heinäis wurde, wie gesagt, das Thermometer in 2 Meter Tiefe in einem eisernen Rohre eingeschlossen. Die Thermometer in 0.8 m Tiefe in Pawlowsk wurden sieben, die in 0.4 m Tiefe zwölf Mal täglich abgelesen.

Ich habe aus Leysts Zusammenstellungen die Correctionen berechnet, welche zu den monatlichen Mitteln der Angaben der von Leyst angewandten Hambergschen und des im Messingrohre befindlichen Thermometers hinzuzufügen

[1]) Leyst, Über die Bodentemperatur in Pawlowsk, Repert. für Meteorologie, Bd. XIII, N:o 7, 1890.

sind, um diese Mittel den Angaben derjenigen Thermometer gleich zu machen, welche nach Leyst, aus vielen Ursachen zu schliessen, am genauesten die wirkliche Bodentemperatur angeben.

Die Temperaturen werden durchweg in Centesimal-Graden angegeben.

Correctionen der Monatsmittel.

	Hambergsche Thermometer.								Thermometer im Messingrohre.			
	Tiefe 0.4 m.				Tiefe 0.8 m.				Tiefe 0.8 m.			
	1887	1888	1889	Mittel	1887	1888	1889	Mittel	1887	1888	1889	Mittel
Januar	—	0.06	0.16	0.11	—	1.36	0.74	1.05	—	2.70	1.93	2.32
Februar	—	0.09	−0.01	0.04	—	0.54	0.20	0 37	—	2.61	1.48	2.04
März	—	0.17	−0.06	0.06	—	0.13	0.14	0.14	—	1.69	0.88	1.28
April	—	0.01	−0.64	−0.32	—	0.03	0.00	0.02	—	0,00	−0.03	−0.02
Mai	—	−0.37	−0.76	−0.57	—	−0.77	−0.83	−0.80	—	−1.55	−1.73	−1.64
Juni	—	−0.45	−0.32	−0.39	—	−0.70	−0.35	−0.53	—	−1.62	−1.08	−1.35
Juli	—	−0.20	—	−0.20	—	−0.03	—	−0.03	—	−0.65	—	−0.65
August	—	−0.01	—	−0.01	—	0.03	—	0.03	—	−0.38	—	−0 38
September	—	0.24	—	0 24	—	−0.07	—	−0.07	—	−0.05	—	−0.05
October.	—	0.38	—	0.38	—	−0.32	—	−0.32	—	0.25	—	0.25
November	0.38	0.52	—	0.45	−0.39	−0.51	—	−0.45	0.25	0.26	—	0.26
December	0.34	0.78	—	0.56	−0.32	0.06	—	−0.13	0.67	1.31	—	0.99
Jahr	—	—	—	0.03	—	—	—	−0.06	—	—	—	0.25

Wir ersehen aus dieser Tabelle, dass verschiedene Bodenthermometer, besonders in den Wintermonaten, recht bedeutende Differenzen im Ausschlage zeigen können. Das Thermometer im Messingrohre gab also im Januar und Februar eine um mehr als zwei Grade niedrigere Temperatur an, als dasjenige mit welchem der Vergleich gemacht wurde, welches letztere in einem Thonrohr eingeschlossen war. Im Mai und im Juni wiederum zeigt es eine über ein Grad höhere Temperatur als das letzgenannte.

Diese Abweichungen sind bedenklich gross. Sie beruhen wahrscheinlich auf der viel besseren Wärmeleitung des Messingrohres im Vergleich mit der des Thonrohres. Im Sommer wird also durch das Messingrohr Wärme von der Bodenoberfläche zu dem unteren Ende des Rohres in solcher Menge geleitet, dass sie einen merkbaren Einfluss auf die Angaben des Thermometers ausübt. Im Winter wird im Gegenteil noch mehr Wärme zur Oberfläche abgeleitet.

Es ist jedoch natürlich, dass je kleiner die Temperaturdifferenz zwischen zwei Bodenschichten ist, desto kleiner ist die durch die Wärmeleitung eines durch die Schichten gehenden Metallrohres verursachte Temperaturerhöhung am kälteren Ende desselben. Da nun die Temperaturdifferenz zwischen den Tiefen von 1.0 und 2.0 Meter in Mustiala und in Heinäis im allgemeinen kleiner, teilweise (December bis Mai) bedeutend kleiner ist als zwischen den Tiefen 0.40 und 0.80 Meter in Pawlowsk, obgleich die Distance zwischen den erwähnten Schichten in Mustiala und in Heinäis 2.5 Mal so gross wie zwischen den erwähnten Schichten in Pawlowsk ist, so ist man also berechtigt anzunehmen, dass die Abweichungen der Thermometerausschläge in 2 m Tiefe in Mustiala von der wirklichen Bodentemperatur in dieser Tiefe auch nur ein kleiner Bruchteil der obenerwähnten Abweichungen in Pawlowsk sind. Weiter, wenn auch der Durchmesser möglicherweise etwas grösser und die Wände der eisernen Rohre etwas dicker wären, als bei dem Messingrohr in Pawlowsk, so ist noch zu beachten, dass die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens nicht einmal die Hälfte der des Messings ist.

Nach Zusammenstellung der Beobachtungsresultate werden wir noch in der Kleinheit der Amplitude der jährlichen Wärmevariation in 2 m Tiefe einen indirecten Beweis dafür finden, dass die von der Wärmeleitung der Röhrenwände verursachten Abweichungen der Thermometerausschläge von der wirklichen Bodentemperatur höchstens einige wenige Zehntel Grade sein können.

Da die Differenzen zwischen der Temperatur der Bodenoberfläche einerseits und den Temperaturen in 0,5 und 1 Meter Tiefe andererseits in Mustiala und Heinäis viel kleiner sind als die entsprechenden Differenzen für die Oberfläche und die Tiefen von 0.40 und 0.80 Meter auf dem trocknen, nackten, im Winter von Schnee befreiten Sandhügel in Pawlowsk, muss man annehmen, dass auch die Hambergschen Thermometer in Mustiala und in Heinäis in obenerwähnten Tiefen bedeutend kleinere Abweichungen von der Temperatur des umgebenden Bodenlagers zeigen als die erwähnten gleichartigen Thermometer in Pawlowsk.

Da nun in Pawlowsk die Abweichungen der Hambergschen Thermometer von denen in Thon- und Glasröhren ziemlich klein sind (ausser für Januar) und man berechtigt ist anzunehmen dass diese letzteren, wenn sie nicht zu oft ausgezogen und abgelesen werden [1]) recht genau die wirkliche Bodentemperatur angeben, so muss man auch annehmen dass in Mustiala und Heinäis die Ham-

[1]) Vergleich: Leyst, l. c. und Homén, Bodenphysikalische und Meteorologische Beobachtungen. S. 16—18. Berlin 1894.

bergschen Thermometer recht genau die wirkliche Bodentemperatur in den betreffenden Tiefen angeben. Hamberg selbst, welcher mit solchen Thermometern umfassende Temperaturmessungen in den Tiefen von 0.5, 1.0 und 2.0 Meter in Wäldern und an offenen Plätzen und Feldern in Schweden angeordnet hat, sagt von ihnen [1]: „Es hat sich gezeigt, dass diese Instrumente vollkommen der Nässe im Boden und der Eisbildung wiederstehen. Mehrere vom Verfasser und Anderen angestellte Controllbestimmungen haben an die Hand gegeben, dass dieselben aller gewünschten Genauigkeit entsprechen.“

In Betreff der Thermometer in 0.15 und 0.30 m Tiefe ist es dagegen schwerer über die Genauigkeit der Angaben etwas zu sagen. Wenn auch die durch die Wärmeleitung der Röhre verursachten Abweichungen nicht gross wären, so ist jedenfalls die tägliche Variation der Temperatur in diesen kleinen Tiefen so gross, dass die Bestimmung der täglichen Mitteltemperatur auf Grund der Beobachtungen um 9 Uhr Morgens unsicher wird.

Reduktion der Terminmittel auf wahre Mittel.

Die tägliche Temperaturvariation im Boden ist schon in 1 m Tiefe so klein, höchstens einige Hundertstel Grade, dass sie hier, und noch mehr in grösseren Tiefen, ohne weiteres ausser Acht gelassen werden kann. Um dagegen eine Vorstellung von dieser Grösse in den kleineren Tiefen zu erhalten, wie auch von der Correction, welche zu den Beobachtungen um 9 Uhr Morgens hinzuzufügen ist um die tägliche Mitteltemperatur zu erhalten, habe ich folgende Zusammenstellungen auf Grund der in Pawlowsk im Jahre 1888 gewonnenen Resultate [2]) gemacht.

Für Hambergs Thermometer in 0.80 und 0.40 Meter Tiefe, für die in horizontalen Glasröhren eingeschlossenen in 0.20 und 0.10 Meter Tiefe, wie auch, der Übersicht im Folgenden wegen, für das Thermometer an der Erdoberfläche und für das Luftthermometer habe ich für jeden Monat die mittlere Tagesamplitude, d. h. die mittlere Differens zwischen Tagesmaximum und Tagesminimum angeführt, weiter die Amplitude der mittleren Tagescurve d. h. die Amplitude der regelmässigen täglichen Variation. Hierzu habe ich noch berechnet, welche Correctionen zu den Monatzmitteln der Beobachtungen um 9

[1]) Hamberg: „Om skogarnes inflytande på Sveriges klimat, Bihang till Domänstyrelsens berättelse 1884. I. S. 11. Stockholm 1885.

[2]) Leyst, l. c.

Uhr Vormittags der obenerwähnten Thermometer hinzuzufügen sind, um die nach denselben Thermometern bestimmten wirklichen Monatsmittel zu erhalten. Das Thermometer in 0.8 Meter Tiefe wurde täglich jede vierte Stunde, die in 0.40, 0.20 und 0.10 Meter Tiefe jede zweite, die Erdoberflächen- und Luftthermometer jede Stunde beobachtet, und das Monatsmittel ist mit Berücksichtigung aller diesen Beobachtungen berechnet.

Das Thermometer an der Bodenoberfläche war so im Sande gebettet, dass die untere Hälfte der Kugel wie auch des ganzen liegenden Thermometers im Sande lag, während die obere Hälfte des Thermometers völlig frei war. Das Luftthermometer war in einer Wild'schen Normalhütte in einem Zinkblechgehäuse mit Ventilator aufgestellt und wurde jedesmal nach zweiminutlicher Ventilation abgelesen.

Mittlere Tages-Amplitude.

1888	Tiefe				An der Oberfläche.	Luft.
	0.80 m	0.40 m	0.20 m	0.10 m		
Januar	0.34°	1.51°	2.85°	3.81°	6.78°	8.46°
Februar	0.24	1.19	2.41	3.68	7.61	9.16
März	0.25	1.13	2.94	4.90	11.93	11.72
April	0.04	0.93	2.87	5.19	18.55	7.69
Mai	0.19	1.60	3.73	7.07	23.15	10.85
Juni	0.26	1.64	3.93	7.59	26.41	10.62
Juli	0.17	1.61	4.06	7.50	22.17	10.54
August	0.15	1.30	3.54	7.04	19.34	9.95
September	0.22	1.16	2.64	5.75	15.93	9.73
October	0.15	0.62	1.10	2.31	8.89	6.79
November	0.05	0.13	0.32	0.86	3.98	4.33
December	0.22	1.54	2.45	2.90	4.98	6.53
Jahr	0.19	1.20	2.74	4.89	14.14	8.86

Amplitude der mittleren Tagescurve.

1888	Tiefe				An der Oberfläche.	Luft.
	0.80 m	0.40 m	0.20 m	0.10 m		
Januar	0°.06	0°.11	0°.42	0°.72	2°.07	2°.91
Februar	0.02	0.30	1.25	2.08	4.64	4.40
März	0.04	0.55	2.26	4.09	10.16	8.90
April	0.01	0.56	2.40	4.75	16.32	6.02
Mai	0.03	1.13	3.34	6.68	19.87	8.39
Juni	0.04	1.25	3.69	7.30	22.68	8.78
Juli	0.04	1.17	3.75	7.16	18.98	8.85
August	0.04	1.06	3.49	6.71	16.75	7.98
September	0.03	0.75	2.62	5.44	12.69	6.93
October	0.02	0.28	0.88	1.79	5.93	3.76
November	0.01	0.03	0.11	0.47	2.04	1.54
December	0.02	0.06	0.17	0.34	1.05	1.58
Jahr	0.03	0.59	1.97	3.84	10.83	5.55

Correction welche zum Terminmittel 9h a. m. hinzuzufügen ist um das wahre Mittel zu erhalten.

1888.	Tiefe				An der Oberfläche.	Luft [1]).
	0.80 m	0.40 m	0.20 m	0.10 m		
Januar	−0°.01	0°.01	0°.12	0°.32	0°.47	0°.55
Februar	0.01	0.17	0.54	0.98	0.53	0.51
März	0.00	0.25	1.22	1.96	1.19	0.91
April	0.00	0.25	1.10	1.68	−2.18	−0.59
Mai	−0.01	0.49	1.62	1.38	−4.15	−1.53
Juni	0.01	0.50	1.72	1.53	−5.16	−1.19
Juli	−0.01	0.54	1.78	1.20	−5.24	−2.09
August	−0.02	0.44	1.63	1.36	−2.90	−1.29
September	−0.02	0.26	1.24	1.47	−2.08	−0.94
October.	−0.01	0.09	0.35	0.47	−0.51	−0.22
November	0.00	0.00	0.04	0.15	0.15	0.33
December.	−0.02	−0.03	−0.01	0.03	0.10	0.57
Jahr	0.00	0.25	0.95	1.01	−1.65	−0.41

[1]) Die monatlichen Terminmittel der Lufttemperatur sind von Leyst von dem Einfluss der Jahresvariation befreit worden, warum ich dieselbe kleine Correction in entgegengesetzter Richtung angebracht habe um die wirklichen Mittel zu erhalten.

Wir ersehen aus diesen Tabellen, dass in der Tiefe von 0.80 Meter sowohl die Amplitude der mittleren Tagescurve als auch die Correction, welche zum Terminmittel 9^h a. m. hinzuzuaddiren ist um das wahre Mittel zu erhalten, sehr klein sind. In den kleineren Tiefen dagegen, besonders in den Sommermonaten, haben diese Grössen beachtenswerthe und für 0.20 und 0.10 m Tiefe sogar ziemlich grosse Werthe.

Um nun aus diesen Daten schliessen zu können, wie grosse Correctionen ungefähr zu den Terminmitteln 9^h a. m. für die Tiefen 0.50, 0.30 und 0.15 Meter in Mustiala und Heinäis zur Erzielung der wahren Monatsmittel hinzuzuaddiren sind, müssen wir aber ausser den Amplituden auch die Fasen um 9 Uhr Morgens der Temperaturvariationen in diesen Tiefen kennen. Zu diesem Zweck wollen wir demnach zuerst die Eintrittszeiten der Minima, Maxima und beiden Media in den Tiefen 0.40, 0.20 und 0.10 Meter in Pawlowsk anführen. Sie gelten für dieselben Thermometer wie die obenangeführten Amplituden. Die Zeit wird nach Leyst in ganzen und Zehntel Stunden (nicht in Minuten) angegeben.

Eintrittszeiten.

1888	Tiefe 0.40 Meter.				Tiefe 0.20 Meter.				Tiefe 0.10 Meter.			
	Minimum.	Erstes Medium.	Maximum.	Zweites Medium.	Minimum.	Erstes Medium.	Maximum.	Zweites Medium.	Minimum.	Erstes Medium.	Maximum.	Zweites Medium.
	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h	h
Januar	11.1 a.	5.5 p.	9.0 p.	7.0 a.	10.9 a.	2.0 p.	5.7 p.	0.6 a.	9.1 a.	0.2 p.	3.9 p.	10.5 p.
Februar	9.9	3.2	8.2	3.2	9.0	1.2	5.7	11.7 p.	8.0	11.5 a.	3.9	9.4
März	11.2	4.5	10.8	5.5	9.5	1.9	6.2	2.1 a.	8.1	11.8	4.2	11.2
April	11.4	4.5	10.0	4.8	8.9	1.6	6.3	0.7	6.8	11.4	3.9	9.8
Mai	11.3	4.9	10.8	5.2	7.8	1.0	6.5	0.9	5.4	10.4	3.9	10.1
Juni	11.6	5.1	11.5	5.4	7.8	1.2	7.1	1.1	5.2	10.5	4.2	10.3
Juli	11.0	4.8	11.0	5.0	7.8	0.8	6.9	0.9	5.2	10.4	4.0	10.1
August	11.2	4.9	10.5	5.2	7.9	0.8	6.4	0.8	5.8	10.3	3.8	9.8
September	11.9	5.1	10 5	5.1	8.2	1.0	5.9	0.8	6.2	10.4	3.7	9.4
October	11.8	5.0	10.2	4.3	8.5	1.2	5.8	0.6	6.0	11.0	3.6	9.0
November	— [1])	—	11.0	—	10.5	1.8	6.3	1.0	7.0	11.5	3.6	9.6
December	8.0	3.0	6.0	3.0	10.5	1.2	4.0	10.7 p.	6.0	11.8	3.4	11.0
Jahr	11.2	4.8	10.3	5.1	8.1	1.2	6.2	0.8 a.	5.8	10.8	3.9	10.0

[1]) Im November ist die Amplitude der Tagescurve so klein, dass die Eintrittszeiten des Minimums und der Media sich nicht bestimmen lassen.

Lassen wir die Monate November bis Februar, in welchen die Amplituden sehr klein sind, ausser Acht, so sehen wir, dass die Verspätung der Eintrittszeiten der obenerwähnten Epochen für eine Tiefenzunahme von 0.1 Meter gute zwei Stunden ist. Für die Tiefenzunahme von 0.20 zu 0.40 Meter scheint zwar die Verspätung bisweilen kleiner zu sein, aber dies hängt von der Ungleichheit der Thermometer in diesen Tiefen ab, namentlich von der Verfrühung der Eintrittszeiten beim Hambergschen Thermometer in 0.40 Meter Tiefe. Das zweite Medium, welches in 0.40 Meter Tiefe in den Monaten März bis September, um 5 Uhr Morgens oder ein wenig später auftritt, würde also im Sandhügel in Pawlowsk in 0.50 Meter Tiefe wahrscheinlich etwa um 7 Uhr Morgens vorkommen, und das folgende Minimum zwischen 1 und 2 Uhr Nachmittags. In 0.30 Meter Tiefe hätten wir wahrscheinlich das Minimum zwischen 9 und 10 Uhr Vormittags und in 0.15 Meter Tiefe das Minimum zwischen 6 und 7 Uhr Morgens und das folgende Medium zwischen 11 und 12 Uhr Mittags.

Wir kommen jetzt zur Frage, wie bei den Beobachtungen in Mustiala und Heinäis die genannten Verhältnisse ausfallen.

Aus meinen Bodentemperaturbeobachtungen an sonnigen Tagen auf verschiedenen Lokalen im Kirchspiel Karislojo im südlichen Finnland während des Sommers 1892 [1]) und besonders während des Sommers 1893, welch letztere Beobachtungen noch nicht publicirt sind, geht hervor, dass, nicht nur im Walde sondern auch auf offenem mit Gras bewachsenem Sandfelde, die Amplitude der Tagescurve kleiner ist und schneller nach unten abnimmt als im Sandhügel in Pawlowsk und dass ebenso die Verspätung der Eintrittszeiten mit zunehmender Tiefe etwas grösser ist als in Pawlowsk, welches alles auf eine kleinere Wärmeleitung des Bodens hier als in Pawlowsk deutet. Es würde zu weit führen hier mehr ins Detail zu gehen. Nach Zusammenstellung und Erwägung aller erwähnten Thatsachen, komme ich zu dem Resultat, dass die Amplitude der mittleren Tagescurve auf dem offenen mit Gras bewachsenen Felde in Mustiala und dem offenen Platze im Walde in Heinäis in der Tiefe 0.50 Meter im Sommer wahrscheinlich nicht mehr als $0^{0}.2$ und ganz gewiss nicht mehr als $0^{0}.3$ ist, in der Tiefe 0.30 Meter wahrscheinlich etwa $1^{0}.5$ und in der Tiefe 0.15 Meter etwa $4^{0}.0$ ist. Im Winter ist die tägliche Amplitude im Boden unter der Schneedecke ausserordentlich klein.

Auf Grund des früher Gesagten können wir weiter annehmen, dass in der Tiefe 0.50 Meter das zweite Medium im Sommer um ca 9 Uhr Morgens auftritt.

---

[1]) Homén, Bodenphysikalische und meteorologische Beobachtungen, Kap. I. Berlin 1894.

In der Tiefe 0.30 Meter haben wir das Minimum um ca 11 Uhr Vormittags und in der Tiefe 0.15 Meter das Minimum um ca 8 Uhr Morgens.

In der Tiefe 0.50 Meter dürfte also das Terminmittel 9^h a. m., wenn nur die Messungen exakt sind, gleich dem wirklichen Monatsmittel, oder, wenn auch das Medium etwas vor oder nach 9 Uhr Morgens auftritt, da die ganze Amplitude nicht mehr als $0^0.3$ ist, die Abweichung von dem wirklichen Monatsmittel jedenfalls so klein sein, dass sie ohne weiteres ausser Acht gelassen werden kann. Für die Tiefen 0.30 und 0.15 Meter müssen wir dagegen zu den Terminmitteln 9^h a. m. Correctionen, welche im Sommer bis etwa $0^0.5$ und $1^0.8$ steigen, hinzufügen um die wirklichen Monatsmittel zu erhalten.

Um nun schliesslich die Correctionen zu finden, welche zu den Terminmitteln 9^h a. m. der angewandten Hambergschen Thermometer hinzuzufügen sind um die wirklichen Monatsmittel zu finden, muss man die früher erwähnte mögliche Abweichung der Temperatur im Thermometerrohre von der im umgebenden Bodenlager in Betracht nehmen. Die auf Seite 91 angegebenen Correctionen für die Hambergschen Thermometer betreffen das wirkliche Mittel dieser Thermometer (aus 12 Beobachtungen täglich berechnet), nicht das Terminmittel 9^h a. m. Jenes Mittel für die Tiefe 0.40 Meter ist, den Versuchen in Pawlowsk gemäss, in den Monaten April—Juli, wo die Bodentemperatur steigt und die oberen Schichten wärmer als die unteren sind, etwa um $0^0.2$ bis $0^0.5$ zu hoch, in den Monaten September—Januar um $0^0.1$ bis $0.^05$ zu niedrig, in den übrigen Monaten ziemlich gleich dem Mittel des Thermometers im horizontalen Glasrohre.

Wenn man nun das Terminmittel 9^h a. m. ins Auge fasst, so ist zu beachten, dass vor und um 9 Uhr Morgens die oberen Bodenlager nicht nur im Herbst und im Winter sondern auch in den Sommermonaten im allgemeinen kälter sind als die Lager in 0.40 oder 0.50 Meter Tiefe. Nur beim Aufthauen oder bei rascher Temperatursteigerung, wie besonders im Mai, bisweilen im April und Juni, der Fall, ist die Temperatur in den obern Lagern den ganzen Tag hindurch höher als in den Tiefen 0.40 und 0.50 Meter, obgleich die Temperaturdifferenz gerade am Morgen am kleinsten ist. Mit Berücksichtigung des Einflusses sowohl der Wärmeleitung des Thermometerrohres als auch der täglichen Temperaturvariation finde ich, dass man zu den Terminmitteln 9^h a. m. der Hambergschen Thermometer in der Tiefe 0.50 Meter auf offenem mit Gras bewachsenem Felde etwa folgende Correctionen hinzuzufügen hätte, wenn man das wirkliche Monatsmittel der Temperatur in der betreffenden Tiefe erhalten wollte:

Januar—März	$+0^\circ.1$
April	± 0.0
Mai	-0.1
Juni	± 0.0
Juli, August	$+0.1$
September, October	$+0.3$
November, December . . .	$+0.2$

Bezüglich des Waldes gehen die Correctionen in derselben Richtung, sind aber noch kleiner.

Da es aber jedenfalls unmöglich ist die wirklichen Correctionen ganz sicher zu bestimmen und diese übrigens von Jahr zu Jahr mit den Temperatur- und Witterungsverhältnissen wechseln, will ich nicht die oben vorgeschlagenen kleinen Correctionen anwenden, sondern führe im Folgenden die Beobachtungsresultate ganz unverändert an, und begnüge mich mit dem Hauptresultate der obigen Discussion, dass die Correctionen immerhin sehr klein sind.

Für die Beobachtungen in den Tiefen 0.30 und 0.15 Meter sind die schliesslichen Correctionen viel grösser und zum grössten Teil von der täglichen Temperaturvariation verursacht. In diesen und noch mehr in den über diesen Lagern liegenden oberflächlichen Schichten ist die tägliche Amplitude in den Frühlings- und Sommermonaten so gross, dass in der Regel die Temperatur am Morgen in diesen oberen Lagern für alle Monate des Jahres ein wenig niedriger ist als in den erwähnten Tiefen selbst. Die Correctionen, welche auf Grund der besseren Wärmeleitung der Thermometerrohre als des Bodens zum Terminmittel 9^h a. m. hinzuzuaddiren sind, sind also für alle Monate positiv (für Mai vielleicht Null), und die Grösse derselben wahrscheinlich zwischen etwa $0^\circ.0$ und $0^\circ.3$ variirend. Ich finde also dass die schliesslichen Correctionen für die Terminmittel 9^h a. m. der Hambergschen Thermometer in den erwähnten Tiefen auf offenem mit Gras bewachsenem Felde etwa folgende Werthe haben.

	Tiefe 0.30 Meter.	Tiefe 0.15 Meter.
Januar	+ 0°.1	+ 0°.3
Februar	0.1	0.3
März	0.1	0.4
April	0.1	0.7
Mai	0.2	1.3
Juni	0.4	1.7
Juli	0.6	2.0
August	0.6	2.0
September	0.5	1.8
October	0.4	1.4
November	0.3	1.0
December	0.2	0.6
Jahr	0.30	1.13

Wir werden im Folgenden diese Correctionen anwenden.

Temperaturverhältnisse der verschiedenen Beobachtungsplätze. Monatsmittel.

Wir machen jetzt einige Zusammenstellungen der Beobachtungsresultate, sowohl derjenigen für die Jahre 1885—91, welche oben in extenso angeführt sind, als auch derjenigen für die Jahre 1892—94, welche ich in derselben Weise wie die früheren durchgearbeitet habe. Die kürzeren Beobachtungsreihen von dem 50-jährigen Kiefernwalde in Mustiala (Januar—September 1885) und von dem Rasenplatz in Heinäis (October 1885—October 1886) lassen wir doch ausser Acht sowie auch die Beobachtungen in den Tiefen 0.15 und 0.30 Meter im Fichtenhochwalde in Heinäis von Juli 1885 bis September 1886.

In Betreff der letzteren will ich noch bemerken, dass es scheint, als ob einige Beobachtungen in den Wintermonaten für die beiden Tiefen verwechselt worden seien. Die Zahlen schwanken nämlich in merkwürdiger Weise und das Monatsmittel wird von Januar bis April sogar ein wenig höher in 0.15 als in 0.30 Meter Tiefe. Wenn die Beobachtungen nicht bisweilen verwechselt worden oder sonst unzuverlässig sind, so kann dies unnatürliche Verhältniss nur dadurch erklärt werden, dass, da die beiden Thermometer natürlich nicht

über einander an demselben Platz, sondern getrennt von einander aufgestellt waren. der Boden oder die Schneedecke an diesen beiden Plätzen von sehr verschiedener Beschaffenheit oder Dicke war. Jedenfalls sind die Beobachtungen unbrauchbar.

Auch am offenen Felde zu Mustiala scheinen die Beobachtungen in den Tiefen von 0.15 und 0.30 Meter weniger zuverlässig als die übrigen zu sein. So z. B. sind im Jahre 1887 die Angaben des Thermometers in 0.30 m Tiefe wahrscheinlich zu hoch.

Wir geben nun eine Zusammenstellung aller Monatsmittel der Lufttemperatur in Mustiala und der Bodentemperatur in den verschiedenen Tiefen an dem mit Timotheegras bewachsenen offenen Felde in Mustiala, am offenen Platze im Walde, im Fichtenhochwalde und im Birkenwalde zu Heinäis.

Von den Beobachtungen für die drei letzten Jahre 1892—94, welche oben nicht angeführt sind, fehlen alle Beobachtungen für März 1893. Diese Lücken sind wie früher grafisch ausgefüllt. Ebenso fehlen in der Tiefe 1 Meter im Fichtenhochwalde alle Beobachtungen von August 1892 bis Ende 1894. Diese sehr lange Lücke ist folgender Weise ausgefüllt. Für die vollen Jahre 1885—91 sind für die Tiefen 0.5, 1.0 und 2.0 Meter des Fichtenwaldes die siebenjährigen Monatsmittel berechnet. Für alle Monate ausser dem October fällt die mittlere Temperatur dieser Periode für 1 m Tiefe zwischen den Temperaturen in 0.5 und 2 m Tiefe. Durch gewöhnliche lineare Interpolation habe ich nun für diese 11 Monate mit Leitung der Monatsmittel der Zeit Aug. 1892—Dec. 1894 für 0.5 und 2.0 m Tiefe die fehlenden Monatsmittel dieser Periode für die Tiefe 1 Meter berechnet. Im October Monat wiederum, wenn die oberen Schichten schon bedeutend abgekühlt sind, ist das siebenjährige Mittel in 1 m Tiefe ein wenig höher als die Temperatur in sowohl 0.5 als 2.0 m Tiefe. In 0.5 m Tiefe ist die Temperatur am niedrigsten. Eine Extrapolation ist in Verhälnissen wie diese gar nicht zulässig. Denn, wenn z. B. in den Jahren 1893 und 1894 die October-Temperatur in 2 m Tiefe dieselbe wäre, die Temperatur in 0.5 m Tiefe dagegen niedriger 1894 als 1893, so würde die Extrapolation zu einem höheren Werth für die Tiefe 1 Meter für 1894 als für 1893 führen, obgleich man wohl annehmen muss, dass die Temperatur auch in der Tiefe 1 Meter niedriger 1894 als 1893 wäre. Noch mehr, wenn in einem einzelnen Jahr, wie 1893 der Fall wirklich ist, die Temperatur in der Tiefe 0.5 Meter noch im October höher ist als in der Tiefe 2.0 Meter, so giebt die Extrapolation für 1 Meter Tiefe eine niedrigere Temperatur als in den beiden übrigen Tiefen, welches für diese Jahreszeit absurd ist. Wir haben

darum wieder, mit Benutzung der Interpolationsresultate für die elf übrigen Monate, die Resultate grafisch dargestellt und, wie früher, die Monatsmittel für October in den Jahren 1892—94 bestimmt.

Lufttemperatur in Mustiala.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	−5.51°	−4.92°	−4.01°	1.52°	7.61°	12.87°	18.21°	13.96°	7.43°	2.62°	−2.06°	−4.24°	3.68°
1886	−7.73	−8.40	−5.63	3.42	9.13	15.80	16.81	15.12	8.85	3.80	2.60	−2.51	4.34
1887	−3.14	−1.94	−2.71	2.74	9.48	13.43	16.61	13.57	10.80	2.10	−1.51	−6.78	4.42
1888	−8.59	−11.93	−10.35	0.48	6.64	12.92	15.18	13.41	9.25	2.32	−2.00	−4.18	2.13
1889	−5.04	−10.63	−7.99	1.74	12.40	14.79	15.66	13.83	8.27	6.60	1.59	−3.68	4.05
1890	−3.72	−4.80	−1.00	4.04	13.34	13.76	14.87	14.40	10.66	1.91	−1.63	−4.77	4.87
1891	−8.35	−2.65	−4.97	2.05	9.27	12.86	17.74	13.28	9.24	5.90	−2.72	−3.19	4.08
1892	−10.80	−9.72	−4.66	0.10	6.62	11.80	14.32	13.54	10.21	3.88	0.61	−8.28	2.33
1893	−14.09	−15.18	−4.44	0.86	8.12	14.05	16.16	13.79	8.21	6.30	−2.15	−2.92	2.51
1894	−2.44	−3.51	−1.42	5.71	10.26	14.45	16.51	14.76	6.72	2.80	0.66	−2.83	5.16
Mittel	−6.94	−7.37	−4.72	2.27	9.29	13.67	16.21	13.97	8.96	3.82	−0.66	−4.34	3.76

Regenmenge in Mustiala in mm.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	—	—	—	20.3	58.0	56.3	43.1	32.9	76.8	96.7	27.4	42.2	—
1886	37.1	16.7	14.5	1.4	29.3	52.5	115.8	70.6	52.6	33.1	53.8	44.2	521.6
1887	34.9	12.8	14.4	16.2	34.6	58.8	34.0	61.6	73.8	56.5	23.9	51.8	473.3
1888	14.8	13.9	26.4	51.1	33.7	28.5	86.0	60.5	31.2	74.4	42.1	12.5	475.1
1889	20.3	28.2	25.1	4.6	40.2	56.5	84.7	88.4	64.5	21.1	32.9	36.6	503.1
1890	25.6	4.7	44.8	27.8	64.7	48.7	84.1	142.0	47.0	97.7	56.0	11.9	655.0
1891	30.4	18.0	26.9	10.4	44.1	36.2	37.2	36.1	79.1	51.0	33.5	45.0	447.9
1892	29.4	25.2	6.4	33.3	54.2	130.9	128.4	79.6	66.5	47.9	18.8	18.8	639.4
1893	24.0	33.9	27.8	6.0	42.2	46.0	32.9	56.9	169.4	77.0	33.0	18.9	568.0
1894	44.0	33.2	19.6	10.6	34.7	126.0	76.0	31.4	46.3	46.3	80.0	28.2	576.3
Mittel	28.94	20.73	22.86	18.17	43.57	64.04	72.22	66.00	70.72	60.17	40.14	31.01	539.97

Bodentemperaturen.

Mustiala. Grasbewachsenes Sandfeld.

Tiefe 0.15 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	—	—	—	—	—	12.95	18.13	15.31	9.22	4.79	1.16	−0.68	—
1886	−1.28	−1.98	−1.66	1.13	7.55	15.58	18.31	17.88	11.02	5.10	3.28	0.15	6.27
1887	−0.80	−1.62	−1.70	0.86	7.29	13.29	15.76	15.39	12.03	3.37	1.77	−0.63	5.46
Mittel	−1.04	−1.80	−1.68	1.00	7.42	13.94	17.40	16.19	10.76	4.42	2.07	−0.39	—

Tiefe 0.30 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	—	—	—	—	—	11.40	16.47	14.59	9.07	4.74	1.31	0.04	—
1886	−0.48	−0.74	−0.84	0.44	5.47	13.61	16.42	16.71	11.36	6.58	4.88	2.31	6.35
1887	1.29	0.44	0.26	1.20	6.33	13.30	15.91	16.20	13.54	5.59	4.00	2.04	6.76
Mittel	0.41	−0.15	−0.29	0.82	5.90	12.77	16.27	15.83	11.32	5.64	3.40	1.46	6.55

Tiefe 0.50 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	0.85	0.76	0.62	0.60	3.74	10.71	15.39	14.39	10.02	6.03	2.46	1.25	5.60
1886	0.71	0.41	0.05	0.62	3.94	12.61	15.53	16.30	11.61	6.59	4.65	2.24	6.31
1887	1.17	0.84	0.35	0.59	4.15	11.49	14.35	14.58	12.19	5.45	3.32	1.39	5.85
1888	0.92	0.52	0.07	0.57	0.79	9.33	14.11	14.03	11.22	5.33	1.83	1.17	5.01
1889	0.55	−0.07	−0.24	0.41	3.02	13.59	14.56	14.28	10.86	8.56	3.97	2.03	6.00
1890	1.00	0.58	0.18	0.24	6.72	10.53	12.90	13.86	11.41	5.92	3.84	1.32	5.74
Mittel	0.87	0.51	0.17	0.51	3.73	11.34	14.47	14.57	11.22	6.31	3.35	1.57	5.75

Tiefe 1.0 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	1.72	1.41	1.20	1.03	2.70	8.03	12.27	12.81	10.16	7.02	3.59	2.24	5.38
1886	1.47	1.13	0 84	0.63	2.62	9.40	12.63	14.30	11.82	7.64	5.45	3 26	5.96
1887	2.00	1.50	1.08	0.80	2.34	8.67	11.40	12.78	11.62	6.85	4.35	2.40	5.51
1888	1.67	1.24	0.90	0.70	0.67	6.35	11.01	12.18	10.84	6.45	2.92	1.87	4.75
1889	1.21	0.58	0.26	0.20	0.85	9.81	12.31	12.75	10.63	8.78	4.81	2.96	5.46
1890	1.93	1.41	0.90	0.70	5.11	9.02	11.36	12.65	11.37	7.51	4.79	2.55	5.80
Mittel	1.67	1.21	0.86	0.68	2.38	8.55	11.83	12.91	11.07	7.38	4.32	2.55	5.48

Tiefe 2.0 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	3 63	2.89	2.54	2.14	2.32	5.31	8.42	10.12	9.83	7.99	5.72	4.20	5.44
1886	3.23	2.70	2.23	1.86	2.23	5.86	9.01	11.25	11.47	9.07	7.07	5.44	5.97
1887	4.08	3.30	2.75	2.27	2.33	5.58	8.08	9.97	10.31	8.64	6.31	7.60	5.70
1888	3.57	2.91	2.46	2.10	1.73	3.68	7.11	9.17	9.62	7.93	5.34	3.84	4.96
1889	2.98	2.39	1.89	1.49	1.27	4 87	8.52	10.05	10.04	9.08	6.95	5.12	5.41
1890	3.82	3.11	2.56	2.09	3.15	6.03	8.12	9.63	10.31	9.06	6.69	5.00	5.81
Mittel	3.55	2.88	2.41	1.99	2.18	5.22	8.21	10.03	10.26	8.63	6.35	4.70	5.55

Heinäis. Offener Platz im Walde.

Tiefe 0.5 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1887	1.80	1.43	1.06	0.82	3.81	9.67	12.35	12.45	11.11	5.82	3.54	1.96	5.50
1888	1.50	1.08	0.77	0.73	1.39	8.45	11.79	12.01	10.05	5.48	2.50	1.66	4.80
1889	1.14	0.86	0.76	0.77	3.19	12.08	13.06	13.17	10.39	8.16	4.25	2.48	5.89
1890	1.89	1.51	1.20	2.05	8.11	11.30	13.14	13.62	11.16	6.40	4.37	2.30	6.45
1891	1.50	1.16	0.99	1.00	4.92	10.09	13.62	12.75	10.30	7.35	3.06	2.22	5.78
1892	1.47	1.22	1.03	1.02	3.96	9.61	12.54	12.83	10.94	7.35	4.59	2.17	5.76
1893	1.39	1.01	0.90	0.96	3.20	10.15	13.12	13.20	9.61	7.58	3.04	1.93	5.54
1894	1.55	1.45	1.40	1.95	7.78	11.50	14.13	13.85	9.36	6.15	3.54	2.11	6.27
Mittel	1.53	1.22	1.01	1.16	4.55	10.36	12.97	12.99	10.37	6.79	3.61	2.10	5.75

Tiefe 1.0 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1887	2.57	2.03	1.55	1.25	2.61	7.08	9.72	10.72	10.13	7.06	4.55	2.87	5.20
1888	2.20	1.71	1.31	1.13	1.28	5.77	8.95	10.20	9.47	6.41	3.66	2.51	4.56
1889	1.86	1.40	1.19	1.10	2.10	8.34	10.62	11.30	10.01	8.37	5.27	3.49	5.45
1890	2.58	2.10	1.69	1.74	5.69	8.60	10.68	11.63	10.51	7.49	5.36	3.48	5.98
1891	2.45	1.90	1.62	1.48	3.31	7.67	10.63	11.08	9.80	7.85	4.52	3.11	5.48
1892	2.49	1.49	1.57	1.50	2.58	7.16	9.50	11.04	10.45	8.15	5.38	3.41	5.43
1893	2.30	1.73	1.50	1.34	2.29	7.47	10.15	11.26	9.31	7.73	4.61	2.90	5.24
1894	2.26	1.93	1.78	1.97	5.76	8.48	11.37	12.01	9.84	7.01	4.56	3.29	5.88
Mittel	2.34	1.79	1.53	1.44	3.20	7.57	10.20	11.16	9.94	7.51	4.74	3.13	5.40

Tiefe 2.0 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1887	4.11	3.25	2.73	2.32	2.39	4.61	6.71	8.18	8.27	7.61	5.72	4.28	4.94
1888	3.42	2.83	2.37	2.10	2.00	3.47	5.96	7.75	8.18	7.00	5.10	3.81	4.51
1889	3.00	2.45	2.07	1.86	2.00	4.83	7.48	8.75	8.81	7.96	6.38	4.78	5.04
1890	3.68	3.04	2.57	2.41	3.90	6.00	7.94	9.30	9.41	8.04	6.11	4.50	5.59
1891	3.42	2.65	2.01	1.84	2.66	5.08	7.46	8.77	8.79	7.80	5.86	4.20	5.06
1892	3.41	2.57	2.99	2.02	2.38	4.77	6.97	8.55	8.94	7.73	6.19	4.67	5.28
1893	3.47	2.85	2.35	2.04	2.08	4.61	7.24	8.84	8.52	7.57	5.77	3.94	4.96
1894	3.11	2.58	2.32	2.09	3.62	5.93	8.30	9.59	9.07	7.47	5.59	4.31	5.38
Mittel	3.45	2.78	2.43	2.09	2.63	4.91	7.26	8.72	8.75	7.65	5.84	4.31	5.10

Heinäis. Fichtenhochwald.

Tiefe 0.5 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	0.67	0.49	0.33	0.30	0.37	3.94	10.39	10.43	7.81	5.12	2.24	1.06	3.62
1886	0.39	−0.23	−0.70	0.24	0.37	4.25	9.88	11.15	8.81	5.83	4.58	2.67	3.96
1887	1.42	1.03	0.68	0.48	0.60	5.17	8.75	9.72	9.38	5.18	3.39	1.51	3.96
1888	0.88	0.31	−0.22	0.26	0.32	0.53	6.48	8.75	8.10	4.81	2.18	1.28	2.82
1889	0.71	0.32	0.15	0.34	0.40	5.12	9.53	9.97	8.11	7.13	3.86	2.15	4.01
1890	1.25	0.80	0.40	0.41	2.48	7.38	9.25	10.57	9.11	5.22	3.56	1.58	4.35
1891	0.66	0.35	0.26	0.30	0.31	4.19	9.66	9.58	8.26	6.66	2.95	1.47	3.75
1892	0.78	0.12	0.17	0.25	0.35	3.75	8.76	9.89	9.00	6.19	3.77	1.43	3.68
1893	0.39	−0.11	0.00	0.28	0.37	2.64	8.17	9.45	7.24	6.26	2.54	1.20	3.23
1894	0.64	0.55	0.40	0.40	1.62	7.12	10.24	10.69	7.57	4.95	2.54	1.69	4.06
Mittel	0.78	0.36	0.15	0.33	0.72	4.41	9.11	10.02	8.34	5.74	3.16	1.60	3.74

Tiefe 1.0 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	1°.75	1°.37	1°.14	0°.99	0°.94	3°.04	7°.79	8°.86	7°.53	5°.77	3°.57	2°.25	3°.77
1886	1.46	1.08	0.70	0.59	0.57	2.30	7.22	9.25	8.32	6.20	5.05	3.59	3.88
1887	2.31	1.71	1.33	1.07	1.03	3.75	6.73	8.19	8.28	6.01	4.25	2.54	3.95
1888	1.78	1.22	0.86	0.69	0.69	0.77	4.61	7.10	7.26	5.31	3.21	2.22	2.99
1889	1.53	1.06	0.82	0.75	0.71	3.27	7.10	8.29	7.59	6.95	4.69	3.28	3.86
1890	2.25	1.60	1.15	1.03	1.89	5.31	7.54	8.75	8.34	6.12	4.46	2.82	4.29
1891	1.79	1.24	1.05	0.96	0.86	2.89	7.07	8.09	7.59	6.64	4.11	2.74	3.77
1892	1.84	1.23	0.97	0.80	0.80	3.48	6.16	8.52	8.35	7.12	5.20	3.44	3.99
1893	1.86	1.24	1.05	0.90	0.78	2.28	6.15	8.00	7.05	6.20	3.89	2.41	3.46
1894	1.70	1.50	1.08	1.03	1.73	4.84	8.20	9.38	7.77	5.70	4.05	2.92	4.16
Mittel	1.83	1.33	0.98	0.88	1.00	3.19	6.86	8.44	7.81	6.20	4.25	2.82	3.81

Tiefe 2.0 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1885	2°.92	2°.41	2°.04	2°.00	2°.00	2°.58	4°.61	6°.31	6°.70	6°.21	5°.04	4°.32	3°.94
1886	3.35	2.41	1.93	1.48	1.46	1.77	4.34	6.54	7.13	6.35	5.46	4.76	3.92
1887	3.63	2.80	2.38	2.04	1.78	2.62	4.51	5.98	6.67	6.21	5.02	3.84	3.96
1888	3.01	2.32	1.91	1.60	1.42	1.45	2.99	4.86	5.71	5.28	4.14	3.17	3.16
1889	2.52	1.98	1.60	1.37	1.19	1.91	4.29	5.79	6.22	6.01	5.17	4.18	3.53
1890	3.17	2.42	1.92	1.67	1.85	3.34	5.25	6.57	7.14	6.26	5.08	3.98	4.08
1891	3.32	2.78	2.44	2.09	1.87	2.64	4.92	6.29	6.85	6.35	5.37	4.12	4.09
1892	3.50	2.92	2.26	2.02	2.26	2.14	4.49	6.75	7.30	7.05	6.50	5.80	4.45
1893	3.85	3.00	2.40	2.00	2.00	2.12	4.08	6.17	6.48	6.15	5.27	3.89	3.96
1894	3.08	2.71	2.12	2.00	2.10	3.63	6.08	7.61	7.88	6.79	5.41	4.49	4.50
Mittel	3.24	2.58	2.10	1.83	1.79	2.42	4.56	6.29	6.81	6.27	5.25	4.26	3.96

Heinäis. Birkenwald.

Tiefe 0.5 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1887	1°.33	1°.00	0°.24	0°.25	2°.45	7°.78	10°.35	10°.96	10°.04	4°.93	3°.04	1°.50	4°.51
1888	0.57	−0.27	−1.09	0.07	0.35	5.18	9.23	10.15	8.81	4.72	1.93	1.18	3.42
1889	0.39	−0.30	−0.40	0.14	0.78	8.44	10.85	11.04	8.77	7.42	3.53	2.18	4.43
1890	1.60	0.98	0.44	0.70	5.44	8.39	10.38	11.37	9.77	5.42	3.67	1.60	5.01
1891	0.65	0.26	0.15	0.22	1.72	6.89	10.56	10.56	8.81	6.65	2.71	1.66	4.25
1892	0.97	0.20	0.01	0.30	0.82	6.72	9.66	10.31	9.49	6.86	3.82	1.49	4.25
1893	−0.17	−0.90	−0.30	0.14	0.38	6.00	9.37	10.45	7.96	6.76	2.34	1.22	3.64
1894	0.77	0.86	0.72	0.79	4.97	8.36	11.14	11.11	8.17	5.34	2.54	1.51	4.77
Mittel	0.76	0.23	−0.03	0.33	2.11	7.22	10.17	10.74	8.98	6.01	2.95	1.54	4.29

Tiefe 1.0 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1887	2°.32	1°.95	1°.46	1°.03	2°.11	5°.33	7°.51	8°.74	8°.81	6°.16	4°.25	2°.75	4°.38
1888	2.06	1.43	0.81	0.60	0.57	2.96	6.10	7.73	7.60	5.59	3.34	2.35	3.43
1889	1.71	1.14	0.83	0.71	0.72	4.92	7.70	8.72	8.07	7.05	4.62	3.23	4.14
1890	2.08	1.49	0.92	0.98	3.95	6.45	8.43	9.63	8.92	6.38	4.94	3.22	4.80
1891	2.30	1.85	1.55	1.38	1.72	4.90	7.33	8.36	8.06	6.87	4.28	2.92	4.31
1892	2.34	1.72	1.24	1.01	1.21	4.70	7.17	8.39	8.45	7.34	5.04	3.43	4.39
1893	2.13	1.34	1.00	0.97	0.89	3.83	6.60	8.15	7.38	6.31	4.38	2.96	3.88
1894	2.31	1.97	1.81	1.58	3.65	6.21	8.44	9.84	8.31	6.18	3.74	3.02	4.77
Mittel	2.16	1.61	1.21	1.03	1.85	4.91	7.41	8.69	8.20	6.48	4.32	2.98	4.26

Tiefe 2.0 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
1887	3°.82	3°.25	2°.82	2°.25	2°.47	4°.21	5°.84	7°.08	7°.63	6°.89	5°.43	4°.17	4°.66
1888	3.37	2.84	2.36	1.98	1.63	2.54	4.57	6.19	6.83	5.92	4.71	3.65	3.89
1889	2.89	2.36	2.00	1.83	1.63	3.53	5.65	6.92	7.33	7.12	6.16	4.90	4.37
1890	4.07	3.28	3.00	2.69	3.44	5.24	6.53	7.74	8.15	7.37	6.17	4.99	5.22
1891	3.92	3.18	3.05	2.91	2.54	4.27	5.81	7.11	7.50	7.07	5.75	4.68	4.83
1892	3.87	3.23	2.92	2.51	2.17	3.99	6.08	7.30	8.06	7.80	6.26	5.18	4.98
1893	3.99	3.07	2.50	2.22	2.03	3.37	5.44	6.89	7.03	6.98	5.82	4.64	4.51
1894	3.90	3.15	3.00	2.94	3.44	5.03	6.84	8.09	8.25	7.22	5.78	4.74	5.21
Mittel	3.73	3.05	2.71	2.42	2.42	4.02	5.85	7.17	7.60	7.05	5.76	4.62	4.71

Obgleich die obenangeführten Beobachtungen teilweise zehn Jahre hindurch fortgesetzt wurden, so giebt es nur für vier Jahre 1887—90 gleichzeitige Beobachtungen von allen Plätzen. Beim Vergleich der verschiedenen Plätze müssen wir uns also auf diese vier Jahre beschränken. Wir wollen jedoch zuerst die Beobachtungen an und für sich, für die ganze Zeit, binnen welcher sie an jedem Platze fortgesetzt sind, studieren.

In den Tiefen 0.15 und 0.30 Meter in Mustiala sind die Beobachtungen nur zwei und ein halbes Jahr fortgesetzt. Um dieselben mit den übrigen vergleichbar zu machen, wollen wir sie auf dieselbe sechs-jährige Periode 1885—90, welche die übrigen umfassen, zurückführen. Hierbei können verschiedene Methoden in Frage kommen, z. B. gewöhnliche lineare Interpolation zwischen den Werthen der Lufttemperatur und der Temperatur in 0.50 Meter Tiefe. Aber ausser dass in der 2 ½-jährigen Periode die Temperatur der Tiefe 0.15 Meter in Juli und August und die in 0.15 Meter Tiefe auch in August und September nicht zwischen der Lufttemperatur und der in der Tiefe 0.50 Meter liegt, sondern höher ist als diese und dass eine Extrapolation hier nicht zulässig ist, so giebt es noch andere Umstände welche gegen eine gewöhnliche Interpolation sprechen.

Die Werthe und Schwankungen der Bodentemperatur stehen nämlich in Rapport nicht allein mit der Lufttemperatur sondern auch mit dem Niederschlage und besonders mit den Schneeverhältnissen wie später ausfürlicher dargelegt werden soll. Wir sehen z. B. bezüglich der in Frage stehenden Tiefen, dass im Juli 1886 die Temperatur in den Tiefen 0.15, 0.30 und 0.50 Meter in jeder etwa eben so hoch oder höher ist als im Juli 1885 obgleich das Juli-Mittel der Lufttemperatur 1886 16°.81 ist, das des Juli 1885 18°.21, das höchste Monatsmittel unserer Tabelle. Der Niederschlag ist dagegen im Juli 1886 ausserordentlich gross, 115.8 mm, im Juli 1885 nur 43.1. Im Winter wiederum haben wir im Februar 1886 eine Lufttemperatur von – 8°.40 und 1887 von – 1°.94. Die Bodentemperatur in den erwähnten Tiefen ist zu derselben Zeit doch nur 0°.36, 1°.18 und 0°.43 kälter 1886 als 1887, obgleich auch in allen vorhergehenden Monaten in Herbst und Winter 1885—86 die Luft- und Bodentemperatur kälter (teilweise viel kälter) war als in Herbst und Winter 1886—1887.

Dies ist von den ungleichen Schneeverhältnissen in den beiden Wintern verursacht. Die Menge des Schneeniederschlages von November bis Februar ist wohl ziemlich gleich die beiden Winter, aber in dem kalten Winter 1885—86 mit sehr wenigen Thautagen bildet der lockere Schnee eine wirkliche Schützdecke über den Boden während im milden Winter 1886—87 mit vielen und warmen Thautagen der Schnee wahrscheinlich teils geschmolzen teils zu

einer vereisten Masse verwandelt wurde, welche die Wärme viel besser leitet als der lockere Schnee.

Eine Interpolation wie die obenerwähnte mit Berücksichtigung der Temperatur in 0.5 Meter Tiefe und der Lufttemperatur wäre also nicht ganz richtig. Viel konstanter ist dann der Rapport zwischen den Temperaturen in den Tiefen 0.15 und 0.30 Meter einerseits und der Temperatur in der Tiefe 0.50 Meter andererseits.

Obgleich nämlich diese drei Jahre mit Rücksicht auf sowohl die Temperatur- als Niederschlagsverhältnisse recht verschieden sind, so sind doch die Differenzen zwischen den Monatsmitteln in den erwähnten Tiefen in den verschiedenen Jahren ziemlich gleich. (Im Jahre 1887 zeigt doch, wie früher gesagt, das Thermometer in 0.30 m Tiefe eine auffallend hohe Temperatur). Man könnte also vielleicht den richtigen mittleren Temperaturwerthen in den Tiefen 0.15 und 0.30 Meter in den sechs Jahren 1885—90 ziemlich nahe kommen, wenn man zu den mittleren Temperaturen dieser Periode für die Tiefe 0.50 Meter die obenehrwähnten mittleren Differenzen der 2 ½-jährigen Periode zwischen 0.15 und 0.50 und zwischen 0.30 und 0.50 m Tiefe addirte. Da man jedoch annehmen muss, dass in der Regel die Temperatur eines oberen Bodenlagers mehr mit den Anomalien der Lufttemperatur Schritt hält als die Temperatur eines unteren, so mögen wohl die richtigen Werthe der sechsjährigen Monatsmittel der Temperatur in den Tiefen 0.15 und 0.30 Meter zwischen den Werthen liegen, welche durch die zuerst erwähnte lineare Interpolationsmethode und die jetzt vorgeschlagene Methode mit constanten Differenzen erhalten werden. Wir nehmen also aus den mittels dieser beiden Methoden gewonnenen Werthen die Mittel und führen im Folgenden diese Mittel als die mittleren Temperaturen der Tiefen 0.15 und 0.30 Meter in der sechsjährigen Periode an.

Die Resultate der beiden Reductionsmethoden stimmen übrigens gut überein ausser für Februar, März, Mai und Juli, für welche Monate die Lufttemperatur der 2 ½- und der 6-jährigen Periode sehr verschieden ist. Für August, teilweise für Juli und September, kann die Interpolationsmethode nicht in Frage kommen. Da wir einmal diese Frage verhältnissmässig ausführlich behandelt haben, wodurch doch zugleich einige Bedingungen der Temperaturveränderungen im Boden und gewisse Umstände dabei beleuchtet worden sind, so wollen wir auch die Resultate der beiden Reductionsmethoden darlegen, und zwar zuerst die Mittel der 2 ½-jährigen Periode und dann die nach beiden Methoden berechneten Werthe für die 6-jährige Periode.

Mustiala, mittlere Temperatur der Periode Juni 1885—December 1887.

	Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Luft	−5°.43	−5°.17	−4°.17	3°.08	9°.30	14°.03	17°.21	14°.22	9°.03	2°.84	−0°.32	−4°.51	4°.17
Tiefe 0.15 Meter	−1.04	−1.80	−1.68	1.00	7.42	13.94	17.40	16.19	10.76	4.42	2.07	−0.39	5.69
„ 0.30 „	0.41	−0.15	−0.29	0.82	5.90	12.77	16.27	15.83	11.32	5.64	3.40	1.46	6.11
„ 0.50 „	0.94	0.63	0.20	0.60	4.04	11.60	15.09	15.09	11.27	6.02	3.48	1.63	5.88

Mustiala, mittlere Temperatur der Periode 1885—1890.

		Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Luft		−5°.62	−7°.10	−5°.28	2°.32	9°.78	13°.93	16°.26	14°.05	9°.21	3°.23	−0°.50	−4°.36	3°.92
Tiefe 0.15 Meter	durch lineare Interpolation	−1.15	−2.68	−2.17	0.80	7.63	13.84	—	—	10.76	4.76	1.92	−0.32	
	durch const. Differenzen .	−1.11	−1.92	−1.71	0.91	7.11	13.68	16.78	15.67	10.71	4.71	1.94	−0.39	
	Mittel	−1.13	−2.30	−1 94	0.86	7.37	13.76	16.78	15.67	10.73	4.74	1.93	−0.36	5.51
Tiefe 0.30 Meter	durch lineare Interpolation	0.33	−0.51	−0.44	0.67	5.87	12.59	15.47	—	—	5.94	3.27	1.41	
	durch const. Differenzen .	0.34	−0.27	−0.32	0.73	5.59	12.51	15.65	15.31	11.27	5.93	3.27	1.40	
	Mittel	0.34	−0.39	−0.38	0.70	5.73	12.55	15.56	15.31	11.27	5.93	3.27	1.40	5.94
Tiefe 0.50 Meter		0.87	0.51	0.17	0.51	3.73	11.34	14.47	14.57	11.22	6.31	3.35	1.57	5.75

Wir geben nun die Zusammenstellung der mittleren Temperaturen an den verschiedenen Plätzen während der betreffenden Beobachtungsperioden. Um schon hier einen Vergleich zwischen Wald und offenem Felde erhalten zu können, führen wir für den Fichtenhochwald, wo die Beobachtungen alle zehn Jahre hindurch fortgesetzt wurden, die Mittel auch für die Perioden 1885—90 und 1887—94 an.

Die Lufttemperatur wurde nur in Mustiala beobachtet. Um jedoch für jeden Platz einen Vergleich der Bodentemperatur mit der gleichzeitigen Lufttemperatur

zu erhalten, wollen wir die mittlere Lufttemperatur in Mustiala für die verschiedenen Perioden neben den Bodentemperaturbeobachtungen der verschiedenen Plätze angeben.

Es entsteht hierbei die Frage, wie nahe die Lufttemperaturbeobachtungen in Mustiala die wirkliche Lufttemperatur an den übrigen Plätzen angeben. Die Lufttemperatur in Mustiala wurde in einer Wildschen Thermometerhütte zwei Meter über dem Boden beobachtet.

Nach Hambergs umfassenden Untersuchungen über den Einfluss der Wälder auf das Klima Schwedens [1]) sind die monatlichen Mittel der Lufttemperatur 1.8 Meter über dem Boden im Walde, an offenen Plätzen im Walde und auf offenen Feldern nicht viel von einander abweichend. Die Extreme, so wie auch die Terminmittel sind wohl ein wenig mehr verschiedenen; das Terminmittel 9^h p. m. ist z. B. an offenen Plätzen des Waldes während April-October Monat $0^0.5$ bis $0^0.7$ niedriger als auf grossen Ebenen. Um 8 Uhr Morgens und 2 Uhr Nachmittags sind die Temperaturen sehr gleich. Unter den Bäumen im Walde ist in den Sommermonaten die Temperatur (1.8 Meter über dem Boden) am Morgen und am Tage etwa $1^0.5$ niedriger als auf den Ebenen, in der Nacht dagegen etwa $0^0.3$ höher. In den Wintermonaten sind alle Differenzen sehr klein.

Suchen wir die Mittel aller Stunden des Tages, so ist das Jahresmittel im Walde unter den Bäumen

$$0^0.25,$$

an offenen Plätzen im Walde

$$0^0.1$$

niedriger als auf den Ebenen. Sehr kleine Differenzen also. In der warmen Jahreszeit während der Monate April—September ist die Temperatur im Walde unter den Bäumen etwa

$$0^0.5 \text{ bis } 0^0.7,$$

an offenen Plätzen des Waldes etwa

$$0^0.2$$

niedriger als auf Ebenen; in der kalten Jahreszeit dagegen unter den Bäumen (November—Januar) etwa

$$0^0.2,$$

an den offenen Plätzen im Walde (Januar—März) etwa

$$0^0.05$$

höher als auf Ebenen. · Also auch hier ziemlich kleine Differenzen.

[1]) Hamberg: Om skogarnes inflytande på Sveriges klimat (De l'influence des forêts sur le climat de la Suède). Bihang till Domänstyrelsens underdåniga berättelse rörande skogsväsendet för år 1884. Stockholm 1885.

Mit diesen Thatsachen vor Augen können wir die Lufttemperaturbeobachtungen an dem von bebauten Feldern umgebenen landwirschaftlichen Institute Mustiala anwenden um eine Vorstellung auch der wirklichen Lufttemperatur an den verschiedenen Plätzen zu erhalten. Jedenfalls geben die unten angeführten mittleren Lufttemperaturen der verschiedenen Perioden die Möglichkeit zum Vergleich des allgemeinen Charakters dieser Periode.

Mustiala, offenes grasbewachsenes Feld 1885—90.

	Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Lufttemperatur	−5.62	−7.10	−5.28	2.32	9.78	13.93	16.26	14.05	9.21	3.23	−0.50	−4.36	3.92
Tiefe 0.15 Meter	−1.13	−2.30	−1.94	0.86	7.37	13.76	16.78	15.67	10.73	4.74	1.93	−0.36	5.51
„ 0.30 „	0.34	−0.39	−0.38	0.70	5.73	12.55	15.56	15.31	11.27	5.93	3.27	1.40	5.94
„ 0.50 „	0.87	0.51	0.17	0.51	3.73	11.34	14.47	14.57	11.22	6.31	3.35	1.57	5.75
„ 1.00 „	1.67	1.21	0.86	0.68	2.38	8.55	11.83	12.91	11.07	7.38	4.32	2.55	5.48
„ 2.00 „	3.55	2.88	2.41	1.99	2.18	5.22	8.21	10.03	10.26	8.63	6.35	4.70	5.55

Heinäis, Fichtenhochwald 1885—90.

	Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Tiefe 0.5 Meter	0.89	0.45	0.11	0.34	0.76	4.40	9.05	10.10	8.55	5.55	3.30	1.71	3.79
„ 1.0 „	1.85	1.34	1.00	0.85	0.97	3.07	6.82	8.41	7.89	6.06	4.21	2.78	3.79
„ 2.0 „	3.10	2.39	1.96	1.69	1.62	2.28	4.33	6.01	6.60	6.05	4.99	4.04	3.77

Heinäis, offener Platz im Walde 1887—94.

	Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Lufttemperatur	−7.05	−7.55	−4.69	2.22	9.52	13.51	15.88	13.82	9.17	3.99	−0.89	−4.58	3.70
Tiefe 0.5 Meter	1.53	1.22	1.01	1.16	4.55	10.36	12.97	12.99	10.37	6.79	3.61	2.10	5.75
„ 1.0 „	2.34	1.79	1.53	1.44	3.20	7.57	10.20	11.16	9.94	7.51	4.74	3.13	5.40
„ 2.0 „	3.45	2.78	2.43	2.09	2.63	4.91	7.26	8.72	8.75	7.65	5.84	4.31	5.10

Heinäis, Fichtenhochwald 1887—94.

	Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Tiefe 0.5 Meter	0°.84	0°.42	0°.23	0°.34	0°.81	4°.49	8°.86	9°.82	8°.35	5°.80	3°.10	1°.54	3°.73
„ 1.0 „	1.88	1.35	1.04	0.90	1.06	3.32	6.70	8.29	7.78	6.26	4.23	2.80	3.81
„ 2.0 „	3.26	2.62	2.13	1.85	1.81	2.48	4.58	6.25	6.78	6.26	5.25	4.18	3.97

Heinäis, Birkenwald 1887—94.

	Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Tiefe 0.5 Meter	0°.76	0°.23	0°.03	0°.33	2°.11	7°.22	10°.17	10°.74	8°.98	6°.01	2°.95	1°.54	4°.29
„ 1.0 „	2.16	1.61	1.21	1.06	1.85	4.89	7.44	8.69	8.20	6.48	4.37	2.98	4.26
„ 2.0 „	3.73	3.05	2.71	2.42	2.42	4.02	5.85	7.17	7.60	7.05	5.76	4.62	4.71

Heinäis, Fichtenhochwald 1885—94.

	Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Luft	−6°.94	−7°.37	−4°.72	2°.27	9°.29	13°.67	16°.21	13°.96	8°.96	3°.82	−0°.66	−4°.34	3°.76
Tiefe 0.5 Meter	0.78	0.36	0.15	0.33	0.72	4.41	9.11	10.02	8.34	5.74	3.16	1.60	3.74
„ 1.0 „	1.83	1.33	0.98	0.88	1.00	3 19	6.86	8.44	7.81	6.20	4.25	2.82	3.81
„ 2.0 „	3.24	2.58	2.10	1.83	1.79	2.42	4.56	6.29	6.81	6.27	5.25	4.26	3.96

Die eben verzeichneten mittleren Temperaturen der ganzen Beobachtungsperioden sollen nun der erste Gegenstand unserer Betrachtungen sein; später werden wir die Temperaturveränderungen von Jahr zu Jahr besprechen.

An allen Beobachtungsplätzen finden wir die Jahresmittel der Bodentemperatur in den verschiedenen Tiefen nicht viel von einander abweichend.

Wir lassen darum zuerst die Temperaturveränderung mit der Tiefe ausser Acht und vergleichen, so weit möglich, die verschiedenen Plätze unter einander.

Am höchsten ist das Jahresmittel an den offenen Plätzen, nämlich zwischen

5° und 6°,

am niedrigsten, etwa

3°.8

im Fichtenhochwalde, etwas höher dagegen, zwischen

4° und 5°

im trockneren Birkenwalde.

An den offenen Plätzen in Mustiala und Heinäis sind die Jahresmittel etwa

$1^0.4$ bis $2^0.0$

höher als die für entsprechende Perioden geltenden Lufttemperaturmittel. Im Birkenwalde sind ebenso die Bodentemperaturen

$0^0.5$ bis $1^0.0$

höher, im Fichtenhochwalde dagegen so ziemlich gleich der Lufttemperatur.

In Betreff der Temperaturveränderung mit der Tiefe wiederum sehen wir dass an den offenen Plätzen das Jahresmittel von 0.5 bis 2.0 m Tiefe ein wenig fällt, während es in den Wäldern ein wenig steigt. In den unteren Bodenschichten sind also die Temperaturdifferenzen zwischen Wald und offenem Felde kleiner als in den oberen, wie zu erwarten war. In der sechsjährigen Periode 1885—90 ist wohl die Temperatur im Fichtenhochwalde in allen Tiefen dieselbe, aber für die Perioden 1887—94 und 1885—94 steigt die Temperatur von

$3^0.73$ und $3^0.74$

in der Tiefe 0.5 Meter zu

$3^0.97$ und $3^0.96$

in der Tiefe $2^0.0$ Meter. Am prägnantesten tritt die erwähnte Ungleichheit zwischen Wald und Ebene hervor beim Vergleich der Temperatur am offenen Platze in Heinäis mit der in den angrenzenden Birken- und Fichtenwäldern. Am offenen Platze sinkt die Temperatur von

$5^0.75$

in 0.5 m Tiefe zu

$5^0.40$ und $5^0.10$

in 1.0 und 2.0 m Tiefe, während im Birkenwalde die Temperatur steigt von

$4^0.29$ und $4^0.26$

in 0.5 und 1.0 m Tiefe zu

$4^0.71$

in 2 m Tiefe. Die Temperaturdifferenz zwischen Wald und Ebene nimmt also hier von

$1^0.46$

in 0.5 m Tiefe zu

$0^0.39$

in 2.0 m Tiefe ab. Zwischen dem offenen Platze und Fichtenhochwalde nimmt die entsprechende Temperaturdifferenz, wie aus den obenangegebenen Zahlen ersichtlich, von

$2^0.02$ zu $1^0.13$

ab.

Der horizontale Wärmeaustausch zwischen den Bodenlagern angrenzender Plätze scheint sich also hier merkbar zu machen. Der offene Platz war auch verhältnissmässig klein, 3 ha. In grösseren Terrains kommt das ebenerwähnte Verhältniss nur in sehr geringem Grade zur Geltung, d. h. die Ungleichheiten verschwinden erst bei grossen Tiefen.

Die jährliche Variation ist natürlich grösser an offenem Felde als im Walde. Die mittleren Differenzen zwischen den höchsten und den niedrigsten Monatsmitteln betragen nämlich

Periode 1885—90		Tiefe 0.5	1.0	2.0 Meter.
Grasbewachsenes Feld,	Mustiala	14.40°	12.23°	8.27°
Fichtenhochwald,	Heinäis	9.99	7.56	4.98
Periode 1887—94				
Offener Platz,	Heinäis	11.98	9.72	6.66
Fichtenhochwald,	,,	9.59	7.39	4.97
Birkenwald	,,	10.71	7.63	5.18

Die Kleinheit der Amplitude der jährlichen Temperaturvariation im Walde im Vergleich mit der auf dem offenen Felde beruht auf der niedrigen Sommertemperatur, nicht darauf dass die Wintertemperatur höher wäre im Walde als auf offenem Felde. Die Bodentemperatur im Walde ist nämlich in der Regel das ganze Jahr hindurch kälter als auf offenem Felde. Für die achtjährige Periode 1887—94 gilt dies für alle Tiefen des Fichten- und des Birkenwaldes im Vergleich mit den betreffenden Tiefen des offenen Platzes im Fichtenwalde. Für die Periode 1885—90 finden wir ebenso die Temperatur in 2.0 m Tiefe das ganze Jahr hindurch entschieden niedriger im Fichtenwalde als am offenen Felde in Mustiala, in 1.0 m Tiefe dagegen von December bis April und in 0.5 m Tiefe in December und Januar ein klein wenig höher im Fichtenwalde als an offenem Felde.

An allen Plätzen sind natürlich die oberen Schichten im Sommer wärmer, im Winter kälter als die unteren. Ein Unterschied zwischen Feld und Ebene tritt doch auch hier hervor, indem im Walde, in den Schichten von 0.5 bis 2.0 m Tiefe, die oberen Schichten erst im Juni wärmer als die unteren werden, während dies an offenem Felde schon im Mai geschieht. Im October sind wieder an allen Plätzen die oberen Schichten kälter als die unteren. Die oberen Schichten in 0.15 und 0.30 m Tiefe an offenem Felde werden schon

im April wärmer als die unteren, aber auch schon im September wieder kälter als diese.

Die oberen Schichten sind also nur während vier à fünf Monate des Jahres wärmer als die unteren, sonst kälter, aber die Temperaturdifferenz zwischen den Schichten ist auch in jenem Falle viel grösser als in diesem, im Monat Juni am grössten.

Die Lufttemperatur ist im Sommer höher, im Winter viel niedriger als die Bodentemperatur. Im Walde, wo die Bodentemperatur am niedrigsten, ist die Lufttemperatur von April bis September höher als diese, am offenen Platze in Heinäis ist dies der Fall nur von April bis August und an offenem Felde in Mustiala ist schon im August die Bodentemperatur in 0.5 m Tiefe höher als die Lufttemperatur. In der Tiefe 0.15 m am offenen Felde in Mustiala ist dies der Fall auch im Juli.

In Betreff der absoluten Werthe der Monatsmittel dieser vieljährigen Beobachtungsperioden sehen wir, dass dieselben in den Tiefen 0.5 bis 2.0 Meter an allen Plätzen ausser im Birkenwalde das ganze Jahr hindurch über Null bleiben. Im Birkenwalde sinkt das Märzmittel der Tiefe $0^0.5$ Meter zu $-0^0.03$. In der Tiefe 0.30 Meter, am offenen Felde in Mustiala, ist die mittlere Temperatur in Februar und März und in der Tiefe 0.15 Meter in December bis März unter Null.

In einzelnen Jahren können natürlich Abweichungen von allen diesen Verhältnissen eintreten. So z. B. sinken am offenen Felde in Mustiala und im Fichtenhochwalde in Heinäis die Februar- und Märzmittel in der Tiefe 0.5 Meter bisweilen unter Null während in anderen Jahren (z. B. 1887) die Temperatur auch in 0.30 Meter Tiefe das ganze Jahr hindurch über Null bleibt.

Es wäre wohl von Interesse die Abweichungen der Monats- und Jahresmittel der einzelnen Jahre von den obenangeführten Monats- und Jahresmitteln der ganzen Beobachtungsperioden hier in Erwähnung zu bringen, aber dies würde uns ziemlich weit führen. Aus den Tabellen auf den Seiten 102—107 kann man ohne weiteres ersehen, dass die Monatsmittel in den verschiedenen Jahren verhältnissmässig sehr constant sind, viel constanter z. B., besonders in den Wintermonaten, als die Lufttemperatur. Am grössten und recht gross sind doch die Anomalien in Mai und Juni, darauf beruhend, dass das Aufthauen und die Erwärmung des Bodens in verschiedenen Jahren zu verschiedenen Zeiten zwischen Ende April und Ende Mai eintritt.

Im letzten Capitel dieser Arbeit, beim Vergleich der Beobachtungen in Mustiala und Heinäis mit denen in St. Petersburg und Pawlowsk, werden wir zu dieser Frage zurückkehren.

Jahresmaxima und Minima. Eintrittszeiten derselben. Amplituden.

Wir geben jetzt eine Zusammenstellung der Jahresmaxima und Minima in den verschiedenen Tiefen sämmtlicher Beobachtungsplätze sowie der Eintrittszeiten derselben. Hierdurch kann auch ein Urtheil über die Anomalien der einzelnen Jahre erhalten werden. Auch für die Lufttemperatur annotiren wir das Maximum und Minimum (d. h. hier die Mitteltemperatur des wärmsten und des kältesten Tages des Jahres) sowie die Eintrittszeiten derselben.

Wir nehmen, wie in ähnlichen Fällen gewöhnlich, überall das Minimum jedes Winters, nicht das des Kalenderjahres, und das Maximum des folgenden Sommers und führen diese zusammen als Jahresmaximum und Minimum wenn auch das Minimum in ein früheres Kalenderjahr als das Maximum fällt. Wir bezeichnen jedoch ein solches Jahr mit der einfachen Zahl des Kalenderjahres zu welchem der Sommer gehört.

In den untenstehenden Tabellen führen wir auch die Amplitude der jährlichen Temperaturvariation in den verschiedenen Tiefen des Bodens, so wie auch die der Lufttemperatur an. Wir nehmen hierbei die Differenz des Jahresmaximums und des Mittels des vorhergehenden und nachfolgenden Minimums. Für die Tiefen 0.15 und 0.30 Meter, in welchen nur zwei Minima beobachtet verden, nehmen wir die Differenz des Minimums und des Mittels des vorhergehenden und nachfolgenden Maximums. Für einzelne Jahre sind diese Amplitudenwerthe oft sehr verschieden von den Differenzen zwischen Jahresmaximum und Minimum, für längere Perioden werden dagegen die mittleren Werthe beider dieser Grössen mehr und mehr gleich. Wir führen in den Tabellen auch den mittleren Werth der Differenzen zwischen Maximum und Minimum jedes Jahres an. Es würde zu viel Platz einnehmen die Differenzen selbst für jedes einzelne Jahr anzuführen.

Die Maxima und Minima in der Tiefe 1.0 Meter im Fichtenwalde sind für die Jahre 1893 und 1894, in welchen Beobachtungen für diese Tiefe fehlen, derselben Curve entnommen, welche für die Ausfüllung der Lücke in den Beobachtungen in der auf Seite 101 beschriebenen Weise aufgezogen wurde.

Für die Tiefen 0.15 und 0.30 Meter habe ich an den beobachteten Maxima und Minima dieselben Correctionen angebracht, welche früher an die Mittel der betreffenden Monate hinzugefügt wurden.

Mustiala, offenes grasbewachsenes Feld.

Jahr.	Minimum. Luft.	Minimum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.15	0.30	0.50	1.0	2.0	Maximum. Luft	Maximum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.15	0.30	0.50	1.0	2.0	Amplitude. Luft.	Amplitude. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.15	0.30	0.50	1.0	2.0
1885	−19.5			0.6	1.0	2.0	24.2	20.9	18.9	17.2	13.6	10.4	44.95	25.4	20.4	17.0	12.8	8.6
1886	−22.0	−4.4	−1.6	−0.2	0.6	1.6	23.4	21.1	18.7	17.6	14.5	11.8	41.9	24.9	19.9	17.8	13.8	10.0
1887	−15.0	−4.5	−1.0	−0.2	0.8	2.0	22.5	19.7	19.1	16.4	13.2	10.4	42.15			16.7	12.5	8.6
1888	−24.3			−0.4	0.6	1.6	18.9			15.4	12.4	9.8	41.4			15.95	12.0	8.4
1889	−20.7			−0.7	0.2	1.2	23.7			15.2	13.2	10.4	41.65			15.55	12.8	8.85
1890	−15.2			0.0	0.6	1.9	20.8			14.4	13.0	10.4						
Mittel	−19.54	−4.45	−1.30	−0.15	0.63	1.72	22.25	20.57	18.90	16.03	13.32	10.54	42.41	25.15	20.15	16.60	12.78	8.89
Max.—Min.													41.79	25.03	20.20	16.18	12.69	8.82

Heinäis, offener Platz im Walde.

Jahr.	Minimum. Luft.	Minimum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.5	1.0	2.0	Maximum. Luft.	Maximum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.5	1.0	2.0	Amplitude. Luft.	Amplitude. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.5	1.0	2.0
1887	−15.0	0.8	1.2	2.0	22.5	13.8	11.1	8.8	42.15	13.15	10.00	6.85
1888	−24.3	0.5	1.0	1.9	18.9	12.9	10.4	8.4	41.40	12.35	9.35	6.55
1889	−20.7	0.6	1.1	1.8	23.7	14.0	11.5	9.0	41.65	13.10	10.30	6.95
1890	−15.2	1.2	1.3	2.3	20.8	14.2	11.9	9.9	41.30	13.15	10.60	7.95
1891	−25.8	0.9	1.3	1.6	23.0	14.8	11.7	9.2	48.80	13.95	10.30	7.40
1892	−25.8	0.8	1.5	2.0	20.7	13.8	11.5	9.2	47.60	13.00	10.10	7.30
1893	−28.0	0.8	1.3	1.8	22.7	14.6	11.7	9.4	45.70	13.50	10.20	7.50
1894	−18.0	1.4	1.7	2.0	21.5	14.8	12.3	9.8				
Mittel	−21.60	0.88	1.30	1.93	21.72	14.11	11.51	9.21	44.09	13.17	10.12	7.21
Max.—Min.									43.32	13.23	10.21	7.28

Heinäis, Fichtenhochwald.

Jahr.	Minimum.				Maximum.				Amplitude.			
	Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.			Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.			Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.		
		0.50	1.0	2.0		0.50	1.0	2.0		0.50	1.0	2.0
1885	−19°.5	0°.2	0°.9	2°.0	24°.2	11°.8	9°.3	6°.8	44°.95	12°.3	8°.6	5°.1
1886	−22.0	−1.2	0.5	1.4	23.4	11.7	9.8	7.4	41.90	12.15	9.1	5.9
1887	−15.0	0.3	0.9	1.6	22.5	10.5	8.5	7.0	42.15	10.7	7.8	5.6
1888	−24.3	−0.7	0.5	1.2	18.9	9.4	8.0	6.0	41.40	9.75	7.4	4.9
1889	−20.7	0.0	0.7	1.0	23.7	10.4	8.6	6.4	41.65	10.2	7.75	5.1
1890	−15.2	0.4	1.0	1.6	20.8	11.2	9.2	7.3	41.30	11.0	8.3	5.7
1891	−25.8	0.0	0.8	1.6	23.0	10.6	8.5	7.2	48.80	10.6	7.7	5.4
1892	−25.8	0.0	0.8	2.0	20.7	11.1	*8.9*	8.0	47.60	11.2	8.15	6.0
1893	−28.0	−0.2	*0.7*	2.0	22.7	10.6	*8.2*	6.8	45.70	10.5	7.4	4.8
1894	−18.0	0.4	0.9	2.0	21.5	11.4	*9.6*	8.0				
Mittel	−21.43	−0.08	0.77	1.64	22.14	10.87	8.86	7.09	43.94	11.04	8.02	5.39
Max.—Min.									43.57	10.95	8.09	5.45

Heinäis, Birkenwald.

Jahr.	Minimum.				Maximum.				Amplitude.			
	Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.			Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.			Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.		
		0.5	1.0	2.0		0.5	1.0	2.0		0.5	1.0	2.0
1887	−15°.0	−0°.6	0°.9	2°.0	22°.5	12°.2	9°.4	8°.0	42°.15	13°.45	8°.75	6°.3
1888	−24.3	−1.9	0.4	1.4	18.9	10.8	8.2	7.0	41.40	12.1	7.7	5.55
1889	−20.7	−0.7	0.6	1.5	23.7	11.6	9.2	7.6	41.65	11.8	8.5	5.65
1890	−15.2	0.3	0.8	2.4	20.8	11.9	10.0	8.6	41.30	11.8	9.1	6.2
1891	−25.8	−0.1	1.0	2.4	23.0	11.5	8.6	7.8	48.80	11.55	7.6	5.5
1892	−25.8	0.0	1.0	2.2	20.7	11.5	9.0	8.2	47.60	12.15	8.1	6.1
1893	−28.0	−1.3	0.8	2.0	22.7	11.5	8.4	7.5	45.70	11.9	7.3	5.1
1894	−18.0	0.5	1.4	2.8	21.5	12.5	10.4	8.6				
Mittel	−21.60	−0.48	0.86	2.09	21.72	11.69	9.15	7.91	44.09	12.11	8.15	5.77
Max.—Min.									43.32	12.17	8.29	5.82

Die Abweichungen der Maxima und Minima der einzelnen Jahre von den mittleren Werthen der Maxima und Minima der Beobachtungsperiode sind für die Bopentemperatur nicht grösser, eher kleiner als die Abweichungen der einzelnen Monatsmittel von den mittleren Mitteln der Periode. Sie betragen gewöhnlich nicht mehr als 0°.5, sehr selten mehr als 1°.0.

In Betreff der Lufttemperatur, besonders der Minima, sind die Anomalien viel grösser; das Minimum schwankt nämlich in den zehn Beobachtungsjahren zwischen

– 15°.0 und – 28°.0.

Es entsteht die Frage bis zu welcher Tiefe der Boden an den verschiedenen Plätzen im Winter friert. Dies geschieht bis zu 0.5 Meter Tiefe

am offenen Felde in Mustiala 4 Winter von 6
„ „ Platze in Heinäis keinmal in 8 Wintern
im Fichtenwalde in Heinäis 3 Winter von 10
„ Birkenwalde „ „ 5 „ „ 8

Bis zur 1.0 Meter Tiefe war der Boden niemals gefroren. Die niedrigsten überhaupt beobachteten Temperaturen in den Tiefen 0.5—2.0 Meter sind

in der Tiefe	0.5	1.0	2.0 Meter
am offenen Felde in Mustiala	– 0°.7	0°.2	1°.2
„ „ Platze im Fichtenwalde in Heinäis .	0.5	1.0	1.6
im Fichtenwalde in Heinäis	– 1.2	0.5	1.0
„ Birkenwalde „ „	– 1.9	0.4	1.4

Es scheint also, als könnte der Boden in natürlichem mit Schnee bedecktem Zustande in gewissen Jahren bis 0.7 à 0.8 m Tiefe frieren. Hierbei ist doch zu beachten dass beim täglichen Betreten des Platzes, wo die Thermometer in den Boden eingesteckt waren, der Schnee natürlich ein wenig gepackt wird, wodurch sein Wärmeleitungsvermögen sich vermehrt, und die Kälte besser in den Boden eindringen kann. Ebenso kann erwähnt werden, dass zur Winterzeit, auf Grund der Wärmeleitung der Thermometerröhre, die Thermometer eher eine zu niedrige als zu hohe Temperatur zeigen. Man muss also annehmen, dass an Plätzen wo der Schnee ganz unberührt liegt die Bodentemperatur im Winter ein wenig höher ist und dass der Boden nicht ganz so tief

friert, wie nach den obigen Beobachtungen im Walde und am offenen Felde in Mustiala der Fall wäre.

Am offenen Platze im Fichtenwalde in Heinäis war der Boden niemals bis zur Tiefe 0.5 Meter gefroren. Diese Ungleichheiten der verschiedenen Plätze beruhen vielleicht auf ungleicher Dicke der Schneedecke.

Die Amplitude der jährlichen Temperaturvariation im Boden nimmt von der Oberfläche nach unten schnell ab. So z. B. am offenen Felde in Mustiala von etwa

$$25^0$$

in 0.15 m Tiefe zu

$$8^0.89$$

in 2.0 m Tiefe, und im Fichtenwalde von etwa

$$17^0 \text{ à } 18^0$$

zu

$$5^0.39$$

in denselben Tiefen. Die kurze Beobachtungsreihe in den Jahren 1885—86, auf welche die Angaben für die Tiefe 0.15 Meter im Fichtenwalde sich stützen, haben wir zwar als unzuverlässig angesehen, aber einen annährend richtigen Werth der Jahresamplitude kann wohl daraus doch erhalten werden.

Übrigens sehen wir, dass die Amplituden am grössten sind am offenen Felde in Mustiala, bedeutend kleiner am offenen Platze im Fichtenwalde in Heinäis, noch kleiner natürlich im Birkenwalde und am kleinsten im Fichtenhochwalde. Auf eine theoretische Verwerthung der Beobachtungsresultate, z. B. Berechnung des Wärmeleitungsvermögens des Bodens auf Grund des schneller oder langsamer geschehenden Abnehmens der Amplitude von der Oberfläche nach unten, will ich hier nicht eingehen. Die Abnahme der Amplituden nach unten ist etwa ebenso gross wie an einigen anderen Orten, wie St. Petersburg [1]), Pawlowsk [2]) und Königsberg [3]) wo umfassende Bodentemperaturbeobachtungen gemacht worden sind. Auch dies deutet gewissermassen darauf

[1]) Hlasek. Über die Bodentemperatur in St. Petersburg, Repert. für Meteorologie. Bd XIV, N:o 11. 1891.

[2]) Leyst, l. c.

[3]) Schmidt: „Theoretische Verwertung der Königsberger Bodentemperatur-Beobachtungen". Separat-Abdruck aus den Schriften der Phys.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg, Jahrg. XXXII, 1891, und Leyst: „Untersuchungen über die Bodentemperatur in Königsberg", Separat-Abdruck aus den Schriften der Phys.-ökon. Gesellschaft zu Königsberg, Jahrg. XXXIII, 1892.

hin, dass die möglichen Fehler der Thermometerangaben nicht gross sind. Denn wenn die Wärmeleitung der Röhre, besonders der eisernen Röhre in 2 m Tiefe, einen merklichen Einfluss auf die Thermometerangaben hätte, so würden die Amplituden vergrössert und wahrscheinlich grösser als jetzt ausfallen.

Wir wollen jetzt die Eintrittszeiten der Maxima und Minima angeben.

Da wir das Minimum jedes Winters, nicht das des Kalenderjahres, genommen haben, und doch die Bezeichnung nach dem Kalenderjahre beibehalten, ist im Folgenden mit z. B. „20. December 1887“ der „20. December im Winter 1886—87“ zu verstehen.

Wenn, wie gewöhnlich der Fall ist, der Extremwerth an vielen auf einander folgenden Tagen auftritt, wird, wie schon früher gesagt, der mittlere Tag dieser Reihe als die Eintrittszeit des Maximums oder Minimums angegeben. Wenn wiederum derselbe Extremwerth zwei oder mehrere ganz verschiedene Male in demselben Jahre auftritt, wird in den Tabellen selbst der mittlere Termin angegeben, während die wirklichen Extremtage in Noten verzeichnet werden.

Eintrittszeiten.

Mustiala, offenes grasbewachsenes Feld.

Jahr.	Minimum. Luft.	Minimum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.15	0.30	0.50	1.0	2.0	Maximum. Luft.	Maximum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.15	0.30	0.50	1.0	2.0
1885	20 Febr.	—	—	10 April	23 April	2 Mai	14 Juli	16 Juli	17 Juli	17 Juli	6 Aug.	30 Aug.
1886	26 Dec.	29 Jan.	12 Febr.[1]	19 März	19 April	5 Mai	19 Juni	29 Juli	29 Juli	29 Juli	13 Aug.	2 Sept.
1887	20 Dec.	17 März	19 März	22 März	21 April	12 Mai	17 Juli	31 Juli	31 Juli	31 Juli	8 Aug.	15 Sept.
1888	29 Jan.	—	—	19 März	18 Mai	25 Mai	20 Juli	—	—	2 Aug.[2]	5 Aug.	11 Sept.
1889	12 Febr.	—	—	8 März	13 April	21 Mai	6 Juli	—	—	23 Juli[3]	9 Aug.	1 Sept.
1890	1 März	—	—	4 März	26 April	4 Mai	22 Juli	—	—	19 Aug.	23 Aug.	11 Sept.
Mittel	28 Jan.	—	—	19 März	25 April	12 Mai	11 Juli	25 Juli	26 Juli	30 Juli	11 Aug.	7 Sept.

[1]) 29 Jan. 20 Febr. [2]) 26 Juli. 8 Aug. [3]) 9 Juli. 7 Aug.

Heinäis, offener Platz im Walde.

Jahr.	Minimum. Luft.	Minimum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.5	1.0	2.0	Maximum. Luft.	Maximum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.5	1.0	2.0
1887	20 Dec.	12 April	26 April	9 Mai	17 Juli	3 Aug.	5 Aug.	21 Sept.
1888	29 Jan.	25 März	29 März	15 Mai[1])	20 Juli	30 Juli[2])	12 Aug.	15 Sept.
1889	12 Febr.	27 März	17 April	4 Mai	6 Juli	7 Aug.	9 Aug.	3 Sept.
1890	1 März	19 März	5 April	12 April	22 Juli	6 Aug.	21 Aug.	26 Aug.
1891	6 Jan.	29 März	28 April	7 April	25 Juni	28 Juli	30 Juli	29 Aug.
1892	23 Jan.	14 Febr.	17 April	27 April	26 Aug.	22 Juli	28 Aug.	12 Sept.
1893	15 Jan.	2 April	27 April	10 Mai	1 Aug.	3 Aug.	9 Aug.	31 Aug.
1894	4 Dec.	20 März	2 April	12 April	29 Juni	24 Juli	22 Aug.	26 Aug.
Mittel	17 Jan.	23 März	15 April	27 April	18 Juli	31 Juli	13 Aug.	5 Sept.

Heinäis, Fichtenhochwald.

Jahr.	Minimum. Luft.	Minimum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.5	1.0	2.0	Maximum. Luft.	Maximum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.5	1.0	2.0
1885	20 Febr.	29 März	9 Mai	25 Mai	14 Juli	18 Juli	14 Aug.	7 Sept.
1886	26 Dec.	9 März[3])	9 Mai	11 Mai[4])	19 Juni	6 Aug.	21 Aug.	19 Sept.
1887	20 Dec.	3 April	14 Mai	19 Mai	17 Juli	3 Aug.	5 Aug.	22 Sept.[6])
1888	29 Jan.	16 März	2 Mai	7 Juni	20 Juli	4 Sept.	8 Sept.	21 Sept.[7])
1889	12 Febr.	7 März	10 Mai	1 Juni	6 Juli	8 Aug.	2 Sept.	17 Sept.
1890	1 März	31 März	27 April	3 Mai	22 Juli	13 Aug.	23 Aug.	11 Sept.
1891	6 Jan.	29 März	20 Mai	30 Mai	25 Juni	27 Juli	31 Aug.	17 Sept.
1892	23 Jan.	26 Febr.	29 April	29 Apr.[5])	26 Aug.	28 Aug.	30 Aug.	4 Sept.
1893	15 Jan.	24 Febr.	10 Mai	20 Mai	1 Aug.	8 Aug.	15 Aug.	5 Sept.
1894	4 Dec.	6 April	15 April	1 Mai	29 Juni	20 Aug.	24 Aug.	4 Sept.
Mittel	18 Jan.	19 März	5 Mai	18 Mai	15 Juli	10 Aug.	24 Aug.	13 Sept.

[1]) 9 Mai, 21 Mai [2]) 28 Juli, 2 Aug. [3]) 28 Febr., 19 März [4]) 23 April, 6 Mai, 3 Juni [5]) 2 April, 25 April, 30 Mai [6]) 17 Sept., 27 Sept. [7]) 16 Sept., 21 Sept., 27 Sept.

Heinäis, Birkenwald.

Jahr.	Minimum.				Maximum.			
	Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.			Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.		
		0.5	1.0	2.0		0.5	1.0	2.0
1887	20 Dec.	22 März	3 April	7 April	17 Juli	2 Aug.	5 Sept.	23 Sept.
1888	29 Jan.	15 März	14 April	20 Mai [2])	20 Juli	1 Aug.	9 Sept.	16 Sept.
1889	12 Febr.	7 März	6 Mai	20 Mai	6 Juli	1 Aug.	1 Sept.	20 Oct.
1890	1 März	8 März	10 Apr. [1])	26 Mai	22 Juli	13 Aug.	19 Aug.	11 Sept.
1891	6 Jan.	26 März	8 Mai	16 Mai	25 Juni	27 Juli	18 Aug.	14 Sept. [3])
1892	23 Jan.	29 Febr.	14 Mai	23 Mai	26 Aug.	28 Aug.	8 Sept.	15 Sept.
1893	15 Jan.	5 Febr.	16 Mai	21 Mai	1 Aug.	8 Aug.	15 Aug.	19 Aug.
1894	4 Dec.	24 April	24 April	28 April	29 Juni	20 Aug.	25 Aug.	1 Sept.
Mittel	17 Jan.	14 März	27 April	13 Mai	18 Juli	9 Aug.	28 Aug.	15 Sept.

Die Eintrittszeiten der Extremwerthe sind in verschiedenen Jahren recht verschieden. Die obigen Angaben, besonders in Betreff des Minimums, sind wohl ziemlich unsicher, da die Temperaturschwankung vor und nach dem Minimum ausserordentlich klein ist, aber annähernd dürfte der mittlere Termin doch richtig sein. Wir geben hier zuerst die Länge der Zeiträume, binnen welchen die Eintrittszeiten der Maxima und Minima in den betreffenden Beobachtungsperioden schwanken.

	Minimum.					Maximum.				
	Luft	0,5	1.0	2.0	m Tiefe.	Luft	0.5	1.0	2.0	m Tiefe.
Mustiala, offenes Feld	71	37	35	23	Tage.	33	33	18	16	Tage.
Heinäis, offener Platz	87	58	30	38	„	62	16	29	26	„
„ Fichtenwald	87	41	35	39	„	68	48	34	18	„
„ Birkenwald	87	78	43	49	„	62	32	25	62 [4])	„

[1]) 25 März, 11 April, 25 April [2]) 10 Mai, 21 Mai, 28 Mai [3]) 2 Sept., 16 Sept., 23 Sept.

[4]) Diese Zahl ist wahrscheinlich zu gross, denn das Auftreten des Maximums so spät wie den 20 October (1889) und so früh wie den 19 August (1393) scheint von Zufälligkeiten beeinflusst zu sein.

Für das Minimum ist also die Eintrittszeit mehr variabel als für das Maximum, und mehr in kleineren Tiefen als in grösseren. Für die Lufttemperatur schwankt doch die Eintrittszeit der Extreme am meisten, die des Minimums z. B. in den sieben- und zehnjährigen Perioden zwischen 4. December und 1. März; das Mittel der 10 Jahre tritt den 18. Januar ein.

Die Schneedecke und das langsame Frieren des Bodens bewirken, dass das Temperaturminimum im Boden viel später eintritt als in der Luft; in den Tiefen 0.5 bis 2.0 Meter sämtlicher Beobachtungsplätze zwischen 14. Februar und 7. Juni. Die mittleren Termine der Minima der verschiedenen Plätze und Tiefen fallen zwischen 14. März und 18. Mai.

Das Maximum der Lufttemperatur trifft in den 10 Jahren 1885—94 zwischen dem 19. Juni und 26. August ein, das Mittel den 15. Juli. Die Maxima der Bodentemperatur in den erwähnten Tiefen treffen zwischen dem 17. Juli und 20. October ein, die mittleren Termine der verschiedenen Maxima zwischen dem 30. Juli und 15. September.

Je tiefer man in den Boden hineindringt, desto später treten die Extremen auf. Wir geben die Zeiten an, welche zwischen den mittleren Eintrittszeiten der Extremtemperaturen in der Luft und in den verschiedenen Tiefen des Bodens verfliessen.

	Minimum.			Maximum.			
	Luft – 0.5	0.5—1.0	1.0—2.0 m Tiefe.	Luft—0.5	0.5—1.0	1.0—2.0 m Tiefe.	
Mustiala, offenes Feld	50	37	17	19	12	27	Tage.
Heinäis, offener Platz	65	23	12	13	13	23	„
„ Fichtenwald	60	47	13	26	14	20	„
„ Birkenwald	56	44	16	22	19	18	„

Man bemerkt sofort in der obigen Tabelle die lange Zeit, etwa 2 Monate, welche zwischen der Eintrittszeit des Minimums in der Luft und in der Tiefe 0.5 Meter verfliesst. Der Schutz der Schneedecke und auch das Freiwerden von Wärme beim Frieren des Bodens ist naturlich die Ursache hierzu. Diese grosse Verspätung des Minimums in den oberen Erdbodenschichten und andererseits die sehr rasche Erwärmung des Bodens nach dem Aufthauen ist wohl weiter die Ursache dessen, dass die Minima in 1.0 und 2.0 m Tiefe hingegen sehr rasch auf einander folgen. Hier muss jedoch beachtet werden, dass die Bestimmung der Eintrittszeiten des Minimums wie gesagt sehr unsicher ist. Es

ist also möglich, dass die Eintrittszeit des Minimums in der Tiefe 2.0 Meter als ein wenig zu früh angegeben ist.

Die Verspätung der Maxima von oben nach unten ist mehr der Tiefenzunahme proportional. Auf eine nähere Discussion dieser Fragen oder auf das Berechnen des Wärmeleitungsvermögens des Bodens wollen wir hier doch nicht eingehen.

Die mittleren Eintrittszeiten an den verschiedenen Plätzen sind nicht ohne weiteres mit einander vergleichbar, da die Beobachtungsperioden verschieden sind. Man kann jedoch aus den Beobachtungen der einzelnen Jahre sehen, dass in der Regel der Eintritt beider Extreme im Walde ein wenig verspätet ist im Vergleich mit den Eintrittszeiten am offenen Felde.

Die grosse Verspätung der Jahresminima in den obersten Bodenschichten verursacht, dass es etwa zweimal so lange Zeit vom Jahresmaximum bis zum Jahresminimum verfliesst wie vom Minimum bis zum Maximum, wie aus den unten stehenden Zahlen hervorgeht. Für die Lufttemperatur sind diese beiden Zeiten einander ziemlich gleich. Es verfliesst

	von Minimum bis Maximum.					von Maximum bis Minimum.				
	Luft	0.5	1.0	2.0	Meter Tiefe.	Luft	0.5	1.0	2.0	Meter Tiefe.
Mustiala, offenes Feld	164	133	108	118	Tage.	201	232	257	247	Tage.
Heinäis, offener Platz	182	130	120	131	„	183	235	245	234	„
„ Fichtenwald	178	144	111	118	„	187	221	254	247	„
„ Birkenwald	182	148	123	125	„	183	217	242	240	„

Einfluss des Regens auf die Bodentemperatur.

Wenn der Regen wärmer ist als die Bodenoberfläche, wirkt er natürlich erwärmend auf diese, dagegen abkühlend, wenn er kälter ist. Wir haben indessen keine Temperaturbeobachtungen von den Oberflächenschichten, und müssten doch stündliche solche besitzen um diese Einwirkung näher bestimmen und messen zu können. Den Einfluss eines anhaltenden Regens auf die Temperatur in den grösseren Tiefen 0.5 bis 2.0 Meter können wir dagegen mit Benutzung der vorhandenen Materials besser beobachten.

In den Monaten April bis August, wenn die Temperatur der Luft und die der Oberflächenschichten viel höher ist als die in den Tiefen 0.5—2.0 Meter, muss ein anhaltender Regen, welcher bis in diese Tiefen hineindringt, hier na-

türlich eine erwärmende Wirkung ausüben. Dies ist der Fall sowohl infolge der höheren Temperatur des durch die wärmeren Bodenlager kommenden Wassers, als auch infolge dessen, dass die Wärmeleitung in nassem Boden besser ist als in trocknem, und also nach Regen mehr Wärme von den oberen zu den unteren Schichten geleitet wird als während Trockenzeit. Im September sind in der Regel die Temperaturunterschiede zwischen den verschiedenen Bodenschichten ziemlich klein. Im October wiederum sind die Oberflächenschichten sowie die Luft schon bedeutend kälter als die unteren Schichten und grosse Niederschläge müssen also in diesem Monate eine abkühlende Wirkung auf die unteren Schichten ausüben.

Ein kurzer Gewitterregen dringt nicht mehr als einige Centimeter in trocknen Sandboden hinein [1]); ein reichlicherer Regen um z. B. 10 mm bis etwa 10 à 15 cm Tiefe. Wenn trocknes Wetter folgt wird doch das Wasser wieder verdunsten.

Die Verdunstung von den Pflanzen und vom Boden direkt erreicht im Sommer sehr erhebliche Werthe. Ich habe Beobachtungen in dieser Richtung angestellt. Nach Regen kann die Verdunstung von einem Rasenplatz bis auf 3 à 5 mm im Tage steigen. Im Durchschnitt dürfte der Wasserverbrauch der Pflanzen und die Verdunstung an unseren Kornäckern und Wiesen etwa 40 à 60 mm in jedem der Monate Mai bis August betragen. Die Regenmenge muss also in diesen Monaten recht gross sein, damit das Wasser wirklich zu den Tiefen von 1 und 2 Meter hineindringen könne.

Wir wollen jetzt die Bodentemperatur in einigen trocknen und einigen nassen Sommern unter einander vergleichen.

Unter den zehn Beobachtungsjahren war der Sommer 1892 für hiesige Witterungsverhältnisse ausserordentlich nass und kalt. Im Sommer 1890 war der August sehr nass. Mai und Juli haben auch eine Regenmenge über der gewöhnlichen, Juni ist dagegen trocken. Mai ist sehr warm, der wärmste in den zehn Beobachtungsjahren, Juni und August von gewöhnlicher Temperatur, Juli kalt. Im Sommer 1894 ist Juni sehr nass und der Juli-Niederschlag über dem Mittel, Mai und August dagegen trocken; die Temperatur in allen diesen Monaten etwas über dem mittleren Werthe. Im Sommer 1886 ist der Juli sehr nass und die Regenmenge im August ein wenig über dem Mittel. Da indessen in diesem Jahre keine Bodentemperaturbeobachtungen in Heinäis

---

[1]) Siehe z. B. Leyst. Die Bodentemperatur in Pawlowsk, Repert. für Met. Bd XIII N:o 7. Ss. 265—269, 1890.

gemacht wurden, lassen wir diesen Sommer hier ausser Betracht. Wir haben übrigens schon früher gezeigt wie in Mustiala der Regen im Juli dieses Jahres erhöhend auf die Bodentemperatur wirkt.

Die Sommer 1891 und 1893 sind durchweg sehr trocken, und von mittlerer Wärme, Juli 1891 doch sehr warm. Im Sommer 1887 sind Mai und Juli sehr trocken und auch im Juni und August ist die Regenmenge etwas unter dem mittleren Werthe. Der Sommer von mittlerer Wärme. Im Sommer 1888 sind Mai und Juni sehr trocken, die Regenmenge im August ein wenig unter, im Juli dagegen etwas über dem mittleren Werthe. Dieser Sommer ist kalt, wenn auch nicht so kalt wie der Sommer 1892, aber nach diesem der kälteste in den zehn Jahren, und also besonders geeignet zum Vergleich mit dem Sommer 1892 in Betreff des Einflusses des Regens.

Wir stellen also gegen einander die trocknen Sommer 1887, 1888, 1891 und 1893 einerseits und die mehr oder weniger nassen Sommer 1890, 1892 und 1894 andererseits. Da die Bodentemperaturverhältnisse im Fichtenwalde und im Birkenwalde sehr gleichartig sind, nehmen wir von diesen Temperaturen das Mittel und erhalten so eine Übersicht der Verhältnisse an offenen Plätzen und in Wäldern.

Ausser für die Monate Mai—August, in welchen wir zunächst den Einfluss des Regens studiren, geben wir die Bodentemperaturen auch für die Monate April, September und October und erhalten so die folgende Tabelle.

Vergleich der Bodentemperatur in trocknen und nassen Sommern.

	April.	Mai.	Juni.	Juli.	August.	Sept.	October.
Trockne Sommer							
Lufttemperatur 1887	2°.74	9°.48	13°.43	16°61	13°.57	10°.80	2°.10
1888	0.48	6.64	12.92	15.18	13 41	9.25	2.32
1891	2.05	9.27	12.86	17.74	13.28	9.24	5.90
1893	0.86	8.12	14.05	16.16	13.79	8.21	6.30
Mittel	1.53	8.38	13.32	16.42	13.51	9.38	4.16
Nasse Sommer							
1890	4.04	13.34	13.76	14.87	14.40	10.66	1.91
1892	0.10	6.62	11.80	14.32	13.54	10.21	3.88
1894	5.71	10.26	14.45	16.51	14.76	6.72	2.80
Mittel	3.28	10.07	13.34	15.23	14.23	9.20	2.86

	April.	Mai.	Juni.	Juli.	August.	Sept.	October.
Trockne Sommer							
Regenmenge (mm) 1887	16.2	34.6	58.8	34.0	61.6	73.8	56.5
1888	51.1	33.7	28.5	86.0	60.5	31.2	74.4
1891	10.4	44.1	36.2	37.2	36.1	79.1	51.0
1893	6.0	42.2	46.0	32.9	56.9	169.4	77.0
Mittel	20.9	38.7	42.4	47.5	53.8	88.4	64.7
Nasse Sommer							
1890	27.8	64.7	48.7	84.1	142.0	47.0	97.7
1892	33.3	54.2	130.9	128.4	79.6	66.5	47.9
1894	10.6	34.7	126.0	76.0	31.4	46.3	46.3
Mittel	23.9	51.2	101.9	96.2	84.3	53.3	64.0
Bodentemperatur am offenen Platze in Heinäis in der Tiefe							
Trockne Sommer							
0.5 Meter 1887	0°.82	3°.81	9°.67	12°.35	12°.45	11°.11	5°.82
1888	0.73	1.39	8.45	11.79	12.01	10.05	5.48
1891	1.00	4.92	10.09	13.62	12.75	10.30	7.35
1893	0.96	3.20	10.15	13.12	13.20	9.61	7.58
Mittel	0.88	3.33	9.59	12.72	12.60	10.27	6.56
Nasse Sommer							
1890	2.05	8.11	11.30	13.14	13.62	11.16	6.40
1892	1.02	3.96	9.61	12.54	12.83	10.94	7.35
1894	1.95	7.78	11.50	14.13	13.85	9.36	6.15
Mittel	1.67	6.62	10.80	13.27	13.43	10.46	6.63
Trockne Sommer							
1.0 Meter 1887	1.25	2.61	7.08	9.72	10.72	10.13	7.06
1888	1.13	1.28	5.77	8.95	10.20	9.47	6.41
1891	1.48	3.31	7.67	10.63	11.08	9.80	7.85
1893	1.34	2.29	7.47	10.15	11.26	9.31	7.73
Mittel	1.30	2.37	7.00	9.86	10.82	9.68	7.26
Nasse Sommer							
1890	1.74	5.69	8.60	10.68	11.63	10.51	7.49
1892	1.50	2.58	7.16	9.50	11.04	10.45	8.15
1894	1.97	5.76	8.48	11.37	12.01	9.84	7.01
Mittel	1.74	4.68	8.41	10.52	11.56	10.27	7.55

	April.	Mai.	Juni.	Juli.	August.	Sept.	October.
Trockne Sommer							
2.0 Meter 1887	2.32°	2.39°	4.61°	6.71°	8.18°	8.27°	7.61°
1888	2.10	2.00	3.47	5.96	7.75	8.18	7.00
1891	1.84	2.66	5.08	7.46	8.77	8.79	7.80
1893	2.04	2.08	4.61	7.24	8.84	8.52	7.57
Mittel	2.08	2.28	4.44	6.84	8.39	8.44	7.49
Nasse Sommer							
1890	2.41	3.90	6.00	7.94	9.30	9.41	8.04
1892	2.02	2.38	4.77	6.97	8.55	8.94	7.73
1894	2.09	3.62	5.93	8.30	9.59	9.07	7.47
Mittel	2.17	3.30	5.57	7.74	9.15	9.14	7.75
Mittlere Bodentemperatur im Walde in der Tiefe							
Trockne Sommer							
0.5 Meter 1887	0.36	1.52	6.47	9.55	10.34	9.71	5.05
1888	0.16	0.33	2.85	7.85	9.45	8.45	4.76
1891	0.26	1.01	5.54	10.01	10.07	8.53	6.65
1893	0.21	0.37	4.32	8.77	9.95	7.60	6.51
Mittel	0.25	0.81	4.79	9.05	9.95	8.57	5.74
Nasse Sommer							
1890	0.55	3.96	7.88	9.81	10.97	9.44	5.32
1892	0.27	0.58	5.23	9.21	10.05	9.24	6.52
1894	0.59	3.29	7.74	10.69	10.90	7.87	5.14
Mittel	0.44	2.61	6.95	9.90	10.64	8.85	5.66
Trockne Sommer							
1.0 Meter 1887	1.05	1.57	4.54	7.12	8.46	8.54	6.08
1888	1.64	0.63	1.86	5.35	7.41	7.43	5.45
1891	1.17	1.29	3.89	7.20	8.22	7.82	6.75
1893	0.93	0.83	3.05	6.37	8.07	7.21	6.25
Mittel	0.95	1.08	3.33	6.51	8.04	7.75	6.13
Nasse Sommer							
1890	1.00	2.92	5.88	8.48	9.19	8.63	6.25
1892	0.90	1.00	4.09	6.66	8.45	8.40	7.23
1894	1.30	2.69	5.52	8.32	9.61	8.04	5.94
Mittel	1.07	2.17	5.16	7.49	9.08	8.36	6.47

		April.	Mai.	Juni.	Juli.	August.	Sept.	October.
Trockne Sommer								
2.0 Meter	1887	2.14°	2.12°	3.41°	5.17°	6.53°	7.15°	6.55°
	1888	1.79	1.52	1.99	3.78	5.52	6.27	5.66
	1891	2.50	2.20	3.45	5.36	6.70	7.17	6.71
	1893	2.11	2.01	2.74	4.76	6.53	6.75	6.56
	Mittel	2.13	1.96	2.90	4.77	6.32	6.83	6.37
Nasse Sommer								
	1890	2.18	2.64	4.29	5.89	7.15	7.64	6.81
	1892	2.26	2.21	3.06	5.28	7.02	7.68	7.42
	1894	2.47	2.77	4.33	6.46	7.85	8.06	7.00
	Mittel	2.30	2.54	3.89	5.88	7.34	7.79	7.08

Wir geben in der folgenden Tabelle eine Übersicht der mittleren Temperatur- und Niederschlagsdifferenzen zwischen den nassen und trocknen Sommern.

Nasse Sommer — trockne Sommer.

	April.	Mai.	Juni.	Juli.	August.	Sept.	October.
Lufttemperatur	1.75°	1.69°	0.02°	−1.19°	0.72°	−0.18°	−1.30°
Regenmenge	3.0 mm	12.5 mm	95.5 mm	48.7 mm	30.5 mm	−35.1 mm	−0.7 mm
Bodentemperatur.							
Offener Platz.							
Tiefe 0.5 Meter.	0.79°	3.29°	1.21°	0.55°	0.83°	0.19°	0.07°
„ 1.0 „	0.44	2.31	1.41	0.66	0.74	0.59	0.29
„ 2.0 „	0.09	1.02	1.13	0.90	0.76	0.70	0.26
Wald.							
Tiefe 0.5 Meter.	0.19	1.80	2.16	0.85	0.69	0.28	−0.08
„ 1.0 „	0.12	1.09	1.83	0.98	1.04	0.61	0.34
„ 2.0 „	0.17	0.58	0.99	1.11	1.02	0.96	0.71

Bei Beurtheilung der Zahlen der Tabellen ist zu beachten, dass die mittlere Bodentemperatur eines Monats nicht allein von den Witterungsverhältnissen dieses Monats abhängt, sondern natürlich auch von dem im Boden selbst beim Anfang des Monats befindlichen Wärmebetrag d. h. von der Bodentempe-

ratur des vorigen Monats. Da indessen der Unterschied zwischen den mittleren Temperaturen eines Monats in den verschiedenen Jahren nicht gross ist, höchstens einige wenige Grade, so dürfte der Einfluss der Bodentemperatur-Anomalien eines vorhergehenden Monats für die Anomalien des folgenden, besonders in den kleinen Tiefen, wovon hier die Rede ist, von nur kleiner Bedeutung sein im Verhältniss zum Einflusse der Witterungsverhältnisse des folgenden Monats. Hier kann doch erwähnt werden, dass die Bodentemperatur im März, der nächste Monat vor der Zeitperiode, welche unsere Tabellen umfassen, in allen zehn Jahren infolge des Schutzes der Schneedecke sehr gleich ist, obgleich die Lufttemperatur in den verschiedenen Jahren ziemlich verschieden ist.

Etwas grösseren Einfluss als die Bodentemperatur eines vorhergehenden Monats auf die Bodentemperatur des folgenden hat, hat vielleicht die Regenmenge des vorhergehenden Monats oder der Feuchtigkeitszustand des Bodens beim Anfange des folgenden Monats, wenn überhaupt die Feuchtigkeit des Bodens einen bestimmten Einfluss auf die Bodentemperatur hat. Deshalb haben wir auch die vollen Sommer in unserer Tabelle berücksichtigt, obgleich in den Jahren 1890 und 1894 die Regenmenge nur in gewissen Monaten eigentlich gross war.

Aus den Tabellen ersehen wir zuerst, dass sowohl im Walde als am offenen Platze die mittlere Bodentemperatur der nassen Sommer in allen Monaten und in allen Tiefen etwa

$$0^0.5 \text{ bis } 3^0.0$$

höher ist als die entsprechende mittlere Temperatur der trocknen Sommer.

Im Juni ist die mittlere Lufttemperatur gleich und im Juli $1^0.19$ niedriger in den nassen Sommern als in den trocknen, so dass man wohl annehmen muss, dass die höhere Bodentemperatur der nassen Sommer wohl in diesen Monaten eine Folge der Regengüsse und der Feuchtigheit des Bodens ist.

Im Mai ist die mittlere Lufttemperatur der nassen Sommer $1^0.88$ höher als die der trocknen, so dass es möglich erscheinen könnte, dass dies die hinreichende Ursache der höheren Bodentemperatur der nassen Sommer wäre. Da indessen die Differenz zwischen den Bodentemperaturen in den nassen und trocknen Sommern teils ebenso gross teils viel grösser ist als die erwähnte Differenz, obgleich die Anomalien der Bodentemperatur in den in Frage stehenden Tiefen im allgemeinen kleiner sind als die der Lufttemperatur, scheint es wahrscheinlich, dass auch hier die Regengüsse eine Ursache der höheren Bodentemperatur sind. Wenn der Boden noch zum Teil gefroren ist, wird das Aufthauen desselben durch den Regen gefördert.

Im April ist sowohl die Luft- als auch die Bodentemperatur etwas höher in den Jahren mit nassen Sommern als in denen mit trocknen. Der Niederschlag des fraglichen Monats war in beiden Fällen ebenso klein. Übrigens ist der Boden zu dieser Jahreszeit gewöhnlich noch mit Schnee bedeckt. Der Regen kann also nur das Schmelzen des Schnees oder, wenn der Boden schon in diesem Monate schneefrei wird, das Aufthauen desselben fördern, aber auf die Temperatur in den Schichten unter der gefrorenen Rinde sehr wenig einwirken.

Im August ist die mittlere Lufttemperatur der nassen Sommer um 0°.72 und die Bodentemperatur um zwischen 0°.69 und 1°.04 höher als die entsprechenden Temperaturen der trocknen Sommer. Diese Zahlen sind zu klein und einander zu gleich, als dass man hier einen bestimmten Einfluss des Regens behaupten könnte, obgleich es wahrscheinlich erscheint, dass die kleine Differenz in der Lufttemperatur allein nicht die beobachtete Differenz der Bodentemperatur hervorzubringen vermöchte. Im August ist auch schon die Temperaturdifferenz zwischen den oberen und den unteren Schichten des Bodens ganz klein, so dass der Einfluss des Regens auch jedenfalls ganz klein und bedeutend kleiner als im Juni und Juli sein muss. Von der grossen Regenmenge 142.0 mm im August 1890 fiel auch der grösste Teil oder 90 mm in den 11 letzten Tagen des Monats, in welchen die mittlere Lufttemperatur 12°.1 (die der 10 Regentage 11°.9), während die Bodentemperatur in 0.5 und 1.0 Meter Tiefe 13°.8 und 12°.8 war und die Temperatur der oberen Bodenlager wahrscheinlich ungefähr dieselben Werthe hatte. Der Einfluss des Regens muss unter solchen Verhältnissen unbedeutend sein. Im Sommer 1894 wiederum ist August sehr trocken und Juli nur mässig nass, so dass von einem Einflusse des Regens im August hier nicht die Rede sein kann. Der Sommer 1892 war durchgehend nass, und wir können auch hier in allen Monaten den Einfluss des Regens erkennen. Dies sowohl beim Vergleich der Temperaturverhältnisse 1892 mit den mittleren Temperaturen der vier trocknen Jahre als besonders beim Vergleich mit den Verhältnissen im Sommer 1888, welcher, was die Lufttemperatur betrifft, dem kalten Sommer 1892 am nächsten steht.

Obgleich nämlich die Lufttemperatur von Mai bis Juli 1892 bedeutend niedriger und im August gleich der mittleren Temperatur der trocknen Sommer war, so ist doch die Bodentemperatur in allen diesen Monaten 1892 etwa ebenso hoch oder höher als die entsprechende mittlere Bodentemperatur der trocknen Sommer, und entschieden höher als die Bodentemperatur 1888, obgleich die Lufttemperatur auch im Sommer 1888 in Juni und Juli entschieden höher und in

Mai und August gleich der Lufttemperatur im Sommer 1892 war. Eine grosse Regenmenge scheint also in den Monaten Mai bis Juli und auch im August eine erwärmende Einwirkung auf die Bodenlager in 0.5 bis 2.0 Meter Tiefe auszuüben.

Vergleichen wir jetzt die Verhältnisse am offenen Platze und im Walde mit einander, so sehen wir, dass der erwärmende Einfluss des Regens im Mai grösser ist am offenen Platze als im Walde, von Juni bis August dagegen grösser im Walde als am offenen Platze. Die Ursache hierzu liegt wahrscheinlich, wie aus dem Folgenden hervorgeht, in dem Schatten, welchen die Bäume im Walde dem Boden gegen die Sonnenstrahlen verleihen.

Wir haben bisher die Bodentemperatur nicht mit anderen Erscheinungen als der Lufttemperatur und dem Regen zusammengestellt. Die Bewölkung des Himmels ist aber auch von Einfluss.

Am Tage, wenn die Sonne scheint, wird die Bodenoberfläche stark erwärmt, in klaren Nächten dagegen durch die starke Ausstrahlung bedeutend abgekühlt. Doch wird, Leysts Untersuchungen in Pawlowsk gemäss[1]), die mittlere Bodentemperatur an klaren Sommertagen sich höher stellen als an trüben, auch bei ungefähr gleicher mittlerer Lufttemperatur der klaren und trüben Tage.

Von der hiesigen Meteorologischen Centralanstalt habe ich folgende Angaben über die in Mustiala beobachtete Bewölkung des Himmels erhalten. Die Grösse derselben ist in üblicher Weise mit den Ziffern 0 (klar) bis 10 (der ganze Himmel bedeckt) bezeichnet.

Bewölkung des Himmels in Mustiala.

	Mai.			Juni.			Juli.			August.		
	7^h a.	2^h p.	9^h p.	7^h a.	2^h p.	9^h p.	7^h a.	2^h p.	9^h p.	7^h a.	2^h p.	9^h p.
1887	6.0	6.6	5.5	6.0	6.6	5.4	4.7	6.4	4.2	5.8	6.1	4.8
1888	5.5	4.6	5.5	3.9	5.3	4.8	6.1	7.2	6.2	6.1	6.6	5.4
1891	6.5	5.1	5.5	4.7	5.2	3.8	5.7	5.2	5.1	7.0	7.3	5.8
1893	5.3	6.1	4.9	4.7	6.5	4.6	4.9	5.5	4.5	5.2	6.3	3.5
Mittel	5.8	5.6	5.4	4.8	5.9	4.7	5.4	6.1	5.0	6.0	6.6	4.9
1890	3.3	5.8	3.9	6.5	7.0	6.0	7.0	7.5	6.3	8.0	7.5	5.9
1892	6.7	7.5	5.6	6.4	7.0	6.3	6.2	7.3	6.1	8.0	5.8	5.1
1894	5.7	6.3	3.7	4.9	7.0	6.7	4.2	5.7	4.1	6.1	6.9	5.5
Mittel	5.2	6.5	4.4	5.9	7.0	6.3	5.8	6.8	5.5	7.4	6.7	5.5

[1]) Leyst, l. c. S. 218 u. f.

Wir ersehen hieraus, was auch zu erwarten war, dass die Bewölkung entschieden grösser in den nassen Sommern, als in den trocknen ist. Im Mai ist dies allerdings der Fall nur bei der Mittagsbeobachtung (2^h p. m.), aber um die Mittagszeit ist ja auch die Wirkung des Sonnenscheins und folglich auch die der wärmeabhaltenden Wolken am grössten.

Da nun trots der grösseren Bewölkung und unabhängig von der Lufttemperatur die Bodentemperatur in den Tiefen 0.5 bis 2.0 Meter in den nassen Sommern höher ist als in den trocknen, so muss man wohl es als bewiesen ansehen, dass der Regen und die Feuchtigheit des Bodens zur Erhöhung der Temperatur in den erwähnten Bodenschichten beitragen.

Hier möge auch, nach Mittheilungen von einigen Forstleuten, erwähnt werden, dass in Gegenden, wo bisweilen in trocknen Sommern Eis in gewissen Mooren den ganzen Sommer hindurch in etwa ½ Meter Tiefe angetroffen wird, dasselbe doch in regnerischen Sommern schmilzt. Solches Eis hat man noch in so südlichen Gegenden wie Ruovesi und St. Michel (62° und 61°70′ Nördl. Br.) beobachtet.

Im Walde wird der Boden gegen die directe Sonnenstrahlung zum Teil geschützt, und der Unterschied der Bodenerwärmung an klaren und an trüben Tagen also kleiner als an offenem Felde. Es ist also erklärlich dass, wie früher erwähnt, die bodenerwärmende Einwirkung des Regens sich hier mehr merkbar macht als an offenem Felde, da sie nicht so stark vom Sonnenschein in den klaren Tagen kompensirt wird. Dass im Mai der Einfluss des Regens auf die Temperatur der Tiefen 0.5–2.0 Meter kleiner im Walde als an offenem Felde ist, beruht wahrscheinlich darauf, dass im Walde das Wintereis in den oberen Lagern des Bodens den grössten Teil dieses Monats noch ungeschmolzen liegt, während es an offenem Felde früher schmilzt und der Regen also hier besser in den Boden eindringen kann.

Einfluss der Schneedecke auf die Bodentemperatur.

Wir wollen jetzt den Einfluss der Schneedecke beachten. Leider sind keine direkten Schneebeobachtungen gleichzeitig mit den Bodentemperaturbeobachtungen gemacht worden, ausser für die Winter 1891—92 und 1892—93. In diesen Jahren wurde die Höhe der Schneedecke sowohl in Mustiala als auch in Heinäis gemessen. Diese Beobachtungen gehören zu den allgemeinen an

vielen Orten angestellten Schneehöhemessungen, welche 1891 von der Meteorologischen Centralanstalt angeordnet wurden [1]).

Ich habe von der Centralanstalt diese Beobachtungen zum Benutzen erhalten und die mittlere Schneehöhe jedes Monats berechnet. Obgleich in den betreffenden Jahren keine Bodentemperaturbeobachtungen in Mustiala mehr gemacht wurden, habe ich doch des Vergleiches wegen auch für diesen Ort die Resultate der Schneehöhemessungen angegeben. Diese Messungen geschahen auf einem Hofe mit Gebäuden gegen SE und W und Bäumen gegen N. In Heinäis geschahen die Messungen in der Nähe der Bodenthermometern am offenen Platze im Fichtenwalde.

Für die Monate (November und Mai) im Herbst und Frühling, in welchen die bestehende Schneedecke einerseit gebildet wird, andererseits verschwindet, gilt das angegegebene Mittel nur für den Teil des Monats, wo die Schneedecke liegt. Der erste und letzte Tag der Zeit, in welcher die Schneedecke den Boden bedeckt, wird angegeben.

Zugleich mit diesen Beobachtungen geben wir eine Zusammenstellung der monatlichen Mengen des Niederschlages in fester Form für die neun vollen Winter der zehnjährigen Beobachtungsperiode. Hierbei macht sich eine zu bedauernde Unsicherheit dadurch geltend dass, wie sehr natürlich ist, in Tagen wo sowohl Schnee als Regen fällt, nur die Niederschlagssumme, nicht besonders die Regen- und Schneemenge gemessen ist. Ich habe in solchen Fällen die Hälfte des Niederschlages als Schnee angenommen, obgleich es in vielen Fällen wahrscheinlich besser gewesen wäre solche Niederschläge hier ganz ausser Acht zu lassen, da der Schnee in diesen Fällen oft sofort schmilzt. Dies ist besonders mit dem ersten Schnee in October und Anfang November, wie auch im April (und Mai) der Fall. Vom Anfang der bestehenden Schneedecke am Ende November bis zum Ende März, kommen jedoch Tage mit sowohl Schnee als Regenniederschlägen nur selten vor.

---

[1]) Siehe Heinrichs: „Snö- och isförhållandena i Finland år 1891", Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, Häft. 52, 1892.

Niederschlag in fester Form in Mustiala mm.

	Oct.	Nov.	Dec.	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Summa.
1885—86	19.3	23.2	41.3	35.1	16.7	6.3	1.4	1.8	145.1
1886—87	—	13.6	41.8	33.7	5.8	14.4	5.4	—	114.7
1887—88	22.6	7.4	51.8	14.8	13.9	22.7	29.6	—	162.8
1888—89	19.8	18.3	5.8	20.3	28.2	25.1	2.0	—	119.5
1889—90	1.8	12.0	26.9	13.8	2.8	29.5	1.8	6.6	95.2
1890—91	23.7	20.1	7.8	30.4	18.0	26.9	1.7	—	128.6
1891—92	17.4	30.2	35.5	29.4	19.4	6.4	26.0	6.2	170.5
1892—93	11.6	8.0	18.8	24.0	33.9	27.0	6.0	2.4	131.7
1893—94	5.3	33.0	11.8	36.2	33.2	13.2	1.4	—	134.1
Mittel	13.5	18.4	26.8	26.4	19.1	19.1	8.4	1.9	133.6

Mittlere Höhe der Schneedecke mm.

	Erster Tag der Schneedecke.	Nov.	Dec.	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Letzter Tag der Schneedecke.
Heinäis.									
1891—92	18 Nov. [1]	134 [1]	197	365	571	555	397	17 [1]	3 Mai [1]
1892—93	20 Nov.	38	118	257	486	562	171	20	4 Mai
Mittel	19 Nov.	86	152.5	311	528.5	558.5	284	18.5	3 Mai
Mustiala									
1891—92	18 Nov. [2]	110 [2]	—	—	407	374	268 [3]	—	12 April [3]
1892—93	20 Nov.	30	98	140	345	422	199	—	12 April
Mittel	19 Nov.	70	—	—	376	398	233.5	—	12 April

[1]) Beobachtungen von Heinäis fehlen; die angeführte Zahl giebt die mittlere Schneehöhe an einer zwischen Heinäis und Mustiala liegenden Beobachtungsstation Haarankorpi an, wo die Schneehöhe im Allgemeinen nicht viel von der in Heinäis abweicht.

[2]) Tägliche Beobachtungen fehlen. Die angeführte Zahl ist mit Leitung wöchentlich ausgeführter Messungen auf demselben Platz, wo in der folgenden Monaten tägliche Messungen geschahen (siehe Sundell: Snötäckets höjd i Finland vintern 1891—1892, Fennia IX n:o 1 1894) und mit Beachtung der Temperatur- und Niederschlagsverhältnisse des betreffenden Monats berechnet. Die wöchentlichen Messungen sind in grosser Umfassung von „Sällskapet för Finlands Geografi“ angeordnet.

[3]) Der Schnee des ganzen Hofes wurde am 12. April mit Asche bestreut.

Durch Vergleich der Menge des gefallenen Schnees in den Wintern 1892 und 1893 mit der Schneehöhe zu derselben Zeit, könnte man wohl, auf Grund der beobachteten Mengen des gefallenen Schnees in den übrigen Jahren und mit nöthigem Beachten der Temperaturverhältnisse der verschiedenen Jahre, eine Vorstellung der Schneehöhe auch in den übrigen Jahren erhalten.

Weiter hat man ja auch direkte Bestimmungen der Schneedichtigkeit unter verschiedenen Verhältnissen zu benutzen. Sundell[1]) hat z. B. bei Versuchen in Helsingfors in Januar und Februar 1892 gefunden, dass neugefallener Schnee eine mittlere Dichtigkeit von 0.128 hat. Auch ohne dass Thauwetter eintrifft wird indessen der gefallene Schnee allmählich fester gepackt, so dass laut Sundell die Dichtigkeit der lockeren Schneedecke in Helsingfors im Durchschnitt von vier Messungen zwischen 28. Jan. und 11. Febr. 1892 0.198 war. Bei Thauwetter wird der Schnee noch fester gepackt und kann nach einem solchen die Dichtigkeit der festen Schneekruste bis zu etwa 0.400 steigen.

Wir machen mit Anwendung des obigen Werthes 0.2 (abgerundet) der Schneedichtigkeit und auf Grund der Menge des gefallenen Schnees vom Anfang der Schneedecke bis zum 28. (29.) Februar eine Berechnung der Schneehöhe am Ende des Februar der zwei Jahre 1892 und 93 und vergleichen hiermit die wirkliche beobachtete Höhe zu dieser Zeit.

In der ersten Columne geben wir also die Menge des gefallenen Schnees, von dem Tage wo die bestehende Schneedecke gebildet wird bis zum 28. Februar gerechnet, in den folgenden die hieraus berechnete und die in Mustiala und Heinäis wirklich beobachteten Schneehöhen. In den letzten Columnen geben wir den aus diesen Daten hervorgehenden Reductionsfactor zwischen der Menge gefallenen Schnees und der beobachteten Schneehöhe (28. Febr.), wie auch den Reciproken Werth dieses Factors, welche Zahl zugleich die Dichtigkeit des Schnees angäbe, wenn man annehmen könnte, dass die Niederschlagsmenge an den beiden Beobachtungsplätzen wirklich dieselbe wie am Regenmesser in Mustiala wäre, dass kein Schnee geschmolzen oder verdunstet und weiter dass kein Regen auf den Schnee gefallen und gefroren wäre.

---

[1]) Sundell: Snötäckets höjd i Finland vintern 1891—1892, Fennia Bd. 9 N:o 1, Ss. 88—90. 1894.

Menge des gefallenen Schnees und Schneehöhe am letzten Februar.

	Menge des gefallenen Schnees mm.	Schneehöhe berechnet mm.	Schneehöhe beobachtet mm.		Reductionsfactor (R) zwischen Menge gef. Schnees und beobachteter Schneehöhe.		1/R (Schneedichtigkeit).	
			Mustiala.	Heinäis.	Mustiala.	Heinäis.	Mustiala.	Heinäis.
1891—92	108.8	544	400	580	3.68	5.33	0.272	0.188
1892—93	84.4	422	400	560	4.74	6.63	0.211	0.151
Mittel	96.6	483	400	570	4.21	5.98	0.241	0.169

Wir finden in dieser wie überall in der vorigen Tabelle die Schneehöhe durchgehend viel grösser in Heinäis als in Mustiala. Ob dies darauf beruht, dass die Schneemenge grösser am offenen Platze im Walde zu Heinäis als auf dem Hofe in Mustiala war, oder darauf, dass der Schnee im Walde weniger gepackt war, ist schwer zu sagen. Wahrscheinlich ist, dass diese beiden Ursachen das erwähnte Resultat bewirken. Wenn nämlich die Schneemenge in Heinäis nicht grösser als in Mustiala wäre, so wäre die Schneedichtigheit recht bedeutend kleiner hier als in Mustiala, nämlich 0.169 gegen 0.241 in Mustiala. Nach meinen Wahrnehmungen ist es nun wahrscheinlich, dass die Schneedichtigkeit am ruhigen Platze im Walde kleiner ist als an offenem Felde, wo Wind und Wetter leichten Zutritt haben, aber ungewiss ist, ob der Unterschied in Schneedichtigkeit die erwähnte Grösse erreichen kann. Jedenfalls steht die Thatsache, dass die Schneehöhe am offenen Platze im Walde zu Heinäis grösser als in Mustiala ist, in guter Übereinstimmung damit, dass die Bodentemperatur im Winter hier bedeutend höher als in Mustiala ist.

Mit Benutzung oben erwähnter Resultate und mit gleichzeitiger Berücksichtigung der Temperaturverhältnisse in den verschiedenen Jahren, könnte man wohl nun eine Vorstellung von der Schneehöhe und der Beschaffenheit des Schnees in den verschiedenen Jahren erhalten. Beim Vergleich der Bodentemperatur in den verschiedenen Jahren könnte man also den Einfluss der Schneedecke auf die Bodentemperatur wahrnehmen, ebenso wie früher den Einfluss des Regens.

Viel deutlicher und sicherer kann man doch diesen Einfluss schätzen, wenn man die Bodentemperatur in Mustiala und Heinäis mit der Bodentemperatur in Pawlowsk oder St. Petersburg vergleicht, wo im Winter der Schnee von dem Beobachtungsplatze ganz weggeschafft wurde. Erstreckt man den Vergleich auch über die warme Jahreszeit, so kann man auch den Einfluss

der Gras- und Moosbedeckung des Bodens an den offenen Beobachtungsplätzen in Mustiala und Heinäis wahrnehmen, denn die flachen Sandhügel in Pawlowsk und St. Petersburg, wo die Bodentemperaturbeobachtungen geschehen, sind ganz nackt ohne jegliche Pflanzendecke. Seit dem Jahre 1890 werden Bodentemperaturbeobachtungen in Pawlowsk auch an einem Rasenplatz angestellt, von wo der Schnee nicht weggeschafft wird.

Als Vergleichszeit wählen wir die vier Jahre 1887—90, in welchen Beobachtungen an allen vier Beobachtungsplätzen in Mustiala und Heinäis gleichzeitig angestellt wurden. Wir können also auch einen genauen Vergleich aller Beobachtungsplätze in Mustiala und Heinäis unter einander anstellen, welches noch nicht geschehen ist.

Der Sandhügel in Pawlowsk, wo die Bodentemperaturbeobachtungen geschehen, ist eine kegelstumpfförmige aufgebaute Erhöhung, deren oberer Durchmesser 12, unterer 12.6 und Höhe über die Umgebung in den Jahren 1887—90 etwas über 0.5 Meter betrugen. Wir werden die Beobachtungen für die Tiefen 0.00 (Bodenoberfläche), 0.10, 0.20, 0.40, 0.80, 1.60 und 3.20 Meter, ebenso wie die Werthe der Lufttemperatur anführen.

Die Beobachtungsdata entnehmen wir den Annalen des physikalischen Centralobservatoriums zu St. Petersburg, Jahrg. 1887—90. Von den vielen gleichzeitigen Beobachtungen mit verschiedenen Instrumenten haben wir diejenigen gebraucht, welche in Leyst's mehrfach erwähnten Kritik und Behandlung der Bodentemperaturbeobachtungen in Pawlowsk bis zum Jahre 1888 als die Besten angesehen werden. Wir benutzen also in den Tiefen 0.10—0.40 Meter die Angaben der Thermometer in den horizontalen Glasröhren, nämlich Nr. 1 und 22 (successive) in 0.10 m Tiefe, Nr. 3, 23 und 26 in 0.20 und Nr. 5, 8, 23 und 27 in 0.40 m Tiefe, und in den grösseren Tiefen 0.80 und 1.6 Meter die Angaben der Thermometer in den vertikalen Thonröhren, Nr. 398 in 0.80, Nr 596 in 1.60 m Tiefe und in 3.20 m Tiefe Nr. 387 in vertikalem Glasrohre. Die Temperatur an der Bodenoberfläche geben wir nach den Angaben der Thermometer Nr. 9 und 572, welche in früher (S. 94) beschriebener Weise auf dem Boden, horizontal liegend, mit der Kugel zur Hälfte im Sande eingebettet, ausgestellt waren.

Die Lufttemperatur wird von einem in Wilds Thermometerhütte aufgestellten Thermograf Hassler angegeben. Die Bodentemperatur wurde täglich dreimal, in den Tiefen 1.60 und 3.20 Meter einmal täglich, beobachtet. Die Correctionen, welche nach den umfassenden Beobachtungen im Jahre 1888 zu

den Terminmitteln $\frac{1}{3}(7^h_a + 1^h_p + 9^h_p)$ hinzuzufügen sind, um die wahren Monatsmittel zu erhalten, lauten nach Leyst [1]).

für die Tefen	0.00	0.10	0.20	0.40	0.80 Meter.
	°	°	°	°	°
Januar	– 0.21	– 0.01	+ 0.02	+ 0.01	± 0.00
Februar	– 0.30	– 0.03	0.04	0.01	+ 0.01
März	– 0.40	+ 0.05	0.10	0.02	– 0.01
April	– 0.95	– 0.04	0.10	0.02	± 0.00
Mai	– 1.52	– 0.06	0.10	0.05	+ 0.00
Juni	– 1.51	– 0.12	0.12	0.05	– 0.02
Juli	– 1.46	– 0.13	0.09	0.06	± 0.00
August	– 1.28	– 0.02	0.11	0.07	± 0.00
September	– 0.46	+ 0.05	0.12	0.05	+ 0.01
October	– 0.30	– 0.04	0.04	0.02	± 0.00
November	– 0.16	– 0.01	0.01	0.00	± 0.00
December	– 0.11	+ 0.02	0.04	0.03	+ 0.01
Jahr	– 0.72	– 0.03	+ 0.07	+ 0.03	± 0.00

Wir werden diese Correctionen im Folgenden anwenden.

In St. Petersburg wurden in den Jahren 1887—90 Bodentemperaturbeobachtungen angestellt in den Tiefen 0.4, 0.8, 1.6 und 3.2 Meter, sowie an der Oberfläche eines flachen aufgebauten Sandhügel von 18 m Durchmesser und 1 m Höhe über die Umgebung.

Die Thermometer waren in vertikalen Glasröhren eingeschoben, welche zur gewünschten Tiefe in den Boden hineinragten. Beim Thermometer in 3.2 m Tiefe wurde jedoch im October 1888 das alte Glasrohr mit einem anderen vertauscht, welches letztere ein Umhüllungsrohr aus hartgebranntem Thon erhielt. Das Thermometer an der Erdoberfläche war mit der Kugel zur Hälfte im Sande eingebettet. Dieses und das in 0.4 m Tiefe wurde drei Mal täglich abgelesen, die in 0.8 und 1.6 m Tiefe ein Mal und das in 3.2 m Tiefe jeden zweiten Tag.

Um aus den Terminmitteln die wahren Monatsmittel zu erhalten gebrauchen wir, wie Hlasek [2]) in seiner Bearbeitung der Bodentemperaturbeobachtungen in St. Pe-

[1]) Leyst, l. c. Ss. 60, 116, 135, 146 u. 201.

[2]) Hlasek: Über die Bodentemperatur in St. Petersburg, Repert. für Météorologie Bd XIV Nr. 11, 1891.

tersburg für die Jahre 1873—1889, für die Oberfläche und die Tiefe 0.4 Meter die obenangegebenen für die Beobachtungen in Pawlowsk geltenden Correctionen. Die Beobachtungsresultate in den Tiefen 0.8, 1.6 und 3.2 Meter führen wir wie Hlasek ohne jegliche Correctionen an. Für die Lufttemperatur benutzen wir die von Wild[1]) für die sechsjährige Periode 1870—1875 gefundenen Correctionen um die Terminmittel $\frac{7^h_a + 1^h_p + 9^h_p}{3}$ auf wahre Mittel zu reduciren, nämlich für

Januar	$-0\overset{\circ}{.}01$
Februar	-0.05
März	-0.03
April	-0.12
Mai	-0.27
Juni	-0.42
Juli	-0.42
August	-0.12
September	-0.02
October	-0.03
November	-0.04
December	-0.05
Jahr	-0.13

Da die Temperaturverhältnisse in den verschiedenen Jahren 1887—90, besonders im Winter, sehr verschieden sind, und es für uns von Interesse ist die Variationen der Temperatur in nacktem Boden mit der Lufttemperatur zu verfolgen, notiren wir zuerst die Monatsmittel für die verschiedenen Jahre, und geben dann eine Zusammenstellung der mittleren Temperatur der ganzen vierjährigen Periode in Pawlowsk und St. Petersburg sowie an den verschiedenen Beobachtungsplätzen in Mustiala und Heinäis.

[1]) Wild: Die Temperaturverhältnisse des Russischen Reiches, Text Ss. 29 u. 30 und Tabelle V, S. XLVIII. 1881.

Luft- und Bodentemperatur in Pawlowsk und St. Petersburg 1887—1890.

Luft.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Pawlowsk													
1887	−5°.29	−4°.45	−4°.62	2°.50	10°.79	12°.59	16°.87	13°.64	11°.41	2°.02	−1°.66	−7°.37	3°.87
1888	−12.83	−12.89	−11.17	1.72	6.80	11.90	14.77	14.40	9.56	2.20	−2.20	−9.50	1.06
1889	−8.85	−12.14	−8.08	1.95	12.26	13.98	16.36	13.96	8.48	5.70	1.42	−5.11	3.33
1890	−6.45	−5.86	−0.28	6.08	10.16	14.31	16 64	15.82	10.53	2.77	−3.95	−7.68	4.34
Mittel	−8.36	−8.84	−6.04	3.06	10.00	13.20	16.16	14.46	10.00	3.17	−1.60	−7.42	3.15
St. Petersburg													
1887	−4.31	−3.55	−3.93	2.98	10.93	12.98	17.68	15.28	12.68	3.17	−0.54	−6.65	4.72
1888	−10.31	−12.95	−10.43	0.58	6.13	11.18	14.48	14.98	10.08	2.77	−1.84	−7.05	1.47
1889	−7.61	−11.65	−7.63	1.28	11.23	15.38	16.58	15.08	9.98	7.17	1.96	−3.65	4.01
1890	−5.71	−5.25	0.37	6.28	11.03	15.38	17.48	16.68	12.08	3.77	−3.04	−6.45	5.27
Mittel	−6.99	−8.35	−5.41	2.78	9.83	13.73	16.56	15.51	11.21	4.22	−0.87	−5.95	3.87

Bodenoberfläche.

	Jan.	Febr.	März	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Pawlowsk													
1887	−5°.75	−4°.77	−3°.46	4°.10	13°.95	16°.37	21°.03	16°.02	12°.39	2°.07	−2°.40	−6°.82	5°.23
1888	−12.36	−12.46	−9.62	4.32	10.24	16.56	18.55	16.92	10.37	2.13	−2.58	−9.10	2.75
1889	−10.35	−12.10	−6.69	3.75	16.55	20.63	19.49	14.90	8.95	5.23	0.83	−5.18	4.66
1890	−5.80	−5.76	−0.55	7.18	15.44	18.69	20.95	16.96	11.77	2.72	−3.63	−8.03	5.83
Mittel	−8.57	−8.77	−5.08	4.84	14.05	18.06	20.01	16.20	10.87	3.04	−1.95	−7.28	4.62
St. Petersburg													
1887	−4.98	−4 13	−3.37	4.56	13.27	16.50	21.84	16.94	13.22	3.17	−1.08	−6.47	5.79
1888	−11.89	−11.95	−9.42	3.66	10.78	16.19	17.91	16.74	11.44	3.06	−1.89	−8.64	3.00
1889	−8.72	−11.31	−6.57	3.19	15.11	20.15	19.85	16.48	10.51	6.68	1.15	−4.21	5.19
1890	−6.10	−5.13	−0.03	7.76	16.54	21.60	23.39	19.84	13.50	3.43	−2.74	−6.80	7.11
Mittel	−7.92	−8.13	−4 85	4.79	13.93	18.61	20.75	17.50	12.17	4.09	−1.14	−6.53	5.27

Tiefe 0.10 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Pawlowsk													
1887	–4.83	–4.30	–3.07	2.34	12.19	15.22	19.45	16.06	12.53	3.02	–0.43	–5.49	5.22
1888	–11.74	–12.32	–10.07	3.22	8.42	14.27	17.18	16.03	10.49	3.20	–1.14	–7.60	2.49
1889	–10.03	–11.83	–6.78	2.71	13.16	17.53	17.99	15.23	9.27	5.94	1.13	–3.38	4.24
1890	–4.60	–.532	–0.80	6.14	13.52	17.90	20.11	17.35	11.72	3.42	–1.26	–6.36	5.98
Mittel	–7.80	–8.44	–5.18	3.60	11.82	16.23	18.68	16.17	11.00	3.90	–0.43	–5.71	4.48

Tiefe 0.20 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Pawlowsk													
1887	–4.08	–3.92	–2.66	1.64	11.49	14.71	18.68	15.90	12.55	3.48	0.43	–4.68	5.29
1888	–10.84	–11.60	–9.72	2.48	7.49	13.18	16.40	15.56	10.55	3.52	–0.67	–7.05	2.44
1889	–9.72	–11.53	–6.65	1.96	11.79	16.77	17.47	15.11	9.31	6.44	1.34	–2.25	4.16
1890	–4.09	–5.06	–1.29	5.35	12.82	17.03	19.31	17.02	11.68	3.83	–0.21	–5.53	5.90
Mittel	–7.18	–8.03	–5.08	2.86	10.90	15.40	17.97	15.90	11.05	4.32	0.22	–4.88	4.45

Tiefe 0.40 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Pawlowsk													
1887	–2.34	–2.67	–1.88	0.48	9.36	13.31	17.11	15.51	12.62	4.69	1.89	–1.94	5.51
1888	–7.45	–8.76	–7.65	1.25	5.51	11.15	14.95	14.94	11.03	4.48	0.52	–4.10	2.99
1889	–8.05	–9.86	–5.85	0.83	9.21	15.12	16.28	14.73	9.75	7.11	1.94	–0.41	4.23
1890	–2.51	–3.80	–1.51	3.87	11.79	15.50	18.11	16.45	11.76	4.72	1.81	–3.06	6.09
Mittel	–5.09	–6.27	–4.22	1.61	9.22	13.77	16.61	15.41	11.29	5.25	1.54	–2.38	4.71
St. Petersburg													
1887	–1.85	–1.95	–1.85	1.01	9.08	14.46	19.21	17.41	13 98	5.42	2.04	–1.85	6.26
1888	–6 50	–8.24	–7.17	0.80	6.21	12 38	16.76	16.65	12.49	5.19	0.16	–3.74	3.75
1889	–6.18	–7.96	–5.02	0.62	8.64	15.23	17.66	16.39	11.36	8.18	2.18	–0.47	5.05
1890	–2.26	–3.05	–1.11	3.18	12.34	17.37	20.14	18.45	13.37	5.44	1.48	–3.47	6.76
Mittel	–4.20	–5.30	–3.79	1.40	9.07	14.86	18.44	17.23	12.80	6.06	1.47	–2.38	5.46

Tiefe 0.80 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Pawlowsk													
1887	0.48	−0.20	−0.47	0.09	5.85	11.12	14.32	14.29	12.29	6.38	3.61	1.25	5.75
1888	−1.17	−3.42	−3.75	0.08	1.47	6.95	12.08	13.15	10.91	5.78	2.11	0.63	3.74
1889	−2.86	−5.17	−3.40	0.01	3.78	11.20	13.64	13.85	10.16	7.98	3.34	1.52	4.51
1890	0.11	−1.35	−0.87	2.00	9.28	12.68	15.64	15.13	11.86	6.36	3.76	0.21	6.23
Mittel	−0.61	−2.54	−2.12	0.55	5.10	10.49	13.92	14.11	11.31	6.63	3.21	0.90	5.06
St. Petersburg													
1887	0.65	0.01	−0.35	−0.02	3.85	11.46	15.75	16.17	13.94	7.47	4.02	1.33	6.19
1888	−1.45	−4.39	−4.94	−0.41	1.11	6.44	12.60	14.49	12.37	6.83	2.28	0.66	3.80
1889	−1.75	−3.90	−3.19	−0.41	1.77	9.07	14.02	14.36	11.58	9.07	3.91	1.77	4.69
1890	0.46	−0.44	−0.43	0.14	8.20	13.84	17.34	16.99	13.50	7.38	4.14	0.30	6.71
Mittel	−0.52	−2.18	−2.23	−0.18	3.73	10.20	14.93	15.50	12.85	7.69	3.59	1.02	5.35

Tiefe 1.60 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Pawlowsk													
1887	3.31	2.32	1.66	1.48	3.66	7.76	10.35	11.90	11.38	8.70	6.31	4.29	6.09
1888	2.42	0.96	0.24	0.20	0.36	3.28	8.05	10.31	10.12	7.61	5.03	3.61	4.35
1889	1.52	0.41	−0.03	0.05	0.47	6.26	9.64	11.76	10.14	8.66	5.73	4.13	4.90
1890	2.90	1.85	1.30	1.77	6.13	9.12	11.97	12.81	11.55	8.58	6.36	3.79	6.51
Mittel	2.54	1.39	0.80	0.88	2.66	6.61	10.00	11.70	10.80	8.39	5.86	3.96	5.46
St. Petersburg													
1887	2.65	1.98	1.50	1.21	2.26	7.76	11.28	13.33	12.64	9.27	6.17	3.84	6.16
1888	2.15	0.69	−0.70	−0.35	−0.04	1.48	7.94	11.21	11.02	8.16	4.73	3.06	4.11
1889	1.50	0.51	−0.38	−0.18	0.02	3.47	9.80	11.82	10.98	9.26	5.95	4.00	4.73
1890	2.61	1.77	1.27	1.10	4.89	9.83	13.20	14.23	12.78	9.35	6.40	3.50	6.74
Mittel	2.23	1.24	0.42	0.45	1.78	5.64	10.56	12.65	11.86	9.01	5.81	3.60	5.44

Tiefe 3.20 Meter.

	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Pawlowsk													
1887	5°.75	4°.82	4°.09	3°.57	3°.48	5°.07	6°.85	8°.62	9°.40	9°.19	8°.01	6°.71	6°.30
1888	5.43	4.27	3.40	2.79	2.31	2.74	5.00	7.09	8.20	8.10	7.04	5.88	5.19
1889	4.66	3.62	2.89	2.44	2.07	3.38	5.95	8.07	8.64	8.34	7.55	6.38	5.33
1890	5.33	4.48	3.80	3.82	4.14	5.92	7.75	9.18	9.85	9.31	8.10	6.73	6.49
Mittel	5.29	4.30	3.55	3.16	3.00	4.25	6.39	8.24	9.02	8.74	7.68	6.43	5.83
St. Petersburg													
1887	5.81	5.09	4.52	4.07	3.79	4.76	6.38	8.12	9.01	8.97	7.91	6.82	6.27
1888	5.67	4.80	4.00	3.38	3.06	2.85	4.05	6.13	7.39	7.48	6.74	5.80	5.11
1889	5.00	4.30	3.71	3.28	2.99	3.02	4.78	6.57	7.63	7.68	7.25	6.33	5.21
1890	5.58	4.89	4.29	3.91	3.90	5.55	7.26	8.66	9.47	9.28	8.13	6.98	6.49
Mittel	5.52	4.80	4.13	3.66	3.44	4.05	5.62	7.37	8.38	8.35	7.51	6.48	5.77

Wir finden die Lufttemperatur und die Bodentemperatur bis zu 0.80 m Tiefe das ganze Jahr hindurch mit Ausnahme von April und Mai etwas niedriger in Pawlowsk als in St. Petersburg. Für 0.80 m Tiefe ist jedoch die Temperatur auch in März und Juni, für 0.40 m Tiefe in November höher in Pawlowsk als in St. Petersburg. Das Jahresmittel der Lufttemperatur und das der Bodentemperatur bis zu 0.40 m Tiefe sind also um etwa 0°.7 und das Mittel in 0.80 m Tiefe um 0°.29 niedriger in Pawlowsk als in St. Petersburg. In 1.60 und 3.20 m Tiefe sind die Jahresmittel in Pawlowsk und St. Petersburg, so ziemlich gleich aber die einzelnen Monatsmittel doch recht verschieden. In 1.60 m Tiefe ist die Temperatur in den Monaten Juli—October entschieden höher in St. Petersburg als in Pawlowsk, in den acht übriger Monaten niedriger. Die Jahresamplitude ist also in dieser Tiefe auffallend grösser in St. Petersburg als in Pawlowsk. In der Tiefe 3.2 Meter ist das Verhältniss umgekehrt. In den Sommermonaten Juni—Septemper ist die Temperatur niedriger, in den übrigen sechs Monaten höher in St. Petersburg als in Pawlowsk.

Wir geben jetzt die Übersicht der Temperaturverhältnisse in Mustiala, Heinäis, Pawlowsk und St. Petersburg in der vierjährige Periode 1887—1890.

Mittlere Luft- und Bodentemperatur in Mustiala, Heinäis, Pawlowsk und St. Petersburg 1887—1890.

Ort und Tiefe.	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
Mustiala.													
Luft.	° −5.12	° −7.33	° −5.51	° 2.25	° 10.47	° 13.73	° 15.58	° 13.80	° 9.75	° 3.23	° −0.89	° −4.85	° 3.77
Grasbewachsenes Sandfeld.													
Tiefe 0.15 Meter.	−1.02	−2.40	−2.05	0.80	7.52	13.61	16.29	15 29	10.97	4.74	1.77	−0.57	5.41
„ 0.30 „	0.39	−0.47	−0.47	0.64	5.80	12.42	15.02	14.93	11.47	5.94	3.15	1.31	5.84
„ 0.50 „	0.91	0.44	0.09	0.45	3.67	11.24	13.98	14.19	11.42	6.32	3.24	1.48	5.65
„ 1.00 „	1.70	1.18	0.79	0.60	2.24	8.46	11.52	12.59	11.12	7.40	4.22	2.45	5.38
„ 2.00 „	3.61	2.93	2.42	1.99	2.13	5.04	7.96	9.46	10.07	8.68	6.32	4.64	5.47
Heinäis.													
Offener Platz im Walde.													
Tiefe 0.50 Meter.	1.58	1.22	0.95	1.07	4.13	10.38	12.56	12.81	10.68	6.47	3.67	2.10	5.66
„ 1.00 „	2.30	1.81	1.44	1.31	2.92	7.45	9.99	10.96	10.03	7.33	4.71	3.09	5.30
„ 2.00 „	3.55	2.89	2.43	2.17	2.57	4.73	7.02	8.50	8.67	7.65	5.83	4.34	5.02
Fichtenhochwald.													
Tiefe 0 50 Meter	1.07	0.62	0.25	0.37	0.95	4.55	8.50	9.75	8.68	5.59	3.25	1.63	3.79
„ 1.00 „	1.97	1.40	1.04	0.89	1.08	3.28	6.50	8.08	7.87	6.10	4.15	2.72	3.77
„ 2.00 „	3.08	2.38	1.95	1.67	1.56	2.33	4.26	5.80	6.44	5.94	4.85	3.79	3.68
Birkenwald.													
Tiefe 0.50 Meter	0.97	0.35	−0.20	0.29	2.26	7.45	10.20	10.88	9.35	5.62	3.04	1.62	4.34
„ 1.00 „	2.04	1.50	1.00	0.83	1.84	4.92	7.44	8.71	8.35	6.30	4.29	2.89	4.19
„ 2.00 „	3.54	2.93	2.55	2.19	2.29	3.88	5.65	6.98	7.49	6.83	5.62	4.43	4 53
Pawlowsk.													
Luft	−8.36	−8.84	−6.04	3.06	10.00	13.20	16.16	14.46	10.00	3.17	−1.60	−7.42	3.15
Sandhügel.													
Tiefe 0.00 Meter	−8.57	−8.77	−5.08	4.84	14.05	18.06	20.01	16.20	10.87	3.04	−1.95	−7.28	4.62
„ 0.10 „	−7.77	−8.44	−5.18	3.60	11.82	16.23	18.68	16.17	11.00	3.90	−0.43	−5,71	4.48
„ 0.20 „	−7.18	−8.03	−5.08	2.86	10.90	15.40	17.97	15.90	11.05	4.32	0.22	−4.88	4.42
„ 0.40 „	−5.09	−6.27	−4.22	1.61	9.22	13.77	16.61	15.41	11.29	5.25	1.54	−2.38	4.72
„ 0.80 „	−0.61	−2.54	−2.12	0.55	5.10	10.49	13.92	14.11	11.31	6.63	3.21	0.90	5.06
„ 1.60 „	2.54	1.39	0.80	0.88	2.66	6.61	10.00	11.70	10.80	8.39	5.86	3.96	5.46
„ 3.20 „	5.29	4.30	3.55	3.16	3.00	4.25	6.39	8.24	9.02	8.74	7.68	6.43	5.83

Ort und Tiefe.	Jan.	Febr.	März.	April.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr.
St. Petersburg.													
Luft	–6.99	–8.35	–5.41	2.78	9.83	13.73	16.56	15.51	11.21	4.22	–0.87	–5.95	3.87
Sandhügel.													
Tiefe 0.00 Meter	–7.92	–8.13	–4.85	4.79	13.93	18.61	20.75	17.50	12.17	4.09	–1.14	–6.53	5.27
„ 0.40 „	–4.20	–5.30	–3.79	1.40	9.07	14.86	18.44	17.23	12.80	6.06	1.47	–2.38	5.46
„ 0.80 „	–0.52	–2.18	–2.23	–0.18	3.73	10.20	14.93	15.50	12.85	7.69	3.59	1.02	5.35
„ 1.60 „	2.23	1.24	0.42	0.45	1.78	5.64	10.56	12.65	11.86	9.01	5.81	3.60	5.44
„ 3.20 „	5.52	4.80	4.13	3.66	3.44	4.05	5.62	7.37	8.38	8.35	7.51	6.48	5.77

Wir finden aus diesen Tabellen, wie zu erwarten war, einen schlagenden Unterschied zwischen dem nackten im Winter von Schnee befreiten Sandboden in Pawlowsk und St. Petersburg und den Beobachtungsplätzen in Mustiala und Heinäis. Im Sommer ist die Temperatur in den oberen Erdschichten in Pawlowsk und St. Petersburg viel wärmer, im Winter bedeutend kälter als in Mustiala und Heinäis, während der Unterschied in der Lufttemperatur, welcher wohl in derselben Richtung geht, bedeutend kleiner ist.

Wir wollen besonders die Verhältnisse in Pawlowsk und St. Petersburg mit den am offenen Felde in Mustiala vergleichen, weil diese am besten mit jenen vergleichbar sind, während in Heinäis der Einfluss des Waldes hinzukommt.

Die mittlere Temperatur des Februar geht also in Pawlowsk in der Tiefe 0.20 meter (Beobachtungen von St. Petersburg in dieser Tiefe fehlen) bis auf

$$-8^{0}.03$$

in einzelnen Jahren (1888 und 1889) bis auf

$$-11^{0}.60 \text{ und } -11^{0}.53$$

herab, während die entsprechende mittlere Temperatur in Mustiala in den Tiefen 0.15 und 0.30 Meter etwa

$$-2^{0}.40 \text{ und } -0^{0}.50$$

ist. Noch in 0.80 Meter Tiefe ist in Pawlowsk und St. Petersburg die mittlere Temperatur in Februar und März mehr als 2° unter Null und sinkt in einzelnen Jahren bis auf

$$-5^{0}$$

herab. Der Boden friert auch in St. Petersburg recht oft, in Pawlowsk jeweilen, bis in die Tiefe 1.60 Meter, während in Mustiala das Monatsmittel schon in der Tiefe 0.50 Meter in der Regel nicht unter Null geht. Nur im Jahre 1889 ist das Monatsmittel im Februar und im März bis auf

$$-0^{0}.07 \text{ und } -0^{0}.24$$

gesunken.

Die mittlere Lufttemperatur in Februar und März ist in Pawlowsk

$$-8^{0}.84 \text{ und } -6^{0}.04,$$

in St. Petersburg

$$-8^{0}.35 \text{ und } -5^{0}.41,$$

in Mustiala

$$-7^{0}.33 \text{ und } -5^{0}.51.$$

Die Ursache der hohen Bodentemperatur im Winter in Mustiala, in Vergleich mit der im schneefreien Boden in Pawlowsk und St. Petersburg ist natürlich die Schneedecke.

Man kann auch den grossen Einfluss der Schneedecke ersehen, wenn man die Bodentemperaturen der verschiedenen Jahre unter einander vergleicht. In Pawlowsk wechselt die Bodentemperatur rasch von einem Winter zu einem anderen, in sehr enger Beziehung zu der Lufttemperatur, während in Mustiala, unter der Schneedecke, die Bodentemperatur eigenthümlich constant von einem Jahre zum anderen bleibt.

Die Schneedecke hat also im Winter einen sehr grossen, erhöhenden Einfluss auf die Bodentemperatur. Dagegen verzögert sie ein wenig das Aufthauen der obersten Schichten im Frühling, wie am besten aus grafischer Darstellung der Resultate hervorgeht.

Wir haben auf Pl. I die Beobachtungsresultate von Mustiala und Heinäis für die vierjährige Periode 1887—90 dargelegt und auf Pl. II die Beobachtungsresultate von Pawlowsk für dieselbe Periode nebst denen von Mustiala am offenen Felde.

Hierfür haben wir aus den soeben angegebenen mittleren Monatsmitteln die Temperaturwerthe der mittleren Tage der Monate abgeleitet. Wir haben hierbei der Kleiber'schen Methode [1]) gefolgt, welche am kürzesten ungefähr in folgender Weise beschrieben worden ist.

Um aus dem Mittelwerth eines Monats denjenigen Werth abzuleiten, welcher der Mitte des Monats entspricht, muss man ein Zwölftel von der Dif-

---

[1]) Kleiber, Repert. für Meteorologie Bd XIII, Kleinere Mittheilungen 1, 1890.

ferenz, welche dieses Monatsmittel gegen den Durchschnittswerth aus den beiden benachbarten Monaten zeigt, an das Monatsmittel anbringen, und zwar in der Richtung, dass der zu findende Werth weiter von diesem Durchschnitt abweicht, als das Monatsmittel.

Die Correctionen, welche also zu den Monatsmitteln hinzuzufügen sind um die Temperaturen der mittleren Tage der Monate zu erhalten sind im Allgemeinen sehr klein. Von Belang sind sie nur für die Zeiten in welchen die Temperaturcurven eine stärkere Kürbung zeigen, wie z. B. zur Zeit des Jahresmaximum oder des Aufthauens des Bodens nach dem Minimum. Die grössten Correctionen in Mustiala finden wir in der Tiefe 0.30 Meter, nämlich

für April $-0^{0}.17$ und

für Juni $+0^{0}.17$

und in Heinais in 0.50 m Tiefe des offenen Platzes, wo die Correction in Juni auch bis zu

$$+0^{0}.17$$

steigt. In den grösseren Tiefen sind die Correctionen bedeutend kleiner. Etwas grösser als in Mustiala und Heinäis sind diese Correctionen in Pawlowsk. An der Bodenoberfläche und in den Tiefen 0.10 und 0.20 Meter steigen sie in März und Juli über

$$0^{0}.20,$$

bis zur

$$-0^{0}.26$$

an der Oberfläche im März. In den grösseren Tiefen sind sie auch hier immer kleiner.

Beim Ausrechnen und Anbringen aller diesen Correctionen, erhalten wir folgende Werthe für die Temperaturen der mittleren Tage der Monate.

Temperatur der mittleren Tage der Monate in der Periode 1887—1890.

Ort und Tiefe.	Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
Mustiala.												
Luft	−5.04	−7.50	−5.76	2.23	10.68	13.79	15.73	13.89	9.85	3.13	−0.90	−5.00
Grasbew. Sandfeld.												
Tiefe 0.15 Meter	−0.98	−2.47	−2.15	0.64	7.55	13.75	16.44	15.43	11.05	4.60	1.77	−0.65
„ 0.30 „	0.39	−0.51	−0.52	0.47	5.74	12.59	15.13	15.07	11.56	5.83	3.11	1.27
„ 0.50 „	0.91	0.44	0.06	0.33	3.49	11.44	14.08	14.31	11.52	6.24	3.20	1.43
„ 1.00 „	1.69	1.18	0.78	0.53	2.05	8.59	11.60	12.70	11.21	7.38	4.16	2.41
„ 2.00 „	3.60	2.92	2.42	1.97	2.06	5.04	8.02	9.50	10.15	8.72	6.29	4.61
Heinäis.												
Offener Platz.												
Tiefe 0.50 Meter	1.57	1.22	0.93	0.95	4.00	10.55	12.64	12.91	10.77	6.41	3.62	2.06
„ 1.00 „	2.29	1.81	1.43	1.24	2.80	7.53	10.06	11.04	10.10	7.33	4.67	3.06
„ 2.00 „	3.54	2.88	2.42	2.14	2.50	4.72	7.05	8.55	8.72	7.68	5.82	4.31
Fichtenhochwald.												
Tiefe 0.50 Meter	1.07	0.62	0.23	0.35	0.82	4.54	8.62	9.85	8.76	5.56	3.22	1.59
„ 1.00 „	1.96	1.39	1.03	0.88	1.00	3.24	6.57	8.15	7.93	6.11	4.13	2.69
„ 2.00 „	3.08	2.37	1.94	1.66	1.52	2.28	4.28	5.84	6.49	5.96	4.85	3.78
Birkenwald.												
Tiefe 0.50 Meter	0.97	0.35	−0.24	0.23	2.13	7.55	10.29	10.97	9.44	5.57	2.99	1.59
„ 1.00 „	2.03	1.50	0.99	0.78	1.75	4.94	7.49	8.78	8.42	6.30	4.26	2.87
„ 2.00 „	3.53	2.92	2.55	2.17	2.23	3.87	5.67	7.01	7.54	6.85	5.62	4.42
Pawlowsk.												
Luft	−8.38	−8.98	−6.28	3.17	10.15	13.21	16.35	14.58	10.10	3.08	−1.56	−7.62
Sandhügel.												
Tiefe 0.00 Meter	−8.62	−8.93	−5.34	4.87	14.27	18.15	20.25	16.26	10.97	2.92	−1.94	−7.45
„ 0.10 „	−7.83	−8.60	−5.42	3.63	11.98	16.31	18.89	16.28	11.07	3.79	−0.39	−5.82
„ 0.20 „	−7.24	−8.19	−5.29	2.86	11.05	15.48	18.17	16.02	11.12	4.25	0.26	−5.00
„ 0.40 „	−5.15	−6.40	−4.38	1.54	9.35	13.84	16.78	15.53	11.37	5.15	1.55	−2.43
„ 0.80 „	−0.59	−2.64	−2.21	0.47	5.06	10.57	14.05	14.23	11.39	6.58	3.16	0.87
„ 1.60 „	2.53	1.37	0.77	0.81	2.57	6.63	10.07	11.81	10.86	8.39	5.83	3.94
„ 3.20 „	5.28	4.29	3.53	3.15	2.94	4.21	6.40	8.28	9.06	8.77	7.69	6.43

Die Curven auf Pl. I zeigen wie in der kalten Jahreszeit, von der Mitte November bis zum Ende April, die Bodentemperatur an den verschiedenen Beobachtungsplätzen in Mustiala und Heinäis auffallend gleiche Werthe hat. Die Differenzen zwischen den Temperaturen gleicher Tiefen an den vier verschiedenen Plätzen sind meistens kleiner als 1°. Ferner ersehen wir, wie vom Anfang October bis zum Ende April auch die Differenzen zwischen den Temperaturen der verschiedenen Tiefen 0.5 bis 2.0 Meter klein sind.

In der warmen Jahreszeit dagegen von Ende Mai bis Mitte September sind die Differenzen sowohl zwischen den verschiedenen Plätzen als auch zwichen den verschiedenen Tiefen desselben Platzes viel erheblicher.

Die Curven auf Pl. II wiederum zeigen, dass in Pawlowsk die Temperaturdifferenzen zwischen den verschiedenen Tiefen im Winter ganz ebenso gross wie im Sommer sind. Dies beruht vor Allem auf der Fortschaffung des Schnees vom Beobachtungsplatze, wodurch die obersten Bodenlager stark abgekühlt werden. Mit Berücksichtigung dieser Beobachtungen in Pawlowsk können wir also, wie früher hervorgehoben, den schützenden Einfluss der Schneedecke in Mustiala und Heinäis gut wahrnehmen. Sicherlich ist auch die Schneedecke zum grossen Teile die Ursache dessen, dass die Bodentemperaturen im Winter nicht nur in verschiedenen Tiefen sondern auch an den verschiedenen Beobachtungsplätzen in Mustiala und Heinäis sich einander nähern, obgleich wohl anzunehmen ist, dass auch ohne Schneebedeckung die Temperaturungleichheiten zwischen den verschiedenen Plätzen etwas kleiner im Winter als im Sommer wären.

Durch die Eisbildung im Boden wird nämlich die Wärmeleitungsfähigkeit desselben vergrössert und die Werthe der Leitungsfähigkeit der verschiedenen Bodenarten werden sich hierbei wahrscheinlich einandern nähern. Da weiter die Verdunstung im Winter sehr klein ist, werden auch die grossen Differenzen, welche in der warmen Jahreszeit zwischen den Verdunstungsgrössen an verschiedenen Lokalen vorkommen, zum Winter wegfallen. Auch die Insolation und folglich die Verschiedenheit der Beschattung des Bodens im Walde und an offenem Felde sind klein im Winter.

Die Ausstrahlung ist dagegen von hervorragender Bedeutung. Infolge des Schutzes der Bäume gegen die Ausstrahlung von der Bodenoberfläche muss man nun annehmen, dass wenn der Boden schneefrei wäre, die oberen Schichten desselben wärmer im Walde als auf offenem Felde wären. Wenn wiederum der Boden mit Schnee bedeckt ist, muss die Temperatur dieser Decke oder wenigstens der obersten Lager derselben höher im Walde als auf offenem Felde sein. Hamberg hat ja auch gefunden, wie früher erwähnt, dass im Winter

die Lufttemperatur im Walde etwa 0.2 höher ist als auf offenen Feldern. Bis zum Boden unter der Schneedecke macht sich jedoch der Einfluss der verschiedenen Ausstrahlung nur wenig geltend und die Bodentemperatur bleibt demnach den ganzen Winter hindurch ziemlich gleich an den verschiedenen Plätzen, wie sie im November, beim Auftreten der Schneedecke, war.

Die grafische Darstellung der Beobachtungsergebnisse von Mustiala und Pawlowsk zeigt uns nun auch, wie auf Seite 149 behauptet wurde, dass die Schneedecke, welche im Winter die Abkühlung des Bodens in erheblichem Grade hindert, im Frühling wiederum das Aufthauen des Bodens etwas verzögert.

Dass die Schneedecke, an und für sich betrachtet, eine solche Verzögerung des Aufthauens des Bodens verursachen muss, ist selbstverständlich, da zum Schmelzen des Schnees viel Wärme erforderlich ist, aber, wir haben gesehen dass je dicker die Schneedecke ist, desto geringer ist die Eisbildung im Boden. Nun könnte man sich denken, dass in 1 à 2 m Tiefe die Erwärmung des Bodens ungefähr in derselben Weise geschähe und zu derselben Zeit begönne, entweder das ganze überliegende Bodenlager gefroren und stark abgekühlt, oder nur die oberste Schicht gefroren, aber von einer Schneedecke bedeckt wäre. Beim Vergleich der Beobachtungen im schneefreien Boden in Pawlowsk mit denselben im schneebedeckten Boden in Mustiala ergiebt sich nun ganz gewiss, dass die Schneedecke jedenfalls eine Verzögerung des Aufthauens oder der Erwärmung des Bodens, nicht nur in den obersten Schichten sondern auch in 1 und 2 m Tiefe, verursacht.

Die Verhältnisse der warmen Jahreszeit ins Auge fassend finden wir eine entschieden erheblichere Erwärmung des Bodens in Pawlowsk als in Mustiala, obgleich die Lufttemperatur zu dieser Zeit an den beiden Orten ziemlich gleich ist.

Vom Anfang oder von der Mitte Mai bis zur Mitte Juni wird der Boden in Mustiala in den Tiefen 0.15—0.10 Meter ebenso schnell erwärmt wie in Pawlowsk während dieser Zeit, aber von Mitte Juni bis Ende Juli ist in Mustiala die Erwärmung ziemlich klein, während sie in Pawlowsk noch recht rasch vor sich geht.

Weiter ersehen wir wie in Pawlowsk schon vom Anfang Juni an die Bodentemperatur bis zu 0.40 m Tiefe höher als die Lufttemperatur, von der Oberfläche bis zu 0.20 m Tiefe sogar 2^0 bis 5^0 höher als diese ist. In Mustiala ist von der Mitte Juni bis zum Ende Juli, wenn die von uns angewandten Correctionen für die Tiefen 0.15 und 0.30 Meter nicht allzu unrichtig sind, nur das oberste Bodenlager bis zu 0.15 m Tiefe ein wenig wärmer als die

Luft. Vom Ende Juli dagegen erscheinen sowohl in Mustiala als in Pawlowsk, weil die Lufttemperatur schneller als die Bodentemperatur sinkt, immer tiefere und tiefere Bodenlager wärmer als die Luft, bis am Ende September der Boden in jeder Tiefe wärmer als die Luft ist.

Die geringere Erwärmung des Bodens im Sommer in Mustiala als in Pawlowsk beruht gewiss vor Allem darauf, dass in Pawlowsk der Sandhügel ganz nackt war, während in Mustiala das Feld mit Timothéegras bewachsen war. Diese Pflanzendecke beschattet den Boden, während in Pawlowsk der Sand von den Sonnenstrahlen direct getroffen und erhitzt wird. Eine grössere Erwärmung der Grasdecke wiederum wird durch die bedeutende Verdunstung, welche von den Pflanzen vor sich geht, verhindert.

Wärmeleitungsvermögen des Bodens.

Wir wollen jetzt eine Zusammenstellung der Jahresextreme sowie der Amplituden und der Eintrittszeiten der Extreme in den verschiedenen Tiefen in Mustiala, Heinäis, Pawlowsk und St. Petersburg machen; geben aber zuerst die Jahresextreme, die Amplituden und die Eintrittszeiten der Extreme in Pawlowsk und St. Petersburg für jedes der vier in Frage stehenden Jahre für sich.

Hierbei ist zu beachten, dass die Pawlowsker Beobachtungen mit den Thermometern in Thon- und Glasröhren in 0.40 bis 3.20 m Tiefe, von welchen Beobachtungen wir die Monatsmittel angewandt haben, in den Annalen des Phys. Centralobservatoriums erst von Juni 1889 an in extenso publicirt sind. Die Minima für 1888—89 und die Maxima für 1887 und 1888 haben wir also für diese Tiefen anderen Thermometern entnehmen müssen, nämlich für 0.40 m Tiefe aus N:o 9 in horizontalem Glasrohr, für 0.80 m Tiefe aus N:o 490 in verticalem Glasrohr, für 1.60 m Tiefe aus N:o 491 in verticalem Glasrohr und für 3.2 m Tiefe aus N:o 446 ebenfalls in verticalem Glasrohr. In den folgenden Jahren, wo die Angaben sowohl dieser Thermometer als auch derjenigen, für welche unsere Monatsmittel gelten, in extenso gegeben sind, zeigt sich jedoch, dass die Differenzen zwischen den Angaben der beiden Thermometersätze im allgemeinen sehr klein sind. In 0.4 m Tiefe ist die Differenz doch mehr schwankend und kann bisweilen bis nahe 1^0 steigen. In 1.6 m

Tiefe wiederum zeigt das Thermometer im Glasrohr constant eine etwa $0^{0}.2$ à $0^{0}.3$ höhere Temperatur im Winter an als das im Thonrohr. Hieraus erklärt sich auch, dass die im Folgenden angegebenen Minima des Thermometers im Glasrohr in 1.60 m Tiefe in den Jahren 1887—89 durchweg ein wenig höher sind als die entsprechenden Monatsmittel (April und März) des Thermometers im Thonrohr. Die Monatsmittel der beiden Thermometer für die Monate, in welchen das Minimum eintritt, und die Minima des Thermometers im Glasrohr lauten:

		Monatsmittel		Minimum
		N:o 596 im Thonrohr.	N:o 491 im Glasrohr.	N:o 491 im Glasrohr.
1887	April	1°.48	1°.63	1°.60
1888	April	0.20	0.37	0.30
1889	März	−0.03	0.25	0.20

Wir haben in den folgenden Tabellen für jede Tiefe die höchste und niedrigste tägliche Mitteltemperatur, nicht die Extreme der einzelnen Beobachtungen angegeben. Für die grösseren Tiefen kommt dieses und jenes Verfahren auf eins aus. Für die kleineren Tiefen, von der Oberfläche bis 0.4 Meter, nehmen wir die extremen Mittel der drei Beobachtungen 7^{h}_{a}, 1^{h}_{p}, und 9^{h}_{p}. Für die Oberfläche, und in St. Petersburg auch für die Lufttemperatur, welche hier aus nur drei Beobachtungen bestimmt wird, fügen wir noch zu den erhaltenen Maxima und Minima dieselben auf Seite 141 und 142 angeführten Correctionen, welche zu den Terminmitteln der Monate, in welchen die Extremen auftreten, hinzuzufügen sind um das wahre Monatsmittel zu erhalten.

Jahresminima und Maxima in Pawlowsk und St. Petersburg 1887—1890.

Pawlowsk.	Minimum. Luft.	Minimum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.00	0.10	0.20	0.40	0.80	1.60	3.20	Maximum. Luft.	Maximum. Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.00	0.10	0.20	0.40	0 80	1.60	3.20
1887	−23°.88	−23°.48	−17°.93	−14°.13	−8°.67	−1°.30	1°.60	3°.20	22°.79	30°.82	25°.73	23°.83	21°.43	17°.00	12°.20	9°.60
1888	−28.17	−25.08	−23.90	−21.73	−15.83	−6.30	0.30	2.20	20.10	23 51	19.77	18 73	17.17	14.20	10.40	8.50
1889	−26.55	−24.94	−22.77	−21.70	−16.07	−6.50	0.20	1.90	22.87	29.47	21.60	20.47	18.63	15.33	13.60	8.70
1890	−18.26	−18.24	−12.27	−10.70	−6.23	−2.87	1.20	3.20	20.98	26.94	23.30	21.80	20 27	16.90	13.20	9.90
Mittel	−24.22	−22.94	−19.22	−17.07	−11.70	−4.24	0.83	2.63	21.69	27.69	22.60	21.21	19.38	15.85	12.35	9.18
St. P:-burg.																
1887	−19.61	−19.51	—	—	−7.17	−0.8	1.1	3.7	24.98	30.51	—	—	22.90	18.6	13.8	9.2
1888	−25.41	−24.48	—	—	−13.33	−7.4	−1.3	2.8	19.98	23.97	—	—	19.70	15.5	11.6	7.6
1889	−22.25	−22.81	—	—	−12.80	−5.0	−0.6	2.8	23.53	28.31	—	—	20.13	15.8	12.0	7.8
1890	−17.51	−15.91	—	—	−6.00	−1.1	1.0	3.6	21.38	29.64	—	—	22.23	18.5	14.4	9.9
Mittel	−21.20	−20.68	—	—	−9.83	−3.58	0.05	3.25	22.47	28.11	—	—	21.24	17.10	12.95	8.63

Jahresamplituden (Maximum — Minimum).

Pawlowsk.	Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter. 0.00	0.10	0.20	0.40	0.80	1.60	3.20
1887	46°.67	54°.30	43°.66	37°.96	30°.10	18°.30	10°.60	6°.40
1888	48.27	48.59	43.67	40.46	33.00	20.50	10.10	6.30
1889	49.42	54.41	44.37	42.17	34.70	21.83	13.40	6.80
1890	39.24	45.18	35.57	32.50	26.50	19.77	12.00	6.70
Mittel	45.91	50.63	41.82	38.28	31.08	20.09	11.52	6.55
St. P:burg.								
1887	44.59	50.02	—	—	30.07	19.40	12.70	5.50
1888	45.39	48.45	—	—	33.03	22.90	12.90	4.80
1889	45.78	51.12	—	—	32.93	20.80	12.60	5.00
1890	38.89	45.55	—	—	28.23	19.60	13.40	6.30
Mittel	43.67	48.79	—	—	31.07	20.68	12.90	5.38

Eintrittszeiten der Minima und Maxima.

Pawlowsk.	Minimum.							
	Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.						
		0.00	0.10	0.20	0.40	0.80	1.60	3.20
1887	19 Jan.	19 Jan.	19 Jan.	20 Jan.	20 Jan.	19 März	22 April	9 Mai
1888	29 Jan.	29 Jan.	29 Jan.	29 Jan.	30 Jan.	15 März	18 April	1 Juni
1889	24 Dec.	26 Dec.	26 Dec.	26 Dec.	26 Dec.	9 Febr.	24 März	28 Mai
1890	8 Dec.	8 Dec.	25 Jan.	25 Jan.	25 Jan.	4 März	11 April	27 April
Mittel	4 Jan.	5 Jan.	17 Jan.	17 Jan.	18 Jan.	5 März	11 April	17 Mai
St. Petersburg								
1887	19 Jan.	19 Jan.	—	—	20 Jan.	19 März	2 Mai	20 Mai
1888	29 Jan.	28 Jan.	—	—	29 Jan.	15 März	21 März	15 Juni
1889	26 Dec.	26 Dec.	—	—	26 Dec.	14 Febr.	21 März	2 Juni
1890	25 Jan.	8 Dec.	—	—	21 Jan.	4 Febr.	27 April	8 Mai
Mittel	17 Jan.	5 Jan.	—	—	16 Jan.	27 Febr.	10 April	27 Mai

Pawlowsk.	Maximum.							
	Luft.	Tiefe unter der Oberfläche in Meter.						
		0.00	0.10	0.20	0.40	0.80	1.60	3.20
1887	18 Juli	18 Juli	18 Juli	18 Juli	19 Juli	3 Aug.	7 Aug	26 Sept.
1888	4 Aug.	19 Juli	19 Juli	1 Aug.	2 Aug.	6 Aug.	9 Sept.	22 Sept.
1889	29 Mai	6 Juli	29 Juli	7 Juli	18 Juli	10 Aug.	10 Aug.	17 Sept.
1890	7 Juli	16 Juli	16 Juli	17 Juli	19 Juli	19 Juli	20 Aug.	16 Sept.
Mittel	7 Juli	15 Juli	20 Juli	18 Juli	22 Juli	2 Aug.	19 Aug.	20 Sept.
St. Petersburg.								
1887	18 Juli	18 Juli	—	—	2 Aug.	3 Aug.	9 Aug.	3 Oct.
1888	4 Aug.	24 Juli	—	—	1 Aug.	2 Aug.	10 Aug.	1 Oct.
1889	28 Mai	31 Mai	—	—	7 Juli	1 Aug.	16 Aug.	27 Sept.
1890	16 Juli	16 Juli	—	—	19 Juli	19 Juli	18 Aug.	19 Sept.
Mittel	9 Juli	7 Juli	—	—	22 Juli	29 Juli	13 Aug.	27 Sept.

Auch hier wie in Betreff der Monatsmittel finden wir recht erhebliche Unterschiede zwischen den Beobachtungen in St. Petersburg und denen in Pawlowsk. Die Minima sowohl der Lufttemperatur als im Boden sind entschieden niedriger in Pawlowsk als in St. Petersburg, mit Ausnahme für die Tiefe 1.60 Meter, in welcher das mittlere Minimum in St. Petersburg $0^0.05$ um $0^0.78$ niedriger als in Pawlowsk ist. Die Maxima sind auch durchgehend ein wenig niedriger in Pawlowsk als in St. Petersburg mit Ausnahme für die Tiefe 3.20 Meter, wo das Verhältniss entgegengesetzt ist. In der Luft und an der Bodenoberfläche ist also die Amplitude ein wenig grösser in Pawlowsk als in St. Petersburg, nimmt aber in Pawlowsk schneller ab nach unten, so dass sie in 0.40 m Tiefe gleich, in 0.80 m ein wenig und in 1.60 m recht viel kleiner als in St. Petersburg ist. In 3.20 m Tiefe ist sie jedoch wieder auffallend grösser in Pawlowsk als in St. Petersburg. Dies deutet darauf hin, dass von der Oberfläche bis zu 1.60 m Tiefe die Wärmeleitungsfähigkeit des Bodens in Pawlowsk, wo die Amplituden schneller nach unten abnehmen, kleiner ist als in St. Petersburg, zwischen den Tiefen 1.60 und 3.20 Meter dagegen grösser in Pawlowsk als in St. Petersburg.

Die verschiedene Verspätung der Extremwerthe, besonders die des Maximums, in Pawlowsk und St. Petersburg steht in guter Übereinstimmung mit dem obenerwähnten ungleichen Abnehmen der Amplituden nach unten an diesen Orten. Von der Oberfläche bis zu den Tiefen 0.80 und 1.60 Meter geht die Fortpflanzung der Extremen ein wenig langsamer vor sich in Pawlowsk als in St. Petersburg, von da bis zu 3.2 m Tiefe entschieden schneller, welches, wie die ungleiche Amplitudenabnahme nach unten, auf eine bessere Wärmeleitung in St. Petersburg in den oberen, in Pawlowsk in den unteren Schichten deutet. Dass an der Oberfläche der mittlere Termin des Maximums acht Tage später (den 15. Juli) in Pawlowsk auftritt als in St. Petersburg ist hierbei von keiner Bedeutung. Die Jahresvariation 1889 hat nämlich an beiden Plätzen zwei Maxima, den 31. Mai und 6. Juli. Diese sind, wenn die früher besprochenen Correctionen für die betreffenden Monate angebracht werden,

	31 Mai	6 Juli
in Pawlowsk	$28^\circ.98$	$29^\circ.47$
in St. Petersburg	28.31	27.17

In Pawlowsk ist nun das spätere Maximum ein wenig grösser, in St. Petersburg das frühere. Für die Wärmeverhältnisse im Boden ist dieser Unterschied an der Oberfläche von keiner Bedeutung.

Wir geben jetzt eine Zusammenstellung der mittleren Maxima und Minima, der mittleren Eintrittszeiten derselben, sowie der Jahresamplituden in Mustiala, Heinäis, St. Petersburg und Pawlowsk für die vierjährige Periode 1887—1890. Um eine Vorstellung der Werthe der Maxima und Minima dieser Periode auch in 0.15 und 0.30 m Tiefe in Mustiala zu erhalten habe ich zu den niedrigsten und höchsten von den früher (S. 147) gefundenen Monatsmitteln dieser Periode die mittleren Differenzen

$$-2^0.65, \qquad -1^0.01, \qquad +3^0.17 \qquad \text{und} \qquad +2^0.63$$

zwischen den beobachteten Minima und Maxima einerseits und den niedrigsten und höchsten Monatsmitteln andererseits der Periode 1885—87 hinzugefügt und die so erhaltenen Zahlen als die gesuchten Werthe angeführt. In Betreff der Eintrittszeiten habe ich, auf Grund der beobachteten Verhältnisse in der Periode 1885—87, durch gewöhnliche lineare Interpolation zwischen den Eintrittszeiten der Extreme der Lufttemperatur und der Temperatur in 0.50 m Tiefe während der Periode 1887—1890 die Eintrittszeiten der Extreme in 0.15 und 0.30 m Tiefe in Mustiala in dieser Periode zu bestimmen versucht. Diese letzten Zahlen sind jedoch natürlicherweise sehr unzuverlässig. Ich habe auch dieselben im Folgenden nicht weiter benutzt.

Die kleingedruckten Zahlen zwischen den angegebenen Zeitbestimmungen der Eintritte der Extreme geben die Zeiten in Tagen an, welche zwischen den Eintrittszeiten der Extreme an den verschiedenen, auf einander folgenden Tiefen verfliessen.

Mittlere Jahresminima und Maxima der Periode 1887—1890.

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	Minimum.						Maximum.					
	Pawlosk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis.			Pawlowsk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis.		
				Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.				Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
Luft	−24.22	−21.20	−18.80	—	—	—	21.12	22.47	21.47	—	—	—
0.00	−22.94	−20.68	—	—	—	—	27.69	28.11	—	—	—	—
0.10	−19.22	—	—	—	—	—	22.60	—	—	—	—	—
0.15	—	—	−5.05	—	—	—	—	—	19.46	—	—	—
0.20	−17.07	—	—	—	—	—	21.21	—	—	—	—	—
0.30	—	—	−1.48	—	—	—	—	—	17.65	—	—	—
0.40	−11.70	−9.83	—	—	—	—	19.38	21.24	—	—	—	—
0.50	—	—	−0.32	0.78	0.00	−0.72	—	—	15.35	13.73	10.38	11.63
0.80	−4.24	−3.58	—	—	—	—	15.85	17.10	—	—	—	—
1.00	—	—	0.55	1.15	0.78	0.68	—	—	12.95	11.23	8.58	9.20
1.60	0.83	0.05	—	—	—	—	12.35	12.95	—	—	—	—
2.00	—	—	1.68	2.00	1.35	1.83	—	—	10.25	9.03	6.68	7.90
3.20	2.63	3.25	—	—	—	—	9.18	8.63	—	—	—	—

Mittlere Jahresamplituden.

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	Pawlowsk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis.		
				Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
Luft	45°.91	43°.67	40°.27	—	—	—
0.00	50.63	48.79	—	—	—	—
0.10	41.82	—	—	—	—	—
0.15	—	—	24.51	—	—	—
0.20	38.28	—	—	—	—	—
0.30	—	—	19.13	—	—	—
0.40	31.08	31.07	—	—	—	—
0.50	—	—	15.67	12°.95	10°.38	12°.35
0.80	20.09	20.68	—	—	—	—
1.00	—	—	12.40	10.08	7.80	8.52
1.60	11.52	12.90	—	—	—	—
2.00	—	—	8.57	7.03	5.33	6.07
3.20	6.55	5.38	—	—	—	—

Mittlere Eintrittszeiten der Jahresminima und Maxima.

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	Minimum.					
	Pawlowsk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis.		
				Offener Plats.	Fichtenwald.	Birkenwald.
Luft	4 Jan.	17 Jan.	30 Jan.	—	—	—
0.00	5 Jan.	5 Jan.	29	—	—	—
0.10	17 Jan.			—	—	—
0.15	0		28 Febr.	—	—	—
0.20	17 Jan.	11	4	—	—	—
0.30	1		4 März	—	—	—
0.40	18 Jan.	16 Jan.	9	—	—	—
0.50	46	42	13 März	28 März	22 März	13 März
0.80	5 März	27 Febr.	45	15	45	34
1.00	37	42	27 April	12 April	6 Mai	16 April
1.60	11 April	10 April	19	21	17	25
2.00	37	47	16 Mai	3 Mai	23 Mai	11 Mai
3.20	17 Mai	27 Mai	—	—	—	—

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	Maximum.					
	Pawlowsk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis.		
				Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
Luft	7 Juli	9 Juli	16 Juli	—	—	—
0.00	15 Juli	7 Juli	17	—	—	—
0.10	20 Juli			—	—	—
0.15	−2		2 Aug.	—	—	—
0.20	18 Juli	15	1	—	—	—
0.30	4		3 Aug.	—	—	—
0.40	22 Juli	22 Juli	0	—	—	—
0.50	11	7	3 Aug.	4 Aug.	16 Aug.	4 Aug.
0.80	2 Aug.	29 Juli	8	8	9	28
1.00	17	15	11 Aug.	12 Aug.	25 Aug.	1 Sept.
1.60	19 Aug.	13 Aug.	30	28	24	24
2.00	32	45	10 Sept.	9 Sept.	18 Sept.	25 Sept.
3.20	20 Sept.	27 Sept.	—	—	—	—

Wie aus der früheren Behandlung des Temperaturverlaufes an den verschiedenen Orten zu erwarten war, sind die Temperaturmaxima in Pawlowsk und St. Petersburg etwas höher, die Minima bedeutend niedriger als in Mustiala und Heinäis. Der nackte Boden in Pawlowsk und St. Petersburg friert auch sehr tief, in der Regel bis etwa 1.5 Meter, während die Eisbildung im schneebedeckten Boden in Mustiala und Heinäis nur bis etwa 0.5 m Tiefe dringt.

Die Jahresamplituden sind also viel grösser in Pawlowsk und St. Petersburg als in Heinäis und Mustiala, z. B. etwa

$$31^0$$

in 0.40 m Tiefe in Pawlowsk und St. Petersburg, kaum

$$16^0$$

in 0.50 m Tiefe in Mustiala und noch kleiner in Heinäis.

Von der Schneedecke beeinflusst, treten die Minima viel später auf in Mustiala und Heinäis als im nackten Boden in Pawlowsk und St. Petersburg. Während an den letztgenannten Orten das Minimum in z. B. 0.40 m Tiefe am 18. und 16. Januar auftritt, finden wir in Mustiala in 0.50 m Tiefe das Minimum am 13 März, in Heinäis zu noch späteren Zeiten. Auch die Maxima werden in Mustiala und Heinäis zufolge des Einflusses der Pflanzendecke ein wenig verspätet im Vergleich mit den Verhältnissen in Pawlowsk und St. Petersburg.

Wir wollen jetzt auf Grund der Abnahme der Amplituden und der Verspätung der Eintrittszeiten der Extreme nach unten die Wärmeleitungsfähigkeit des Bodens an den verschiedenen Orten und Plätzen zu bestimmen versuchen.

Nach Poissons umfassenden theoretischen Untersuchungen auf dem Gebiete der Wärmelehre [1]) kann unter gewissen Bedingungen die Wärmeleitungsfähigkeit k des Bodens auf Grund der Abnahme der Amplituden nach unten durch folgende Formel ausgedrückt werden:

(1) $$\frac{k}{c\,\delta} = \frac{\pi \log^2 e}{T B^2},$$

---

[1]) Poisson: „Théorie mathématique de la chaleur“ Paris 1835, besonders Chapitre XII: Mouvement de la chaleur dans l'intérieur et à la surface de la terre.

wo c die specifische Wärme und δ die Dichtigkeit des betreffenden Bodenlagers ist, T die Dauer der Periode der fraglichen Wärmevariation und B der Logarithmus für den Quotient der Amplituden in den Tiefen x_1 und x_2, dividirt durch den Abstand $x_2 - x_1$ zwischen den beiden Bodenlagern, oder

$$B = \frac{\log \varDelta_{x_1} - \log \varDelta_{x_2}}{x_2 - x_1}, \qquad (2)$$

wo $\varDelta_{x_1}$ und $\varDelta_{x_2}$ die Amplituden in den Tiefen x_1 und x_2 bezeichnen.

Auf Grund der Verspätung der Eintrittszeiten der Extreme mit zunehmender Tiefe kann die Leitungsfähigkeit aus folgender Formel bestimmt werden:

$$\frac{k}{c\,\delta} = \frac{T}{4\,\pi} \left(\frac{\varDelta\, x}{\varDelta\, t}\right)^2, \qquad (3)$$

wo $\varDelta\, x$ die Zunahme der Tiefe, $\varDelta\, t$ die Verspätung der Eintrittszeit der Extreme für diese Tiefenzunahme bezeichnen.

Diese Formeln gelten nur unter der Annahme, dass, ausser dass $\frac{k}{c\,\delta}$ während der Beobachtungszeit natürlicherweise constant sei, die Wärmefortpflanzung ausschliesslich durch Leitung (nicht durch Wasser- oder Luftbewegungen) geschieht und dass die Temperaturvariation an der Oberfläche nach folgender Formel verläuft:

$$u = A_0 + A_1 \sin\left(2\,\pi\,\frac{t}{T} + \alpha_1\right),$$

wo u die Temperatur bezeichnet, t und T dieselbe Bedeutung wie oben haben und A_0, A_1 und α_1 Constanten sind. Die Glieder der rechten Seite der letzten Gleichung entsprechen den zwei ersten Gliedern der bekannten Besselschen Interpolationsformel. Wenn die Temperaturvariation einen mehr complicirten Verlauf hat, und also mehrere Glieder der Besselschen Formel hinzugezogen werden müssen um den Temperaturverlauf mit genügender Genauigkeit matematisch ausdrücken zu können, so gelten die obigen Formeln (1), (2) und (3) für die Fortpflanzung

der durch die verschiedenen periodischen Glieder ausgedrückten Partialwellen, in welchen die gegebene Schwankung aufgelöst werden kann.

Da jedoch, besonders in den obersten Bodenschichten, nicht die zuerst erwähnten Bedingungen, dass $\frac{k}{c\,\delta}$ constante wäre und dass die Wärmefortpflanzung ausschliesslich durch Leitung geschehe, erfüllt sind, würde eine Behandlung des Problems durch Auflösen der jährlichen Wärmeschwankungen in Parialwellen welche sich den Gliedern der Besselschen Formel genau anschliessen, jedenfalls nicht exakt zum Ziele führen. Wir versuchen daher aus den vorhandenen Amplituden und aus den Phasendifferenzen der Wärmeschwankungen in den verschiedenen Tiefen, nach den obigen Formeln (1) und (3), wenn möglich einen rohen Werth für die Leitungsfähigkeit des Bodens zu erhalten. Hierbei bestreben wir zuerst nicht den Werth der Leitungsfähigkeit *(k)* selbst sondern den der ganzen linken Seite

$$\frac{k}{c\,\delta} = K$$

der obigen Gleichungen zu ermitteln.

Weiter nehmen wir nur die Eintrittszeiten der Maxima in Betracht, denn die Eintrittszeiten der Minima werden so beträchtlich von der Eisbildung im Boden und von der Schneedecke beeinflusst, dass wir nicht diese Daten für unseren Zweck benutzen wollen.

Bei Berechnung von K verwenden wir wie üblich Centimeter und Minute als Längen- und Zeitenheiten. Um alzu viele Decimalstellen zu vermeiden, haben wir jedoch in der ersten Tabelle die Werthe von B mit 100 multiplicirt, wodurch die angeführten Werthe dem Meter als Längeneinheit entsprechen.

In der zweiten Tabelle, wo K aus den Phasendifferenzen oder der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Maxima berechnet ist, haben wir nebst den Werthen von K auch die Werthe dieser Geschwindigkeit, C, jedoch nicht in Centimetern und Minuten sondern, um nicht so lange Decimalzahlen zu erhalten, in Centimetern und Tagen angeführt. Für die Berechnung von K haben wir natürlich, wie schon gesagt, Centimeter und Minute als Längen und Zeiteinheiten benutzt.

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	B						K					
				Heinäis, Sandboden.						Heinäis, Sandboden.		
	Pawlowsk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.	Pawlowsk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
0.0—0.4	0.5298	0.4899	—	—	—	—	0.0401	0.0469	—	—	—	—
0.4—0.8	0.4737	0.4419	—	—	—	—	0.0894	0.0577	—	—	—	—
0.5—1.0	—	—	0.2033	0.2176	0.2482	0.3224	—	—	0.2725	0.2379	0.1859	0.1084
0.8—1.6	0.3019	0.2562	—	—	—	—	0.1236	0.1717	—	—	—	—
1.0—2.0	—	—	0.1604	0.1565	0.1653	0.1463	—	—	0.4378	0.4600	0.4123	0.5263
1.6—3.2	0.1532	0.2373	—	—	—	—	0.4799	0.2001	—	—	—	—

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	C						K					
				Heinäis, Sandboden.						Heinäis, Sandboden.		
	Pawlowsk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.	Pawlowsk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
0.0—0.4	5.714	2.667	—	—	—	—	0.6591	0.1435	—	—	—	—
0.4—0.8	3.636	5.714	—	—	—	—	0.2669	0.6591	—	—	—	—
0.5—1.0	—	—	6.250	6.250	5.556	1.786	—	—	0.7884	0.7884	0.6230	0.0644
0.8—1.6	4.706	5.333	—	—	—	—	0.4470	0.5741	—	—	—	—
1.0—2.0	—	—	3.333	3.571	4.167	4.167	—	—	0.2243	0.2575	0.3504	0.3504
1.6—3.2	5.000	3.556	—	—	—	—	0.5046	0.2552	—	—	—	—

Wir finden die Werthe des B an allen Plätzen von der Oberfläche nach Unten abnehmen, die Werthe von K, aus der Amplitudenabnahme hergeleitet, noch rascher, umgekehrt gegen B^2, von Oben nach unten wachsen. In den untersten Bodenlagern erreicht K also in Pawlowsk, Mustiala und Heinäis Werthe zwischen

0.4 und 0.5.

In St. Petersburg ist der entsprechende Werth nur

0.2.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Maxima, *C*, ist sehr variabel in den verschiedenen Tiefen und an den verschiedenen Plätzen und lässt auch keine Gesetzmässigkeit der Variationen hervortreten. Die hieraus gefundenen Werthe des *K* haben daher nur geringe Bedeutung. Sie stimmen auch sehr schlecht mit den aus den Amplituden hergeleiteten.

Die Ursachen zu diesen Unregelmässigkeiten sind ausser der Wärmefortpflanzung im Boden durch Wasser- und Luftbewegungen und der Veränderlichkeit des Feuchtigkeitsgehalts des Bodens, wodurch die Werthe des *K* beinflusst werden, auch, und vielleicht in erster Linie die Unregelmässigkeit der Jahrestemperaturschwankung, d. h. die grossen aperiodischen Schwankungen, welche sowohl im Sommer als im Winter in der Lufttemperatur auftreten und den regelmässigen Verlauf der Jahresschwankung stören.

Um von diesen Störungen mehr unabhängig zu werden, wollen wir jetzt nicht die Mittel der beobachteten Maxima und Minima der einzelnen Jahre unseren Berechnungen zu Grunde legen, sondern nehmen die Maxima und Minima der auf Pl. I und II aufgetragenen, aus den vierjährigen Monatsmitteln hergeleiteten Curven, welche den mittleren Temperaturverlauf in der Luft und in den verschiedenen Tiefen des Bodens angeben.

Diese Curven haben natürlich eine viel flachere Form als die Curven hätten, welche den wirklichen Temperaturverlauf der einzelnen Jahre mit allen Gipfeln wiedergäben. Wir finden auch in den folgenden Tabellen, für die oberen Schichten, besonders in Pawlowsk, die Maxima dieser Curven bedeutend niedriger, die Minima bedeutend höher als die früher angegebenen beobachteten Maxima und Minima. Die Amplituden in den oberen Schichten werden also bedeutend, in den unteren ein wenig kleiner als die den directen Beobachtungen entnommenen Amplituden; die Amplitude an der Oberfläche in Pawlowsk z. B. nur 29°.3 während die mittlere Differenz der beobachteten Maxima und Minima 50°.6 ausmacht.

Die Bestimmung der Eintrittszeiten und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Extreme aus den Curven wird nicht so sicher wie die Bestimmung der Werthe selbst dieser Extreme. Eine kleine Änderung der Form der Curven kann recht bedeutende Wirkungen auf die hergeleiteten Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die daraus hergeleiteten Werthe des *K* haben.

Wir geben jetzt die aus den aufgezogenen Curven hergeleiteten Werthe der Jahresmaxima und Minima, der Jahresamplituden und der Eintrittszeiten der Extreme, sowie die aus diesen Daten hergeleiteten Werthe der oben definirten Grössen *B*, *C* und *K*.

Den mittleren Jahrescurven entnommene Extreme.

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	Minimum.					Maximum.				
			Heinäis.					Heinäis.		
	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
Luft	−9°.0	−7°.5	—	—	—	16°.5	15°.75	—	—	—
0.00	−9.0	—	—	—	—	20.3	—	—	—	—
0.10	−8.6	—	—	—	—	18.9	—	—	—	—
0.15	—	−2.6	—	—	—	—	16.85	—	—	—
0.20	−8.2	—	—	—	—	18.2	—	—	—	—
0.30	—	−0.65	—	—	—	—	15.5	—	—	—
0.40	−6.5	—	—	—	—	17.2	—	—	—	—
0.50	—	−0.05	0°.85	0°.15	−0°.25	—	14.5	13°.1	9°.9	11°.0
0.80	−3.0	—	—	—	—	14.9	—	—	—	—
1.00	—	0.6	1.2	0.9	0.75	—	12.7	11.05	8.3	8.85
1.60	0.6	—	—	—	—	11.9	—	—	—	—
2.00	—	1.95	2.1	1.5	2.1	—	10.2	8.8	6.5	7.55
3.20	2.9	—	—	—	—	9.2	—	—	—	—

Amplituden.

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis.		
			Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
Luft	25°.5	23°.25	—	—	—
0.00	29.3	—	—	—	—
0.10	27.5	—	—	—	—
0.15	—	19.45	—	—	—
0.20	26.4	—	—	—	—
0.30	—	16.15	—	—	—
0.40	23.7	—	—	—	—
0.50	—	14.45	12°.25	9°.75	11°.25
0.80	17.9	—	—	—	—
1.00	—	12.1	9.85	7.4	8.1
1.60	11.3	—	—	—	—
2.00	—	8.25	6.7	5.0	5.45
3.20	6.3	—	—	—	—

Eintrittszeiten der obigen Extreme.

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	Minimum.					Maximum.				
	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis. Offener Platz.	Heinäis. Fichtenwald.	Heinäis. Birkenwald.	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis. Offener Platz.	Heinäis. Fichtenwald.	Heinäis. Birkenwald.
Luft	12 Febr.	16 Febr.	—	—	—	22 Juli	18 Juli	—	—	—
0.00	8 Febr.	14	—	—	—	14 Juli	7	—	—	—
0.10	14 Febr.		—	—	—	17 Juli		—	—	—
0.15	4	2 März	—	—	—	2	25 Juli	—	—	—
0.20	18 Febr.	5	—	—	—	19 Juli	6	—	—	—
0.30	3	7 März	—	—	—	4	31 Juli	—	—	—
0.40	21 Febr.	15	—	—	—	23 Juli	4	—	—	—
0.50	6	22 März	31 März	27 März	25 März	11	4 Aug.	4 Aug.	13 Aug.	9 Aug.
0.80	27 Febr.	21	12	22	16	3 Aug.	10	10	11	12
1.00	31	12 April	12 April	18 April	10 April	19	14 Aug.	14 Aug.	24 Aug.	21 Aug.
1.60	30 März	24	18	28	23	22 Aug.	24	20	20	23
2.00	41	6 Mai	30 April	16 Mai	3 Mai	34	7 Sept.	3 Sept.	13 Sept.	13 Sept.
3.20	10 Mai	—	—	—	—	25 Sept.	—	—	—	—

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	*B*					*K*				
	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis, Sandboden. Offener Platz.	Heinäis, Sandboden. Fichtenwald.	Heinäis, Sandboden. Birkenwald.	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis, Sandboden. Offener Platz.	Heinäis, Sandboden. Fichtenwald.	Heinäis, Sandboden. Birkenwald.
0.0—0.4	0.2303	—	—	—	—	0.2123	—	—	—	—
0.4—0.8	0.3047	—	—	—	—	0.1213	—	—	—	—
0.5—1.0	—	0.1541	0.1894	0.2395	0.2853	—	0.4743	0.3141	0.1964	0.1383
0.8—1.6	0.2497	—	—	—	—	0.1818	—	—	—	—
1.0—0.2	—	0.1663	0.1674	0.1703	0.1721	—	0.4073	0.4035	0.3885	0.3803
1.6—3.2	0.1585	—	—	—	—	0.4484	—	—	—	—

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	C					K				
	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis, Sandboden.			Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis, Sandboden.		
			Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.			Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
0.0—0.4	4.444	—	—	—	—	0.3987	—	—	—	—
0.4—0.8	3.636	—	—	—	—	0.2669	—	—	—	—
0.5—1.0	—	5.000	5.000	4.545	4.167	—	0.5046	0.5046	0.4170	0.3504
0.8—1.6	4.211	—	—	—	—	0.3578	—	—	—	—
1.0—2.0	—	4.167	5.000	5.000	4.347	—	0.3503	0.5046	0.5046	0.3816
1.6—3.2	4.706	—	—	—	—	0.4470	—	—	—	—

Wir finden hier eine viel bessere Übereinstimmung zwischen den Werthen des K in den verschiedenen Tiefen und an den verschiedenen Plätzen oder berechnet nach den verschiedenen Methoden, als wenn das K aus den direkt beobachteten Werthen der Extreme und der Eintrittszeiten derselben berechnet wird. In den unteren von den hier in Frage stehenden Bodenschichten fallen alle gefundenen Werthe des K zwischen

0.35 und 0.50,

die von der Amplitudenabnahme hergeleiteten, für sich genommen, zwischen

0.38 und 0.45

und in Mustiala und Heinäis besonders zwischen

0.38 und 0.40.

Die aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Maximums berechneten Werthe des K sind für Tiefe 1.0—2.0 Meter in Mustiala etwas kleiner, für Tiefe 1.6—3.2 Meter in Pawlowsk und 1.0—2.0 Meter im Birkenwalde zu Heinäis ebenso gross, in allen übrigen Fällen grösser, teilweise bedeutend grösser, als die entsprechenden aus der Amplitudenabnahme berechneten Werthe des K. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Maximums, und noch mehr die des Minimums,

ist also in den obersten Bodenlagern grösser als man auf Grund der schnellen Abnahme der Amplituden von Oberfläche nach unten annehmen könnte. Von 1 oder 1.6 m Tiefe nach unten ist die Übereinstimmung in dieser Hinsicht schon besser.

Wollen wir jetzt aus den gefundenen Werthen der Grösse K die Leitungsfähigheit

$$k = c\,\delta\,K$$

berechnen, so müssen wir die specifische Wärme c und die Dichtigkeit δ der betreffenden Bodenlager, oder den Product $c\,\delta$, die s. g. Volumcapacität, kennen. Hier begegnet uns jedoch eine grosse Schwierigkeit, indem diese Grössen in hohem Grade von dem Feuchtigkeitszustand des Bodens abhängig sind, und dieser von Zeit zu Zeit wechselt. Wenn die Wassermenge im Boden zunimmt, wird die Masse der Volumeinheit und also die Volumcapacität des Bodens wachsen. Die Leitungsfähigheit k des Bodens wächst hierbei auch, weil Wasser ein besserer Wärmeleiter als Luft ist. Hier möge nun erwähnt werden dass, wenn die Volumcapacität $c\,\delta$ und die Leitungsfähigheit k des Bodens in demselben Verhältnisse mit zunehmender Feuchtigkeit zunähme, so würde die mehrfach erwähnte Grösse $K = \frac{k}{c\,\delta}$ bei verschiedener Feuchtigkeit des Bodens konstant sein. Ersteres kann nicht, wenigstens nicht immer, der Fall sein, und die Feuchtigkeitsveränderungen im Boden bewirken also eine Veränderung auch der Grösse K, wie früher erwähnt ist.

Nach genauen Messungen, welche ich an verschiedenen Plätzen und Lokalen im Kirchspiel Karislojo gemacht [1]), kann man schliessen, dass die Werthe der Volumcapacität in den Sandbodenlagern in Mustiala und Heinäis zwischen 0.50 und 0.80 wechseln, und die mittleren Werthe während der vierjährigen Periode an den verschiedenen Plätzen und fraglichen Tiefen zwischen etwa 0.60 und 0.70. Weiter wissen wir dass die Volumcapacität grösser in den unteren Schichten als in den oberen, und grösser in feuchtem als in trocknem Boden ist. Näher kann man diese Grösse zur Zeit nicht angeben. Um die mittleren ungefährlichen Werthe der Leitungsfähigkeit k der Bodenlager in den verschiedenen Tiefen und an den verschiedenen Plätzen zu finden haben wir die gefundenen Werthe der Grösse K mit Zahlen zwischen 0.60 und 0.70 zu multipliciren.

---

[1]) Vergleiche Homén, Bodenphysikalische und meteorologische Beobachtungen etc. Berlin 1894 Ss. 55—68.

Auf Grund der gefundenen Werthe der Amplitudenabnahme nach unten können wir, unter Annahme dass diese Abnahme, oder die Grösse B, weiter nach unten denselben Werth hat wie zwischen 1.0 und 2.0 oder zwischen 1.6 und 3.2 m Tiefe, berechnen in welcher Tiefe die jährlichen Temperaturschwankungen aufhören, oder um es bestimmter zu sagen, in welchen Tiefen die Jahresamplitude z. B. die Werthe $1^0.0$, $0^0.1$ und $0^0.01$ hat. Wir haben nur in der Formel

$$x - x_1 = \frac{\log \Delta x_1 - \log \Delta x}{B}$$

x = die gesuchte Tiefe,
x_1 = 2.0 (resp. 3.2) Meter,
Δx_1 = die Amplitude in 2.0 (resp. 3.2) m Tiefe,
Δx = successive $1^0.0$, $0^0.1$ und $0^0.01$,
B = die obenangegebenen Werthe des B für 1.0—2.0 (resp. 2,6—3.2) m Tiefe zu setzen.

Wir finden also dass die Jahresamplituden $1^0.0$, $0^0.1$ und $0^0.01$ an den verschiedenen Orten in den unten angegebenen Tiefen eintreffen.

Jahresamplitude.	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis. Sandboden.		
			Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
$1^0.0$	8.35 Meter	7.61 Meter	7.06 Meter	6.27 Meter	6.58 Meter
0.1	14.66 „	13.62 „	13.03 „	12.16 „	12.43 „
0.01	20.97 „	19.64 „	19.01 „	18.04 „	18.27 „

Gegen diese Berechnung kann man einwenden, dass nach den Tabellen auf den Seiten 165 und 168 die Leitungsfähigkeit des Bodens nach unten zuzunehmen scheint, sodass sie in grösseren Tiefen wahrscheinlich grösser als in 1.0—2.0 Tiefe ist. Allzu gross kann diese Zunahme doch nicht sein, wenn einmal die Beschaffenheit des Bodens nicht ganz verändert wird. Hätte K in den unteren Schichten den mittleren Werth 0.5 (statt etwa 0.4 in der Tiefe 1.0—2.0 Meter) und B also den Werth 0.1501 (Längeneinheit = 1 Meter), so würden wir folgende Zahlen erhalten.

Jahresamplitude.	Pawlowsk. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.	Heinäis. Sandboden.		
			Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
1°.0	8.64 Meter	8.22 Meter	7.64 Meter	6.84 Meter	7.22 Meter
0.1	15.30 „	14.88 „	14.30 „	13.50 „	13.88 „
0.01	21.96 „	21.54 „	20.97 „	20.17 „	20.54 „

Diese Zahlen weichen nur wenig von den der vorigen Tabelle ab. Die richtigen Werthe liegen wahrscheinlich nahe an oder zwischen den in diesen beiden Tabellen gegebenen Zahlen.

Von Jahr zu Jahr geschehende Temperaturänderungen.

Bisher wurden die Temperaturänderungen von Jahr zu Jahr nur wenig besprochen. Zuerst geben wir nun eine Übersicht der Differenzen zwischen den höchsten und niedrigsten Jahresmitteln in den verschiedenen Tiefen.

Da jedoch die Beobachtungsperioden an den verschiedenen Plätzen so verschieden sind, so ist man gezwungen, wenn man unter einander vergleichbare Werthe von den verschiedenen Plätzen erhalten will, sich auf die kurze vierjährige Periode 1887—1890 einzuschränken, für welche wir gleichzeitige Beobachtungen von allen Plätzen haben. In Betreff der Jahresmittel ist es jedoch ein glücklicher Zufall dass, mit Ausnahme für das grasbewachsene Sandfeld in Mustiala, gerade diese vierjährige Periode die höchsten und niedrigsten Jahresmittel enthält, welche an den verschiedenen Plätzen und Tiefen in den ganzen betreffenden Beobachtungsperioden überhaupt vorkommen. In Pawlowsk [1]), wo die Bodentemperaturbeobachtungen seit dem Jahre 1879 fortgehen, finden wir also in allen Tiefen das höchste Jahresmittel der ganzen Periode 1879—1894 im Jahre 1890, das niedrigste im Jahre 1888. Nur für die Tiefe 1.60 Meter sind die Mittel

$$6^{0}.73 \text{ und } 6^{0}.53$$

der Jahre 1879 und 1882 ein wenig höher als das Mittel

$$6^{0}.51$$

des Jahres 1890.

[1]) Leyst: Über die Bodentemperatur in Pawlowsk, Repert. für Meteorologie, Bd XIII, N:o 7 1890; und Annalen des Physikalischen Centralobservatoriums zu St. Petersburg, Jahrg. 1887—1894.

In St. Petersburg [1]), wo die Beobachtungen während der Periode 1879—1883 an einem flachen sandigen Platze, während der Periode 1883—1894 an der früher beschriebenen kegelstumpfförmigen Erhöhung geschahen, finden wir ebenso die höchsten Jahresmittel der Periode 1879—1894 im Jahre 1890, die niedrigsten im Jahre 1888. Das Jahr 1893 macht doch eine kleine Ausnahme, indem die Mittel

$$3^0.68 \text{ und } 3^0.75$$

in den Tiefen 0.40 und 0.80 Meter ein wenig kleiner als die Mittel

$$3^0.75 \text{ und } 3^0.80$$

derselben Tiefen im Jahre 1888 sind.

In St. Petersburg wurden übrigens Bodentemperaturbeobachtungen schon seit dem Jahre 1873 in einem kleineren aufgebauten Sandhügel gemacht. Auch hier fallen die Jahresmittel der Periode 1873—1879 zwischen den Jahresmitteln 1888 und 1890 mit Ausnahme der zwei grössten Tiefen. In 3.2 m Tiefe ist das Mittel alle Jahre, ausser 1877, und in 1.6 m Tiefe in den Jahren 1873 und 1874 entschieden höher als das entsprechende obenangegebene Mittel des Jahres 1890. Dies beruht wahrscheinlich auf der Kleinheit des Hügels (die Durchmesser der Basis und der oberen kreisförmigen Fläche des kegelstumpfförmigen Hügels waren 10.2 und 3.5 die Höhe 2.7 Meter), wodurch der erwärmende Einfluss der Schneedecke ausserhalb des Hügels bis zu den tieferen Thermometern sich geltend machen konnte. Der Einfluss der Umgebung auf die oberen Thermometern ist natürlich viel kleiner, auf der obersten ganz verschwindend.

Auch in Betreff der Lufttemperatur in Pawlowsk und St. Petersburg ist 1890 das wärmste und 1888 das kälteste Jahr der ganzen Periode 1879—94. In St. Petersburg sind regelmässige Lufttemperaturbeobachtungen seit dem Jahre 1752 gemacht [2]) und in der 143-jährigen Periode 1752—1894 sind nur acht Jahre kälter als 1888, nur ein Jahr (1826) wärmer als 1890. Das höchste Jahresmittel dieser Periode ist $5^0.64$ (1826) das niedrigste $0^0.53$ (1809).

In Heinäis ist an den drei Beobachtungsplätzen und in allen Tiefen das Jahresmittel 1890 das höchste, das des Jahres 1888 das niedrigste der 8- und 10-jährigen Beobachtungsperioden 1887—94 und 1885—94. Nur in 2 m

---

[1]) Hlasek: Über die Bodentemperatur in St. Petersburg, Repert. für Meteorologie, Bd XIV N:o 11, 1891; und Annalen des Physikalischen Centralobservatoriums in St. Petersburg, Jahrg. 1887—1894.

[2]) Wild: Die Temperaturverhältnisse des Russischen Reiches, Supplementband zum Repert. für Meteorologie, Text Ss. 276 und 277, 1881.

Tiefe im Fichtenwalde steigt das Jahresmittel in einigen Jahren höher als 1890; 1894 bis $4^{0}.50$ gegen $4^{0}.08$ 1890.

In Mustiala ist in allen Tiefen das Jahresmittel 1886 höher als 1890. Diese Abweichung von den Verhältnissen an den übrigen hier erwähnten Orten beruht vielleicht darauf, dass das Feld, wo die Beobachtungen in Mustiala geschahen, bebaut war und also kleine Veränderungen der Pflanzendecke und der obersten Schichten des Bodens von Jahr zu Jahr geschehen konnten, wovon auch die Temperaturverhältnisse vielleicht beeinflusst wurden, oder auch ist sie zum Teil eine Folge der grossen Regengüsse in Mustiala in Juli und August 1886, welche, wie früher gezeigt, einen erwärmenden Einfluss auf die Bodentemperatur haben. Im Jahre 1886 war also die Bodentemperatur in den Monaten Juli—December sehr hoch. In der folgenden Tabelle haben wir für Mustiala sowohl die Differenzen zwischen den Jahresmitteln 1890 und 1888 als auch zwischen denen für 1886 und 1888 angegeben.

Die Lufttemperatur in Mustiala während der zehnjährigen Beobachtungsperiode 1885—1894 ist am niedrigsten 1888, aber 1894 um $0^{0}.29$ höher als 1890. Das Mittel 1886 ist jedoch um $0^{0}.53$ niedriger als 1890.

Differenzen zwischen den Jahresmitteln 1890 und 1888, zugleich die grössten Differenzen der Jahresmittel während der ganzen Beobachtungsperioden an den verschiedenen Plätzen.

Tiefe unter der Oberfläche in Meter.	Pawlowsk. Sandhügel.	St. Petersburg. Sandhügel.	Mustiala. Grasb. Sandfeld.		Heinäis.		
			1890—1888	1886—1888	Offener Platz.	Fichtenwald.	Birkenwald.
Luft	$3^{0}.28$	$3^{0}.80$	$2^{0}.74$	$2^{0}.21$	—	—	—
0.00	3.08	4.11	—	—	—	—	—
0.10	3.49	—	—	—	—	—	—
0.20	3.46	—	—	—	—	—	—
0.40	3.10	3.01	—	—	—	—	—
0.50	—	—	0.73	1.32	$1^{0}.65$	$1^{0}.53$	$1^{0}.59$
0.80	2.49	2.91	—	—	—	—	—
1.00	—	—	1.05	1.21	1.42	1.30	1.37
1.60	2.16	2.63	—	—	—	—	—
2.00	—	—	0.85	1.01	1.08	0.92	1.33
3.20	1.30	1.38	—	—	—	—	—

Aus dieser Zusammenstellung der grössten Differenzen der Jahresmittel geht hervor, dass die Temperaturänderungen im Boden von Jahr zu Jahr nicht gross sind. In Mustiala und Heinäis sind die Veränderungen noch kleiner als in Pawlowsk und St. Petersburg. Weiter sind die Änderungen ausserordentlich gleich an den drei verschiedenen Beobachtungsplätzen in Heinäis. Ebenso sind die Temperaturvariationen einander ziemlich gleich in Pawlowsk und St. Petersburg.

Weiter ersehen wir nun aus der obigen Zusammenstellung, dass nicht nur, wie früher gezeigt, die Jahresamplituden sondern auch die von Jahr zu Jahr stattfindenden Temperaturänderungen mit wachsender Tiefe sehr schnell abnehmen. An der Oberfläche und ein wenig darunter, wenigstens an nacktem Boden in Pawlowsk und St. Petersburg, sind die angegebenen Maximaldifferenzen der Jahresmittel ein wenig grösser als für die Lufttemperatur, in Pawlowsk und St. Petersburg etwa 3^0 bis 4^0, aber schon in 2 m Tiefe in Mustiala und Heinäis und in 3.2 m Tiefe in Pawlowsk und St. Petersburg sind sie nur etwa $0^0.9$ bis $1^0.4$. Die Temperaturänderungen von Jahr zu Jahr sind also in den unteren Bodenschichten auffallend klein, und in allen Schichten viel kleiner als die Jahresamplituden.

Die Schnelligkeit, womit die Grösse der säkulären Temperaturänderung mit wachsender Tiefe abnimmt, hängt von der Länge der Periode, in welcher die Temperaturschwankungen sich vollziehen ab. Wenn das Jahresmittel an der Oberfläche viele Jahre nach einander niedrig ist, dann viele Jahre nach einander hoch, so wird die Differenz zwischen dem höchsten und niedrigsten Jahresmittel beinahe ebenso gross in den unteren Bodenlagern wie in den oberen. Wenn sich dagegen die Temperatur von einem Jahr zum folgenden ändert, und dann wieder in entgegengesetzter Richtung, so wird die Temperaturdifferenz bedeutend kleiner in den unteren als als in den oberen Schichten.

Aus der früher gegebenen Formel

$$K = \frac{\pi \log^2 e}{T B^2}$$

ersehen wir, dass bei periodischen Temperaturschwankungen, wenn K konstant bleibt, das logarithmische Decrement B der Amplitudenabnahme nach unten umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Periodenlänge T ist. Wenn also die säkulären Temperaturänderungen z. B. vierjährige Perioden bildeten, so würde B für diese Schwankungen halb so gross wie für die jährliche Variation sein und also die Tiefenzunahme, für welche die Amplitude der

vierjährigen Periode ebenso viel herabgesetzt wird wie die der einjährigen, doppelt so gross wie die Zunahme für die einjährige Periode. Die Schwankungen der vierjährigen Periode dringen also doppelt so tief in den Boden hinein wie die der einjährigen, ebenso wie, für gleiche Amplituden an der Oberfläche, die Jahresschwankungen 19 (eigentlich $\sqrt{365}$) mal so tief in den Boden eindringen wie die täglichen.

Etwa in dieser Weise, vierjährige Perioden bildend, geschehen die säkulären Temperaturschwankungen während der nun in Frage stehenden Zeit. In den Jahren 1881, 1884, 1888 und 1892 hat die säkuläre Variation der Lufttemperatur an allen Beobachtungsorten stark ausgeprägte Minima, das tiefste 1888; in den Jahren 1882, 1887 und 1890 deutliche Maxima, das höchste 1890, wie aus der folgenden Übersicht hervorgeht. Die hohe Temperatur 1894 wird wahrscheinlich auch ein Maximum bilden.

Die hier also vorhandene Eigenthümlichkeit, dass in den Jahren 1882 bis 1894 die säkuläre Temperaturvariation drei deutlich ausgebildete vierjährige Perioden bildet, können wir nicht unbenutzt lassen. Untersuchen wir also ob und wie sich diese periodischen Schwankungen von der Oberfläche zu den grösseren Tiefen fortpflanzen. Die Jahresmittel der Bodentemperaturbeobachtungen in Mustiala und Heinäis sind schon in der Zusammenstellung auf den Seiten 102—107 angegeben. Die Jahresmittel von Pawlowsk und St. Petersburg entnehmen wir den früher besprochenen Arbeiten von Leyst und Hlasek und den Annalen des Phys. Centralobservatoriums in St. Petersburg Jahrg. 1887—1894. Zu den aus der letzter Quelle erhaltenen Zahlen fügen wir die auf Ss. 141 und 142 angegebenen Correctionen hinzu.

Jahresmittel der Luft- und Bodentemperatur.

Ort und Tiefe.	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	Mittel 1883—94
Pawlowsk.														
Luft	4°.24	3°.43	2°.79	3°.41	3°.75	3°.87	1°.06	3°.33	4°.34	3°.29	1°.96	1°.60	4°.09	3°.08
Sandhügel.														
Tiefe 0.00 Meter	5.34	4.56	4.16	4.78	4.91	5.23	2.75	4.66	5.83	4.26	2.95	3.08	5.19	4.36
„ 0.10 „	5.26	4.42	4.22	4.80	4.75	5.22	2.49	4.24	5.98	4.67	3.45	3.23	5.21	4.39
„ 0.20 „	5.31	4.52	4.43	4.95	4.81	5.29	2.44	4.16	5.90	4.65	3.48	3.27	5.26	4.43
„ 0.40 „	5.74	4.68	5.03	5.31	5.02	5.51	2.99	4.23	6.09	4.87	3.92	3.69	5.47	4.73
„ 0.80 „	6.23	4.97	5.54	5.52	5.18	5.75	3.74	4.51	6.23	5.16	4.83	4.23	5.77	5.12
„ 1.60 „	6.53	5.58	5.94	5.88	5.44	6.09	4.35	4.90	6.51	5.61	5.26	4.59	5.92	5.51
„ 3.20 „	—	5.86	6.20	6.21	5.79	6.30	5.19	5.33	6.49	6.10	5.76	5.40	6.35	5.92

Ort und Tiefe.	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890	1891	1892	1893	1894	Mittel 1883—94
St. Petersburg.														
Luft.	5°.03	4°.13	3°.58	4°.16	4°.52	4°.72	1°.47	4°.01	5°.27	4°.12	2°.76	2°.25	4°.80	3°.82
Sandhügel.														
Tiefe 0.00 Meter.	5.30	3.94	3.72	5.08	5.37	5.79	3.00	5.19	7.11	5.72	4.06	3.90	6.25	4.09
„ 0.40 „	—	4.73	5.16	5.71	5.76	6.26	3.75	5.05	6.76	5.16	4.43	3.68	5.97	5.20
„ 0.80 „	—	4.90	5.55	5.62	5.32	6.19	3.80	4.69	6.71	5.26	4.59	3.75	6.07	5.20
„ 1.60 „	—	5.27	5.82	5.82	5.37	6.16	4.11	4.73	6.74	5.68	5.22	4.15	6.25	5.44
„ 3.20 „	—	5.36	5.92	6.13	5.75	6.27	5.11	5.21	6.49	6.14	5.83	5.22	6.31	5.81

Um eine bessere Übersicht des Phänomens zu erhalten, haben wir die obigen Data auf Pl. III graphisch dargestellt. Hierbei wurden die angegebenen Werthe der Jahresmittel selbst ohne weitere Reductionen auf das Netz eingetragen und die betreffenden Puncte mit geraden Linien verbunden. Da die Jahresmittel für 0.10 und 0.20 m Tiefe in Pawlowsk sehr nahe denjenigen für die Oberflächentemperatur liegen, haben wir, um der Deutlichkeit der Figuren Genüge zu leisten, die diesen Tiefen entsprechenden Curven nicht aufgezogen.

Die Werthe der Lufttemperatur in Mustiala in den Jahren 1882—1884 haben wir von der hiesigen Meteorologischen Centralanstalt erhalten. Die Jahresmittel der drei Jahre, berechnet wie früher nach der Formel $\frac{1}{4}(7+2+4\times 9)$, sind $4^{0}.54$, $4^{0}.08$ und $3^{0}.52$.

Aus den Curven auf Pl. III ersehen wir erstens, dass auf den offenen Plätzen in Mustiala und Heinäis sowie in Pawlowsk und St. Petersburg die Jahresmittel der Bodentemperatur durchgehend höher, und recht bedeutend höher als die der Lufttemperatur sind. Im Birkenwalde zu Heinäis sind die Jahresmittel auch meistens höher, in 0.5 und 1.0 m Tiefe jedoch bisweilen niedriger als die Lufttemperatur, im Fichtenhochwalde in allen Tiefen bald höher, bald niedriger als die Lufttemperatur. Weiter geht deutlich hervor wie an allen Beobachtungsplätzen, schon in den kleinen Tiefen, wo die Beobachtungen geschahen, die Amplituden der säkulären Temperaturänderungen von der Oberfläche nach unten abnehmen. In Pawlowsk und St. Petersburg, wo sich die Beobachtungen von der Oberfläche selbst bis zu 3.2 m Tiefe strecken, kann man dies am besten sehen, aber auch an den übrigen Plätzen sind die Verhältnisse überhaupt dieselben.

Dass die Amplitudenabnahme mit wachsender Tiefe nicht so prägnant in Mustiala und Heinäis wie in Pawlowsk und St. Petersburg ist, steht wahrscheinlich

im Zusammenhang damit dass die Temperaturänderung im Boden von Jahr zu Jahr überhaupt nicht so gross in Mustiala und Heinäis wie in Pawlowsk und St. Petersburg ist. Die Curven zeigen nämlich nun, dass nicht nur die Jahresamplituden, wovon früher gesprochen, sondern auch die Amplituden der säkulären Temperaturänderung bedeutend grösser im nackten, im Winter von Schnee befreiten Boden in Pawlowsk und St. Petersburg als im natürlichen Boden in Mustiala und Heinäis sind.

Die säkulären Temperaturänderungen im Boden folgen im allgemeinen den Schwankungen der Lufttemperatur. Im Jahre 1892 scheint doch an allen Orten, am meisten in Mustiala und Heinäis, eine Temperaturerhöhung im Boden relativ der Lufttemperatur aufzutreten. In Mustiala und Heinäis ist diese Temperatursteigerung sogar absolut, obgleich die Lufttemperatur von 1891 bis 1892 sehr beträchtlich fällt. Diese Verhältnisse sind natürlich durch die grosse früher besprochene Regenmenge im Sommer 1892 bedingt. Auch im Jahre 1884 zeigen die Curven für die Bodentemperatur in Pawlowsk und St. Petersburg in 0.40 m und grösseren Tiefen eine Steigung von den Mitteln 1893, obgleich die Lufttemperatur fällt. Dies steht vielleicht in Zusammenhang mit der ziemlich grossen Regenmenge in Mai und Juni 1884 [1]).

Diese Störungen des regelmässigen Verlaufes der Fortpflanzung der säkulären Wärmevariation von der Oberfläche nach unten machen eine Berechnung der Amplitudenabnahme mit wachsender Tiefe und der Abhängigkeit derselben von der Länge der Periode in den meisten Fällen sehr illusorisch. Die ausserordentlich starke säkuläre Schwankung in den Jahren 1887—1890, welche, nach den Lufttemperaturbeobachtungen in St. Petersburg zu schliessen, eine von den stärksten, vielleicht die stärkste aller säkulären Schwankungen seit dem Jahre 1752 ist, zeigt doch eine recht regelmässige Fortpflanzung von der Oberfläche zu den tieferen Schichten.

Diese Vertiefung der säkulären Lufttemperaturcurve hat doch keine symmetrische Form. Die Temperatursteigung von 1888 bis 1890 ist grösser und andauernder als der Temperaturfall von 1887 bis 1888.

Weiter ist zu beachten dass die Phasen auch der säkulären Variation eine Verspätung mit wachsender Tiefe erleiden, so dass man desto weniger aus diesen schematischen Curven die wirklichen Amplituden der säkulären Variation in den verschiedenen Tiefen finden kann. Aus den einzelnen Monats-

[1]) Siehe: Annalen des Phys. Centralobservatoriums zu St. Petersburg. Jahrg. 1884 und Wild: Die Regenverhältnisse des Russischen Reiches. V Supplementband zum Report. für Meteorologie Ss. 12 und 13 1887.

mitteln der verschiedenen Jahre könnte man wohl, nach Elimination der Wirkung der Jahresschwankung, Curven aufziehen, welche sich viel genauer dem wirklichen Verlauf der säkulären Schwankung anschliessen würde, als die auf Pl. III aufgetragenen. Es würde doch zu weit führen und zu viel Arbeit in Anspruch nehmen diese Curven wirklich herzustellen und zu studiren. Wir begnügen uns daher mit dem Obenangeführten in Betreff der säkulären Temperaturschwankungen und deren Fortpflanzung von der Oberfläche zu den tieferen Erdschichten. Nur das mag hier erwähnt werden, dass wenn man aus den auf Seite 174 angegebenen Differenzen zwischen den Jahresmitteln 1890 und 1888 in den verschiedenen Tiefen, unter Annahme dass diese Differenzen den Amplituden in den verschiedenen Tiefen einer vierjährigen Temperaturschwankung proportional wären, die Schnelligkeit der Amplitudenabnahme nach unten (B) und die daraus hergeleiteten Werthe der Grösse K zu bestimmen versucht, so werden an allen Plätzen die Werthe von B im allgemeinen entschieden grösser als die Hälften der aus den Jahresamplituden berechneten Werthe derselben Grösse, und die Werthe des K also kleiner als die aus der Abnahme der Jahresvariationen mit wachsender Tiefe berechneten Werthe des K.

Eine Art Übersicht der Variationen der verschiedenen Monatsmittel von Jahr zu Jahr soll jetzt gegeben werden. Wir nehmen nämlich die Differenzen zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Mittel jedes Monats während der ganzen Beobachtungsperiode und zwar für jeden Platz für sich. Da die Beobachtungsperioden an den verschiedenen Plätzen theilweise verschieden sind, so sind die an den verschiedenen Plätzen erhaltenen Zahlen nicht immer unter einander vergleichbar. Um die Beobachtungen von Pawlowsk und St. Petersburg besser mit denen der drei Beobachtungsplätze in Heinäis vergleichbar zu machen, haben wir besonders die Differenzen der extremen Monatsmittel für die Periode 1887—1894 neben denen für die längere Periode 1879—1894 ausgerechnet. Die Resultate sind folgende.

Differenz zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Mittel jedes Monats.

Ort und Tiefe.	Beobachtungsperiode.	Jan.	Febr.	März.	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Mittel.
Mustiala.														
Luft	1885—94	11°.65	13°.24	9°.35	5°.61	6°.72	4°.00	3°.89	1°.84	4°.08	4°.69	5°.32	5°.77	6°.35
	1885—90	5.45	9.99	9.35	3.96	6.70	2.88	3.34	1.71	3.37	4.69	4.66	4.27	5.03
Grasbewachsenes Sandfeld.														
Tiefe 0.50 Meter	1885—90	0.62	0.91	0.86	0.38	5.93	4.26	2.63	2.44	2.17	3.23	2.82	1.07	2.28
„ 1.00 „	—	0.79	0.92	0.94	0.83	4.44	3.46	1.62	2.12	1.66	2.33	2.53	1.39	1.92
„ 2.00 „	—	1.10	0.91	0.86	0.78	1.88	2.35	1.90	2.08	1.85	1.15	1.73	1.60	1.52
Heinäis.														
Luft[1])	1887—94	11.65	13.24	9.35	5.61	6.72	2.99	3.42	1.48	4.08	4.69	4.31	5.45	6.08
Offener Platz.														
Tiefe 0.50 Meter	—	0.75	0.65	0.64	1.32	6.72	3.63	2.34	1.84	1.80	2.68	2.09	0.82	2.11
„ 1.00 „	—	0.72	0.70	0.59	0.87	4.48	2.83	2.42	1.81	1.20	1.96	1.72	0.98	1.69
„ 2.00 „	—	1.11	0.80	0.98	0.55	1.90	2.46	2.34	1.84	1.23	1.04	1.28	0.50	1.34
Fichtenwald.														
Tiefe 0.50 Meter	1885—94	1.03	1.26	1.38	0.24	2.17	6.85	3.91	2.40	2.14	2.32	2.40	1.61	2.31
„ 1.00 „	—	0.85	0.65	0.63	0.48	1.32	4.54	3.59	2.28	1.30	1.81	1.99	1.37	1.75
„ 2.00 „	—	1.33	1.02	0.84	0.72	1.07	2.18	3.09	2.75	2.17	1.77	2.36	2.63	1.83
Birkenwald.														
Tiefe 0.50 Meter	1887—94	1.77	1.90	1.81	0.72	5.09	3.26	1.91	1.22	2.08	2.70	1.89	1.00	2.11
„ 1.00 „	—	0.63	0.83	1.81	0.98	3.38	3.42	2.34	2.11	1.54	1.75	1.70	1.08	1.78
„ 2.00 „	—	1.18	0.92	1.05	1.11	1.81	2.70	2.27	1.90	1.42	1.88	1.55	1.53	1.61
Pawlowsk.														
Luft	1887—94	12.16	12.94	10.89	6.11	5.46	2.67	2.55	3.07	4.99	4.59	7.89	8.13	6.79
Sandhügel.														
Tiefe 0.00 Meter	—	11.25	11.70	9.07	4.87	6.31	7.73	3.33	2.91	5.48	4.01	8.41	7.12	6.85
„ 0.10 „	—	10.75	10.37	9.27	4.42	5.10	4.69	3.42	1.80	5.13	3.41	6.39	5.46	5.85
„ 0.20 „	—	10.13	9.71	8.43	4.21	5.33	4.34	3.40	2.82	4.79	3.17	6.18	7.12	5.80
„ 0.40 „	—	7.82	7.55	6.14	3.42	6.28	4.35	3.57	2.19	4.20	2.84	3.30	3.69	4.61

[1]) Wir führen die Resultate der Lufttemperaturbeobachtungen in Mustiala für die Periode 1887—1894 hier unter den Beobachtungen von Heinäis an, da sie gerade hier von Interesse sind.

Ort und Tiefe.	Beobachtungsperiode.	Jan.	Febr.	März	Apr.	Mai.	Juni.	Juli.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Mittel.
Tiefe 0.80 Meter	—	5.73°	5.05°	3.45°	2.03°	7.81°	5.73°	3.78°	1.98°	2.63°	2.20°	2.15°	1.66°	3.68°
„ 1.60 „	—	1.79	1.91	1.69	2.04	5.83	5.84	3.92	2.50	1.64	1.09	1.33	0.95	2.54
„ 3.20 „	—	1.09	1.20	1.20	1.38	2.07	3.18	2.75	2.10	1.65	1.80	1.39	1.18	1.75
Luft	1879—94	15.24	13.02	11.07	7.08	6.16	4.96	5.30	4.90	4.99	7.45	8.57	9.30	8.17
Sandhügel.														
Tiefe 0.00 Meter	—	13.90	11.70	9.40	5.24	8.28	7.78	7.11	5.75	5.48	7.01	9.01	9.54	8.35
„ 0.10 „	—	12.66	10.37	9.64	5.58	5.75	5.19	5.55	4.37	5.13	5.10	7.58	9.63	7.21
„ 0.20 „	—	12.00	9.71	9.00	5.12	5.75	4.89	5.16	4.37	4.79	4.60	6.73	9.11	6.77
„ 0.40 „	—	8.89	7.55	7.07	4.23	6.71	4.71	5.03	4.26	4.20	3.79	4.85	4.95	5.52
„ 0.80 „	—	5.90	5.33	3.81	2.16	7.83	5.73	4.49	3.87	2.89	2.20	2.87	3.45	4.21
„ 1.60 „	—	2.28	1.91	1 93	2.15	5.83	5.84	3.92	3.59	2.61	2.51	2.12	1.57	3.02
„ 3.20 „	—	1.09	1.20	1.20	1.38	2.07	3.18	2.75	2.10	1.65	1.80	1.44	1.18	1.75
St. Petersburg.														
Luft	1887—94	11.40	13.60	10.80	6.50	5.10	4.20	3.50	2.30	5.60	5.10	7.40	7.20	6.89
Sandhügel.														
Tiefe 0.00 Meter	—	11.61	12.02	9.39	5.03	5.76	6.54	5.82	3.65	5.45	4.53	7.30	6.28	6.95
„ 0.40 „	—	9.73	10.48	6.06	2.73	6.13	5.26	3.77	3.80	4.25	3.68	3.83	4.43	5.35
„ 0.80 „	—	4.30	6.76	4.59	0.59	7.44	7.40	4.74	2.63	3.30	2.37	1.86	2.69	4.06
„ 1.60 „	—	1.24	2.56	2.39	1.56	4.99	8.35	5.26	3.02	2.26	1.19	1.67	1.06	2.96
„ 3.20 „	—	0.81	0.79	0.85	0.89	0.95	2.71	3.21	2.58	2.21	1.80	1.39	1.18	1.61
Luft	1879—94	13.90	13.60	10.80	7.30	5.10	6.00	6.30	5.40	5.70	7.70	8.10	13.90	8.65
Sandhügel.														
Tiefe 0.00 Meter	—	13.32	12.02	9.39	6.89	10.00	6.54	6.44	5.94	5.45	4.53	8.16	8.55	8.10
„ 0.40 „	—	9.73	10.48	6.06	3.19	8.34	5 87	4.98	3.80	4.45	4.05	5.21	7.64	6.15
„ 0.80 „	—	5.83	6.76	4.59	1.06	7.88	7.95	4.96	3.77	3.96	2.37	3.11	3.78	4.67
„ 1.60 „	—	1.78	2.56	2.39	1.56	4.99	8.35	5.26	3.02	2.76	2.40	2.23	1.76	3.26
„ 3.20 „	—	1.12	1.23	1.39	1.37	1.59	3.46	3.21	2.58	2.21	1.80	1.39	1.29	1.89

Die Veränderung der Monatsmittel der Lufttemperatur von Jahr zu Jahr ist an allen Beobachtungsplätzen am grössten und zwar sehr gross im Winter, Januar—März, bedeutend kleiner im Sommer, am kleinsten für August. Trotzdem ist in Mustiala und an allen Beobachtungsplätzen in Heinäis die nämliche Temperaturänderung im Boden am kleinsten, und ausserordentlich klein in den Monaten December—April, wo die Schneedecke liegt; entschieden grösser, aber doch nicht gross (im allgemeinen kleiner als für die Lufttemperatur) in den übrigen Monaten. Für 0.5 und 1.0 m Tiefe ist sie am grössten im Mai, für 2.0 m Tiefe am grössten im Juni, mit Ausnahme des Fichtenwaldes, wo diese Maxima bis Juni und Juli verschoben sind. Dass das Maimittel meist veränderlich ist, beruht wie früher hervorgehoben darauf, dass das Schneeschmelzen und das Aufthauen mit darauf folgender schneller Erwärmung des Bodens zu verschiedenen Zeiten zwischen Ende April und Ende Mai eintrifft. In 2 m Tiefe beginnt die schnelle Erwärmung im Juni, und im Fichtenhochwalde ist diese Epoche in allen Tiefen den übrigen Plätzen gegenüber verspätet.

In Pawlowsk und St. Petersburg sind die Verhältnisse theilweise ganz entgegengesetzt. Die grösste Veränderung der Monatsmittel von Jahr zu Jahr geschieht in den oberen Bodenschichten im Winter, ebenso wie dies für die Lufttemperatur der Fall ist. In den oberen Schichten des schneelosen Bodens ist also die Temperaturänderung von Jahr zu Jahr sehr gross in den Monaten November—März, bedeutend kleiner in den übrigen Monaten. In 0.80 m Tiefe ist doch schon die Veränderlichkeit am grössten in Mai und in den grösseren Tiefen ist die Veränderlichkeit in allen Sommermonaten Mai—August grösser als in den übrigen Monaten.

Die Ursache dazu, dass hier in den unteren Bodenschichten die Temperaturänderung von Jahr zu Jahr grösser im Sommer als im Winter ist, obgleich das Verhältniss in den oberen Schichten sowie in Betreff der Lufttemperatur ganz entgegengesetzt ist, finden wir gewiss in den Regengüssen im Sommer und in dem Umstande, dass die rasche Erwärmung des Bodens im Vorsommer in verschiedenen Jahren zu verschiedenen Zeiten beginnt.

In der letzten Columne der obigen Tabelle haben wir für alle Plätze und Tiefen das Mittel der angegebenen Maximaldifferenzen der Monatsmittel eingetragen. Hieraus geht hervor wie an allen Plätzen diese Mittel von oben nach unten recht rasch abnehmen. Weiter ersieht man, dass in entsprechenden Tiefen und Beobachtungsperioden diese Maximaldifferenzen bedeutend grösser in Pawlowsk und St. Petersburg als in Heinäis sind, wozu besonders die verschiedenen Verhältnisse an beiden Plätzen im Winter beitragen.

Vergleichen wir die Schnelligkeit der Abnahme dieser Maximaldifferenzen nach unten in den verschiedenen Monaten oder Jahreszeiten für sich, so finden wir in Mustiala und Heinäis überhaupt keine Abnahme während der Wintermonate December—April, beinahe eher eine Zunahme, während in Pawlowsk und St. Petersburg die Abnahme der Maximaldifferenzen nach unten gerade in den Wintermonaten am grössten und sehr gross ist. Im Sommer bemerkt man an allen Plätzen eine mässige Abnahme der Maximaldifferenzen nach unten. Einzelne Unregelmässigkeiten in dieser Beziehung hier und da heben nicht die Regel auf.

Berichtigungen.

Seite				steht	soll sein
16	Lufttemperatur		Mittel	**2.06**	**−2.06**
18	Mustiala.	Tiefe 0.15 m	„	**15.8**	**−1.58**
20	„	„ 0.5 „	19 März	**0.2**	**−0.2**
„	Heinäis, Rasenplatz	„ 0.5 „	„ „	−0.4	**−0.4**
„	„ „	„ „ „	24 „	**−0.3**	−0.3
30	Niederschlag		Summe	**3.49** * 3.37	**34.9** * 33.7
34	Heinäis, Fichtenwald	Tiefe 1.0 m	14 Mai	0.9	**0.9**
„	„ „	„ 2.0 „	19 „	1.6	**1.6**
„	„ „	„ „ „	22 „	**1.7**	1.7
40	Lufttemperatur		Mittel	**1.51**	**−1.51**
41	„		Jahresmittel	**4.67**	**4.42**
43	Heinäis, Birkenwald	Tiefe 0.5 m	Mittel	**0.27**	**−0.27**
44	Lufttemperatur		„	**10.35**	**−10.35**
„	Heinäis, Off. Platz	„ 0.5 „	„	**0.51**	**0.77**
„	„ Fichtenwald	„ 1.0 „	„	**0.54**	**0.86**
45	Niederschlag		Summe	**51.3** * 30.4	**51.1** * 29.6
57	Mustiala	Tiefe 0.5 m	Mittel	**4.10**	**0.41**
61	„	„ „ „	28 August	12.7	13.7
63	Heinäis, Birkenwald	„ 2.0 „	20 October	8.0	**8.0**
66	Mustiala	„ 0.5 „	Mittel	**0.98**	**1.00**
„	Heinäis, Off. Platz	„ 2.0 „	„	**3.36**	**3.68**
70	„ Birkenwald	„ „ „	„	**3.25**	**3.44**
73	Lufttemperatur		„	**17.30**	**14.40**
74	Niederschlag		Summe	**14.0**	**47.0**
„	Mustiala	Tiefe 0.5 m	Mittel	**14.41**	**11.41**
77	Heinäis, Off. Platz	„ 0.5 „	1 Dec.	3.6	3.0
„	„ „ „	„ 1.0 „	„	2.4	4.4
„	„ „ „	„ 2.0 „	„	4.4	5.4
„	„ „ „	„ 0.5 „	5 Dec.	3.7	2.7
„	„ „ „	„ „ „	Mittel	**2.36**	**2.30**
„	„ „ „	„ 2.0 „	„	**4.47**	**4.50**
„	„ Birkenwald	„ 2.0 „	„	**6.28**	4.99
„	Lufttemperatur		Jahresmittel	**5.11**	**4.87**
82	Heinäis, Fichtenwald	Tiefe 0.5 m	Mittel	**0.40**	**0.31**
104	Tiefe 2.0 Meter		Dec. 1887	7.60	4.60
119	Heinäis, Birkenwald, Max.	Tiefe 2.0 m	1889	7.6	8.0
„	„ „ „	„ „ „	Mittel	7.91	7.96
145	Tiefe 0.80 m, Pawlowsk, Januar		„	−0.61	−0.86
147	Januar. Pawlowsk		Tiefe 0.80	−0.61	−0.86
151	„ „		„ „	−0.59	−0.86

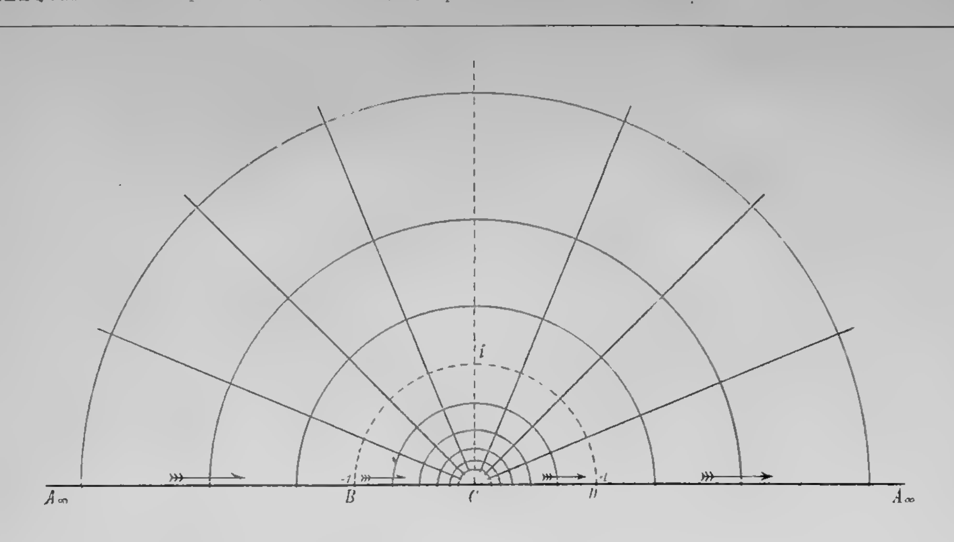


Fig. 1.

Fig. 2.

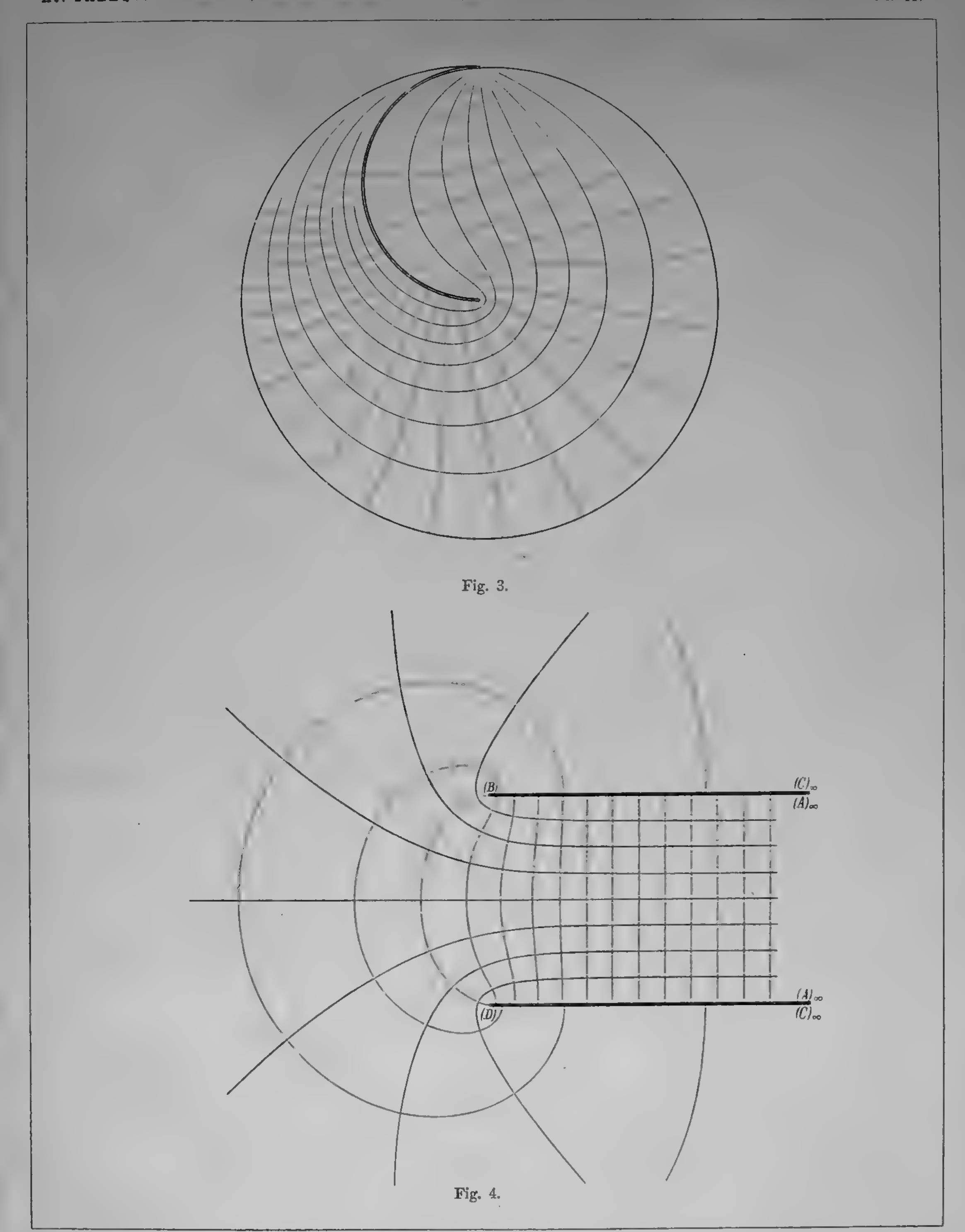


Fig. 3.

Fig. 4.

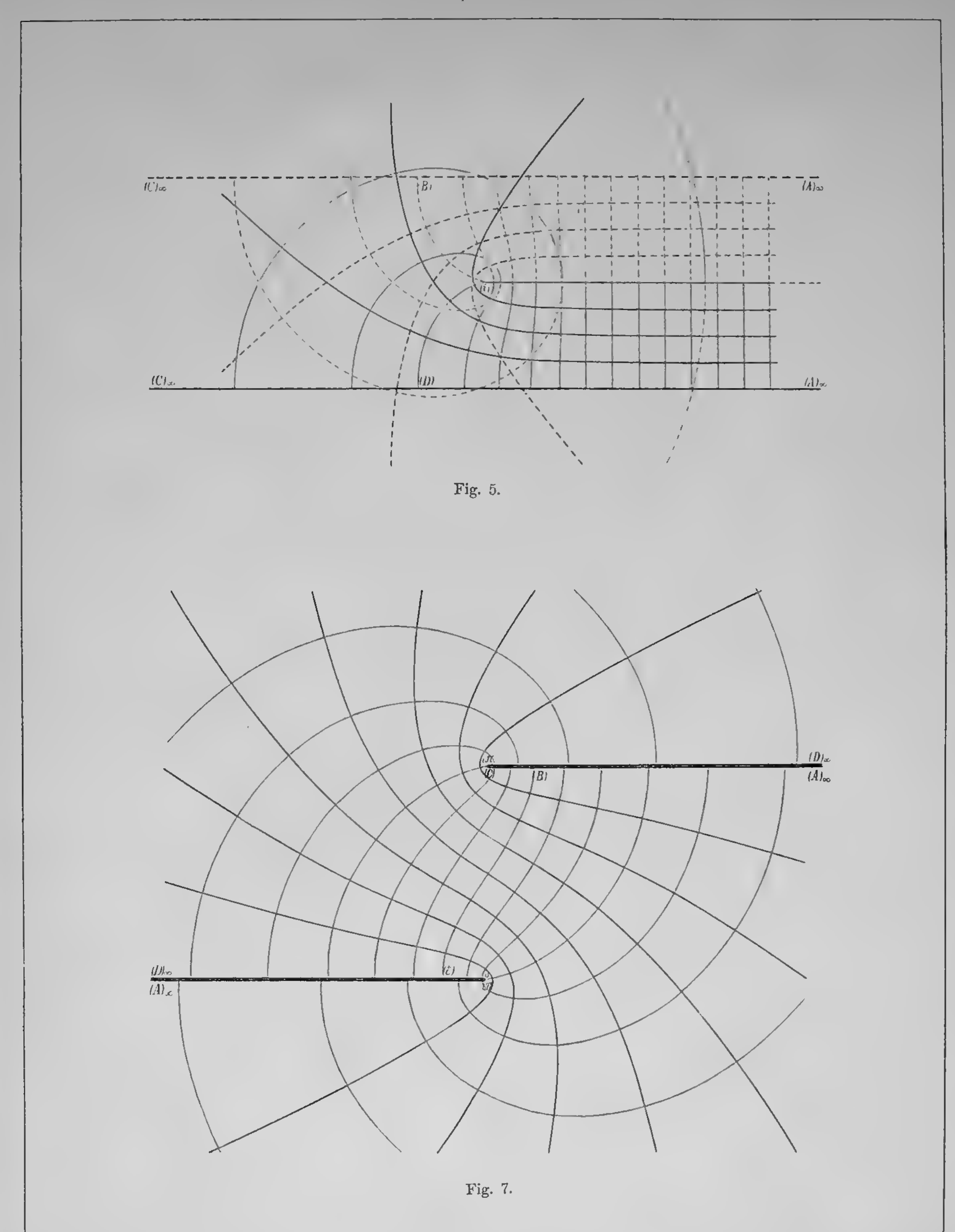


Fig. 5.

Fig. 7.

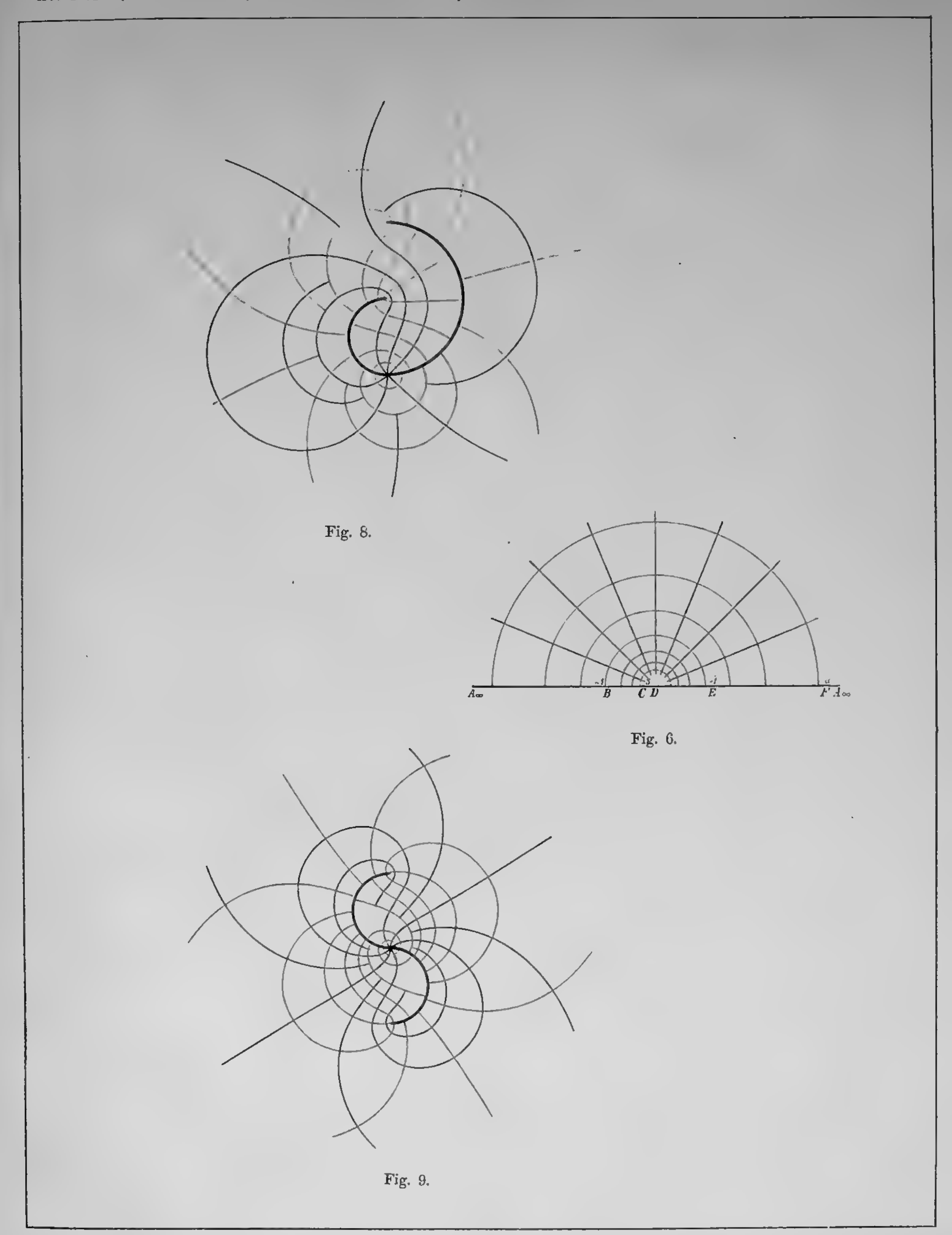


Fig. 8.

Fig. 6.

Fig. 9.

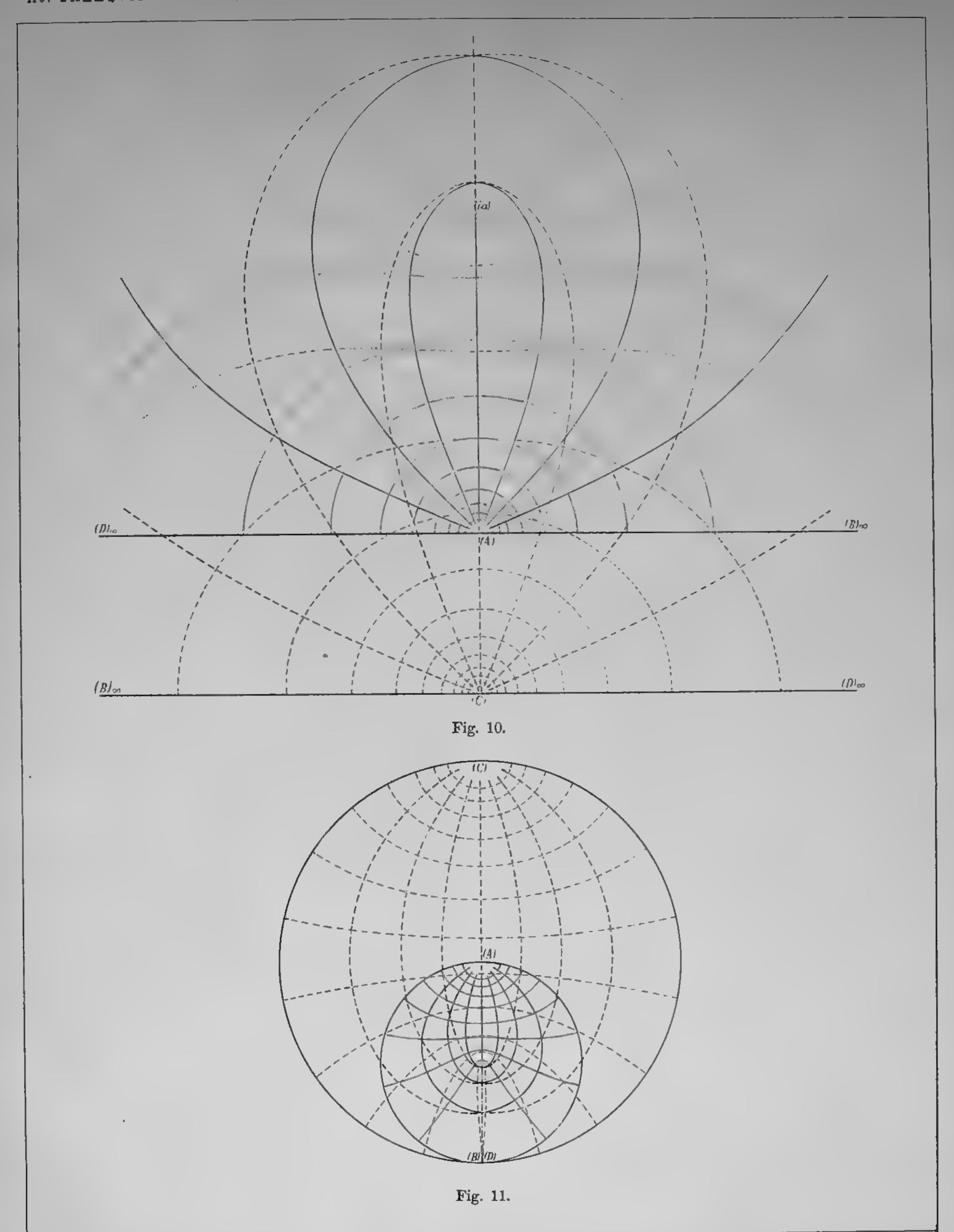


Fig. 10.

Fig. 11.

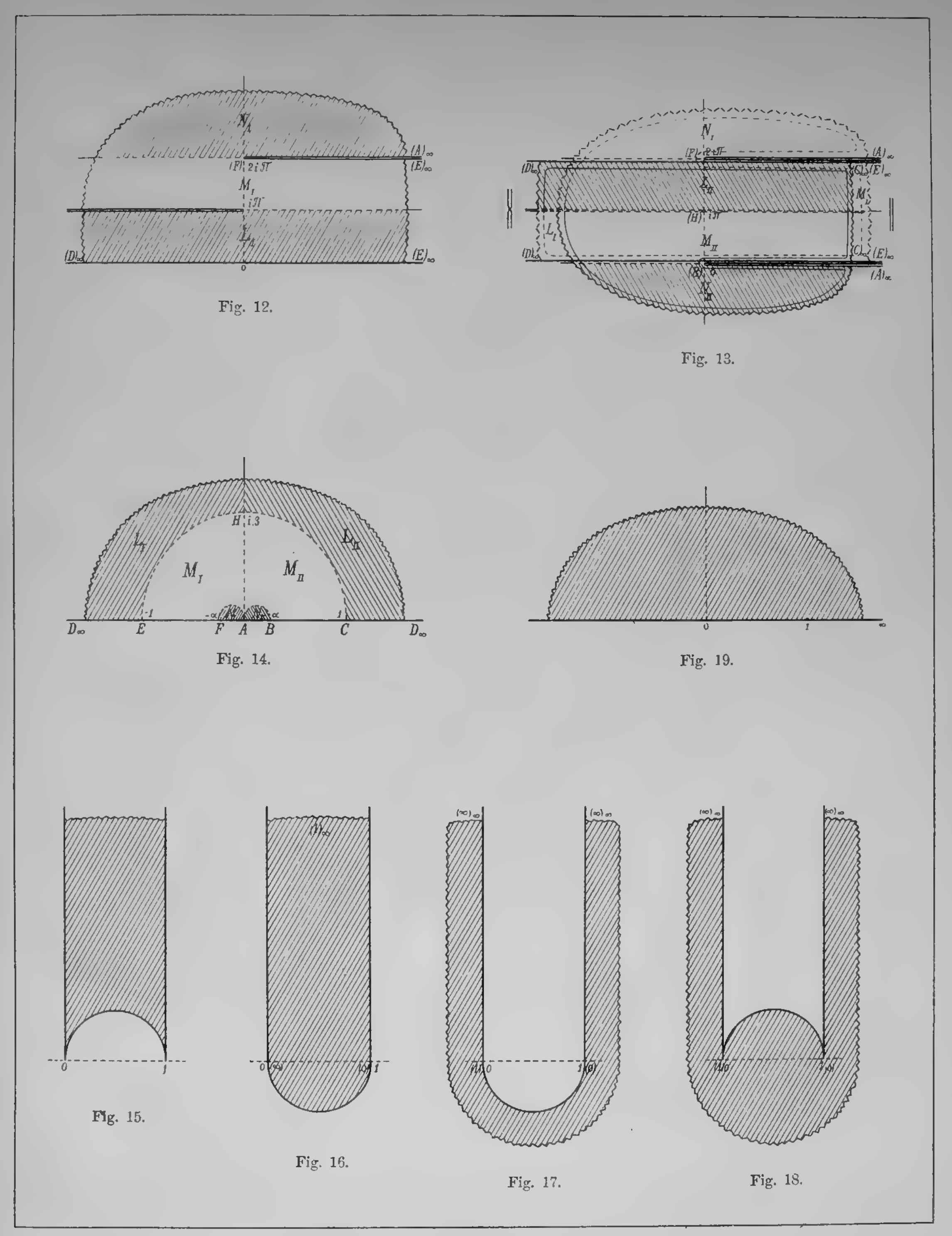


Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

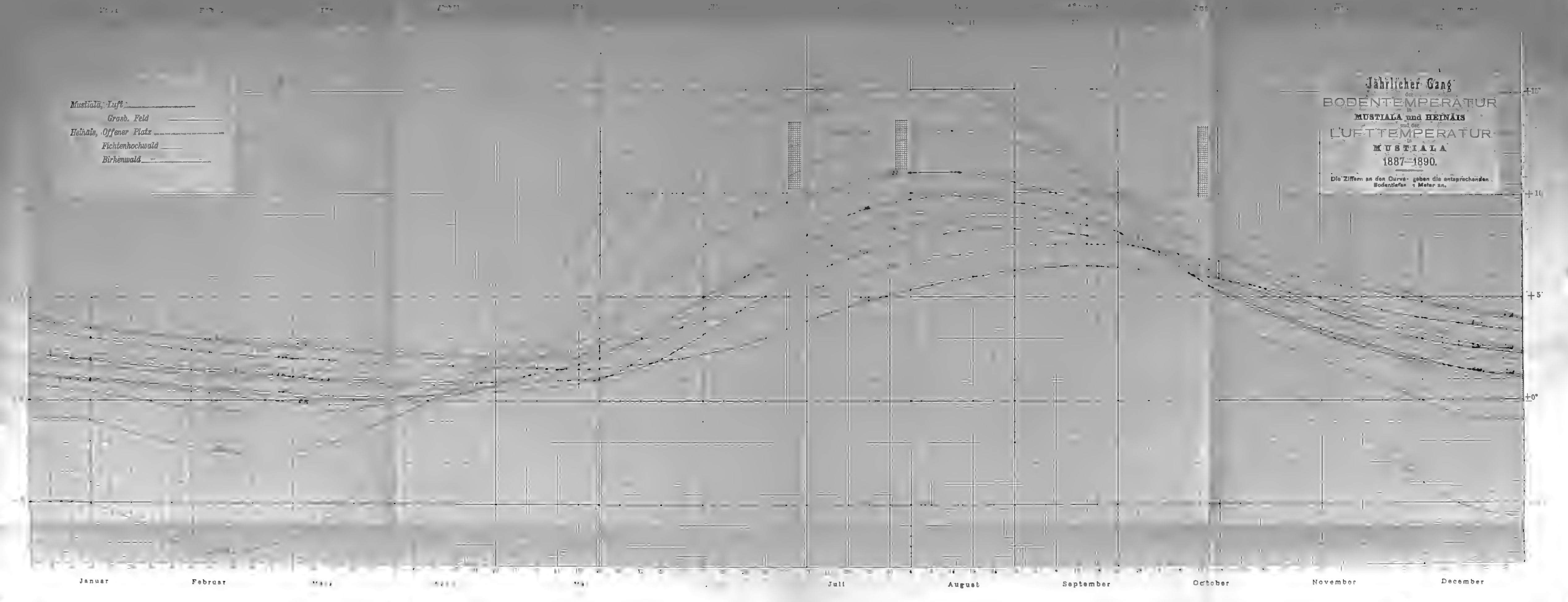
Fig. 19.

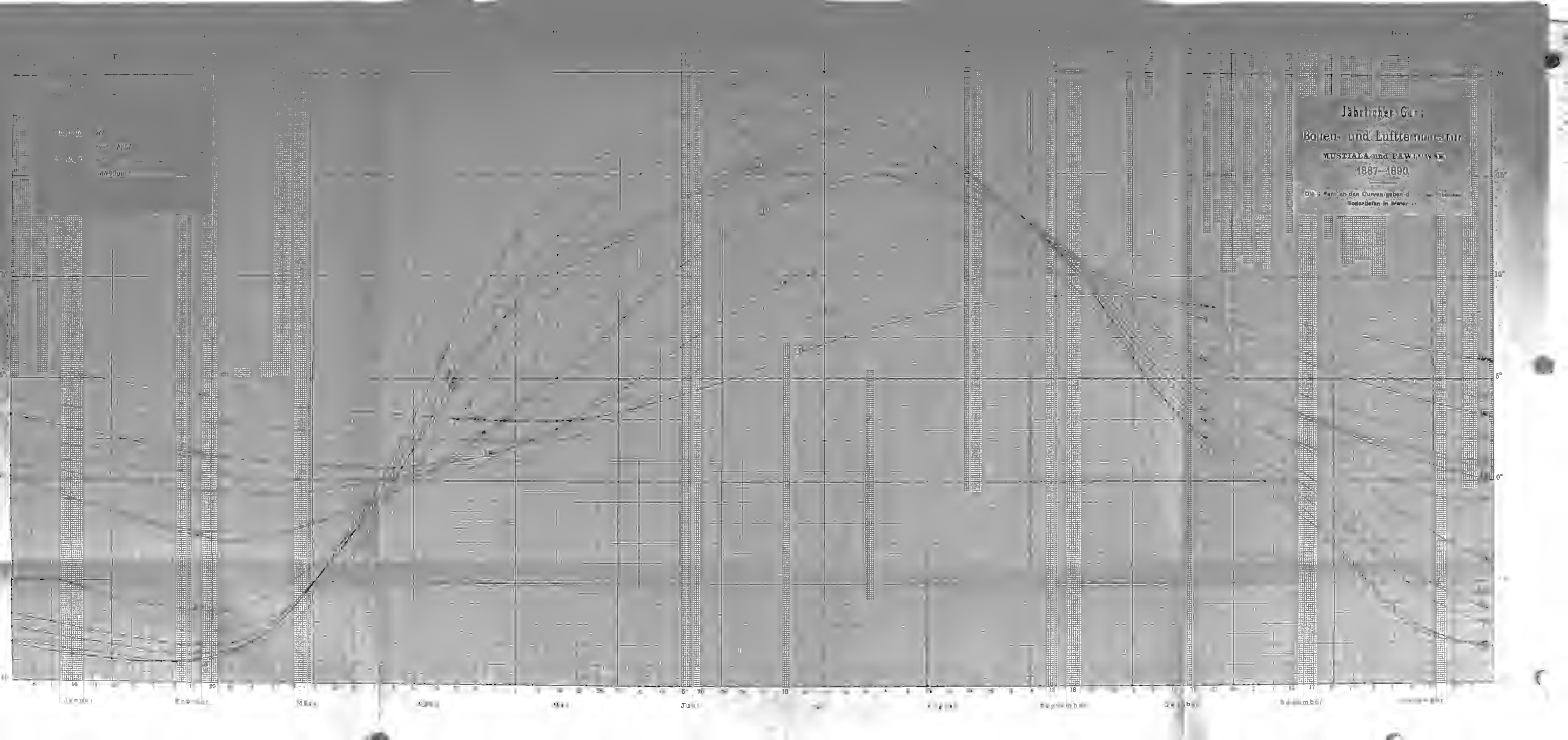
Fig. 15.

Fig. 16.

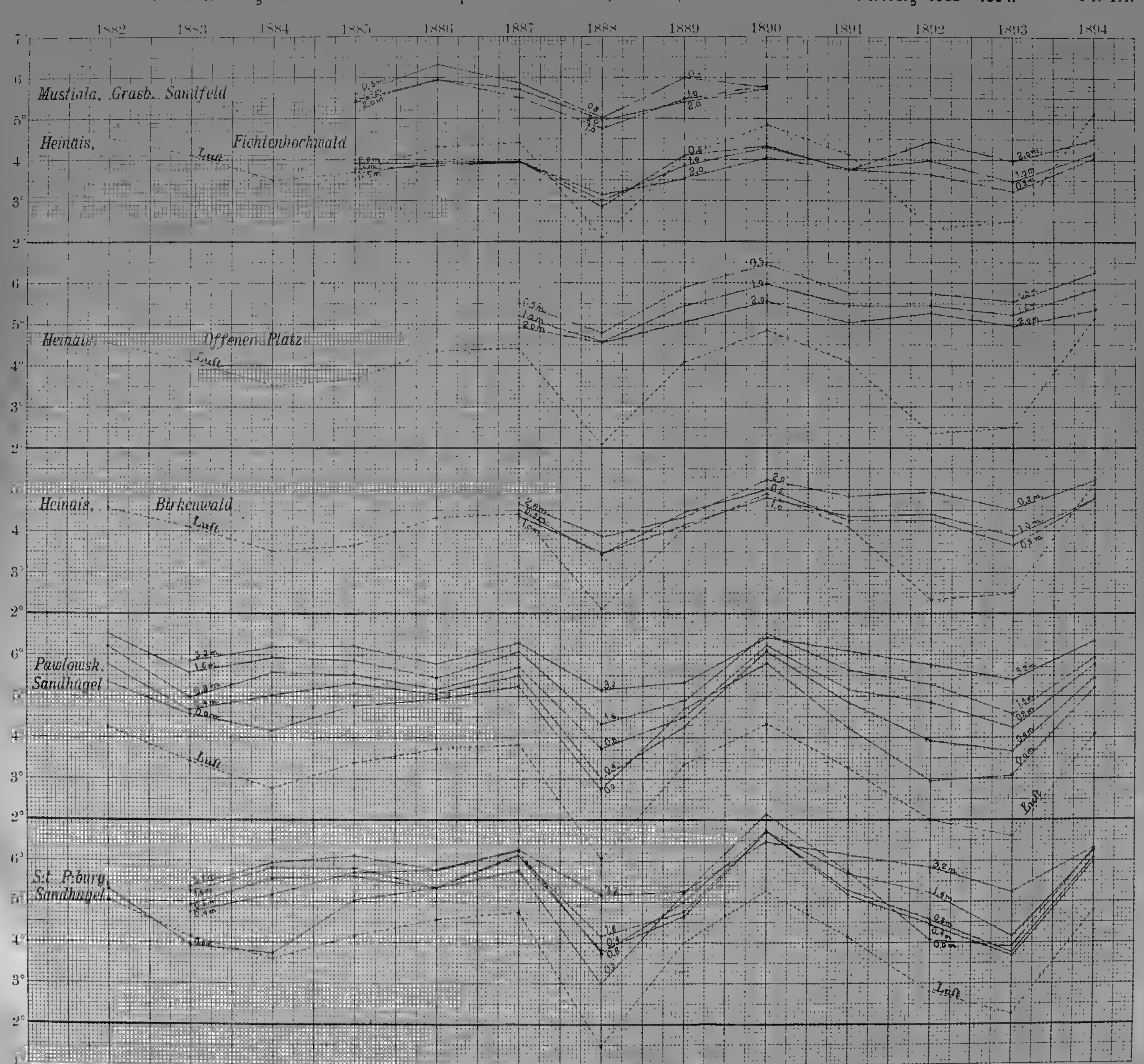
Fig. 17.

Fig. 18.


Jährlicher Gang
der
BODENTEMPERATUR
in
MUSTIALA und HEINÄIS
und der
LUFTTEMPERATUR
in
MUSTIALA
1887—1890.
Die Ziffern an den Curven geben die entsprechenden Bodentiefen in Meter an.
Mustiala, Luft
Grasb. Feld
Heinäis, Offener Platz
Fichtenhochwald
Birkenwald
+15°
+10°
+5°
±0°
Januar
Februar
Juli
August
September
October
November
December


Jährlicher
und Luftte
MUSTIALA und
1887–1890
Bodentiefen in Meter
15°
10°
5°
0°
Januar
Mai
Juni

Säkulärer Gang der Boden- und Lufttemperatur in Mustiala, Heinäis, Pawlowsk und St. Petersburg 1882 1894. *Pl. III.*




MBL WHOI Library - Serials
5 WHSE 04166